

В. А. Тодчук, канд. техн. наук, доц. (г. Харьков, Украина)

Устойчивость цилиндрических оболочек

Теоретически определена зависимость осевых критических нагрузок цилиндрических оболочек от характеристик материалов, геометрических параметров и граничных условий.

Ключевые слова: выпучивание, критическая нагрузка, перемещение, устойчивость, эксперимент, энергия.

Теоретично визначена залежність осьових критичних навантажень циліндричних оболонок від характеристик матеріалів, геометричних параметрів та граничних умов.

Ключові слова: вигин, критичне навантаження, переміщення, стійкість, експеримент, енергія.

The dependence of cylindrical shell critical loads on mechanical material properties, geometric parameters and boundary conditions is determined.

Keywords: goggling, critical loading, displacement, stability, experiment, energy.

Введение

Устойчивость круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии вызывает особый интерес, так как является самой показательной с точки зрения несоответствия теоретических и экспериментальных значений критических нагрузок.

Круговая цилиндрическая оболочка длиной L , радиуса R , с толщиной стенок цилиндра h , нагружена по краям равномерно распределёнными усилиями сжатия N .

В настоящее время насчитывается огромное количество книг и статей, посвященных устойчивости. Однако проблема не решена и требует дальнейших исследований.

Первые фундаментальные результаты были получены Лоренцем [1] и С. П. Тимошенко [2].

Лоренц и Тимошенко С. П. в линейной постановке на основе статического критерия Л. Эйлера рассмотрели устойчивость шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Полученная в этих работах, величина критической нагрузки (ее называют верхней критической нагрузкой) не подтвердилась экспериментально. Наблюдаемые в экспериментах критические нагрузки существенно меньше верхних критических нагрузок.

Все дальнейшее развитие теории устойчивости оболочек было направлено на выявление причин этого расхождения. Развивались различные направления теории, но наибольший интерес вызвали два направления.

Первое направление связано с использованием нелинейной теории оболочек и рекомендациями оценивать устойчивость оболочек по нижней критической нагрузке. Эти рекомендации оказались ошибочными. Величина нижней критической нагрузки для случая осевого сжатия оболочки составляет сотые доли верхней критической нагрузки, а в некоторых работах получены отрицательные значения нижней критической нагрузки.

Второе направление связано с исследованием влияния начальных несовершенств оболочки на величину верхней критической нагрузки. К сожалению, и это направление исследований положительных результатов не принесло. Анализ экспериментальных данных показывает, что малые отклонения геометрии оболочки от идеальной формы снижают величину критической нагрузки, но не в разы, что часто наблюдается в экспериментах.

Наиболее полно и детально направления исследования устойчивости оболочек, пластин и стержней изложены в работах [3–6].

В работах [7–9] представлено решение задачи устойчивости шарнирно опертого цилиндра при осевом сжатии где предполагалось, что потеря устойчивости происходит за счет внутренней энергии, накопленной в докритическом состоянии, а внешняя нагрузка изменяется при выпучивании. Показано, что такой учет сильно снижает теоретические значения критических нагрузок и приближает их к экспериментальным данным. Однако, необходимо продолжать исследование связанные с поиском более точные математических выражений по вычислению критических нагрузок.

Цель работы. Получить математические зависимости для критических значений осевых сжимаемых нагрузок шарнирно опертых и жестко заделанных цилиндрических оболочек, которые позволят повысить точность расчетов данных величин.

Исследования. Использование теоремы «о работе внешних сил на конечных перемещениях» при решении задач устойчивости шарнирно опертых и жестко заделанных по краям цилиндрических оболочек – особенность данного исследования.

В основу исследования положена гипотеза: «Критическая сжимающая нагрузка N_c в процессе потери устойчивости оболочки изменяется и в новом (деформированном) состоянии становится равной $N_c + N_1$ (N_1 – изменение критической нагрузки в момент потери устойчивости)».

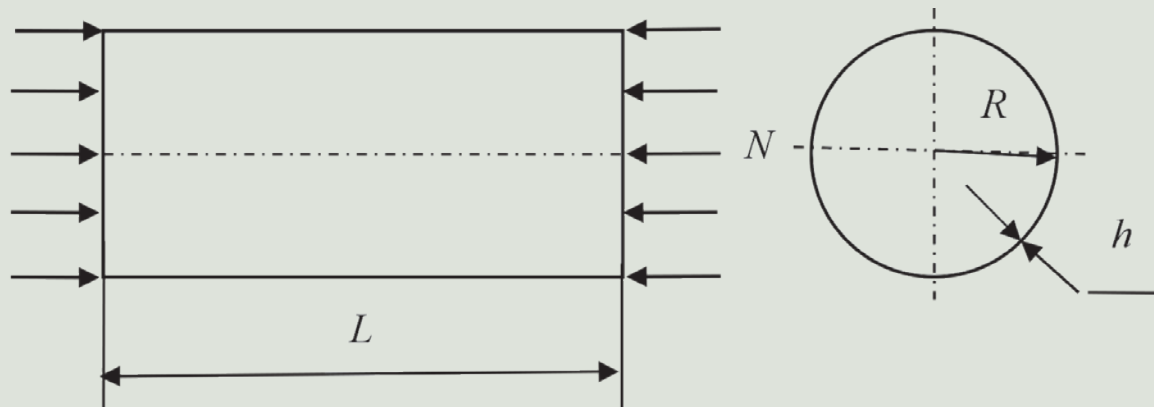


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка при равномерном осевом сжатии

Задача решается в линейной постановке при безмоментном докритическом состоянии. Используются энергетический метод и соотношения теории пологих оболочек.

Согласно С. П. Тимошенко [5], при решении энергетическим методом задач устойчивости упругого равновесия критическая нагрузка определяется из условия, что приращение потенциальной энергии ΔV малой деформации, возникающей при потере устойчивости, равна дополнительной работе ΔA , производимой нагрузкой на перемещениях, вызванных этой деформацией

$$\Delta V = \Delta A. \quad (1)$$

Согласно В. Флюгге [10] при осевом сжатии

$$\Delta V = \iint_0^{2\pi} \int_0^L \left[\left(T_{10} + \frac{1}{2} T_1 \right) \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + 2M_{12} \chi_{12}) \right] dx dy, \quad (2)$$

где T и M – обозначения внутренних усилий и моментов, возникающие в оболочке; все параметры, характеризующие оболочку в докритическом состоянии, снабжены индексом 0, а в направлении осей: x – индексом 1 и y – индексом 2.

Дополнительную работу, действующих на оболочку, осевых усилий запишем в виде

$$\Delta A = \iint_0^{2\pi} \int_0^L \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left[\varepsilon_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy, \quad (3)$$

где w – нормальная составляющая вектора перемещений точек срединной поверхности оболочки.

Появление коэффициента $1/2$ при величине N_1 объясняется тем, что переход оболочки из начального недеформированного состояния в деформированное состояние сопровождается изменением значения величины N_1 от нуля до его максимального значения по модулю.

Согласно с теоремой о работе внешних сил на конечных перемещениях [11]: при равновесии сумма работ внешних сил на возможных перемещениях любого порядка малости численно равна сумме работ внутренних сил на тех же перемещениях.

Исходя из этого, можно принять:

$$\iint_0^{2\pi} \int_0^L \left(T_{10} + \frac{1}{2} T_1 \right) \varepsilon_1 dx dy = \iint_0^{2\pi} \int_0^L \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \varepsilon_1 dx dy. \quad (4)$$

В этом случае равенство (1) принимает вид:

$$\begin{aligned} \iint_0^{2\pi} \int_0^L (T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + 2M_{12} \chi_{12}) dx dy = \\ = \iint_0^{2\pi} \int_0^L \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Выражения для, возникающих при потере устойчивости, дополнительных мембранных усилий, моментов, а также деформаций растяжения – сжатия, сдвигов, изменений кривизны и кручений срединной поверхности, согласно [12], запишем в виде

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); T_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}; \\ M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_1 + \nu \chi_2); M_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_2 + \nu \chi_1); \\ T_{12} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \chi_{12}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right); \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right); \varepsilon_{12} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \\ \chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (6)$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Подставив выражения (6) в (5), получим

$$\begin{aligned} \iint_0^{2\pi} \int_0^L (T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12} + M_1 \chi_1 + M_2 \chi_2 + 2M_{12} \chi_{12}) dx dy = \\ = \iint_0^{2\pi} \int_0^L \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \\ \iint_0^{2\pi} \int_0^L \left\{ \frac{1}{Eh} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 2(1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] \right\} dx dy = \\ = \iint_0^{2\pi} \int_0^L \left(N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned} \quad (7)$$

Зависимость (7) содержит неизвестные Φ и w : w – функция прогибов оболочки в направлении оси z , Φ – подлежащая определению функция, тождественно удовлетворяющая уравнениям совместности деформаций $\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{dy^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{dx^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{dxdy}$, полученным из (6) и на основе зависимостей

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x}; \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^4 \Phi}{dx^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{dx^2 dy^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{dy^4} = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (8)$$

Шарнирно опертая оболочка

Оболочка геометрически совершенна и идеально упругая, докритическое состояние – безмоментное.

Если края оболочки шарнирно оперты, то граничные условия требуют, чтобы w и, на основании равенства нулю момента M_1 , $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2}$, а также T_1 на концах были равны нулю.

Φ и w , отвечающие граничным условиям, зададим в виде:

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}; \Phi = \varphi(x) \cos \frac{ny}{R}, \quad (9)$$

где m – число полуволов по длине оболочки; n – число волн в окружном направлении; f – амплитуда смещений в направлении оси z .

Из (8) получаем

$$\varphi(x) = f \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{L}. \quad (10)$$

Согласно теореме о работе внешних сил на конечных перемещениях

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L N_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L T_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy,$$

$$T_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) =$$

$$= \frac{f}{1+\nu} \frac{Eh}{R} \frac{\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n}{R}\right)^2}{\left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}. \quad (11)$$

Проинтегрировав равенство (7), получаем зависимость критических усилий N^* от геометрии оболочки и параметров волнообразования

$$\int_0^{2\pi R} \int_0^L N_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^L T_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy, \quad (12)$$

$$N_* = Eh \left\{ \frac{\lambda^4 [\lambda^2 + (2+\nu)n^2]}{(\lambda^2 + n^2)^4} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{(\lambda^2 + n^2)^2}{\lambda^2} \right\},$$

где $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$.

Относительное критическое усилие

$$\bar{N}_* = \frac{N_*}{N_*^e}, \quad (13)$$

где $N_*^e = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$ – верхнее критическое усилие.

При $\nu = 0,3$ $N_*^e = 0,605 \frac{Eh^2}{R}$.

На рис. 2 представлены результаты минимизации выражения (13) по целочисленным параметрам m и n для трех значений L/R , а R/h изменяется от 0 до 3000.

Анализ результатов теоретического исследования устойчивости гладкой свободно опертой цилиндрической оболочки при осевом сжатии и сравнение их с экспериментальными данными (в систематизированном виде они представлены в [6], позволяет утверждать, что удалось:

- получить выражение для N_* , позволяющее вычислять критические значения осевой сжимающей нагрузки близкие к экспериментальным данным. Например, экспериментальные значения критических нагрузок приведенные в [6] лежат в диапазоне: при $R/h = 500$ (0,15–0,5) N_*^e , а $\bar{N}_* = (0,31-0, 5)$; при $R/h = 1000$ (0,18–0,4) N_*^e , а $\bar{N}_* = (0,28-0,42)$; при $R/h = 1600$ (0,18–0,3) N_*^e , а $\bar{N}_* = (0,21-0, 34)$;

- установить зависимость относительных критических значений осевой сжимающей нагрузки \bar{N}_* и от отношения радиуса оболочки к её толщине R/h (решения в классической постановке приводят к $\bar{N}_* = 1$).

Жестко заделанная оболочка

Если края оболочки жестко заделаны, то граничные условия требуют, чтобы w и, на основании равенства нулю угла поворота защемленного сечения, $\frac{\partial w}{\partial x}$,

а также T_1 на концах были равны нулю. В этом случае

$$w = f \sin^2 \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R};$$

$$\Phi = f \frac{Eh}{R} \frac{2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2}{\left[4\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2} \cos 2 \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}. \quad (14)$$

Подставив (14) в (7) и проинтегрировав его, получаем зависимость критических усилий жестко заделанной оболочки от ее геометрии и параметров волнообразования

$$N_*^3 = Eh \left\{ \frac{16\lambda^4 [\lambda^2 + (2+\nu)n^2]}{(4\lambda^2 + n^2)^4} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \frac{4\lambda^2 + 2\lambda^2 n^2 + \frac{3}{4}n^4}{\lambda^2} \right\}. \quad (15)$$

Относительное критическое усилие жестко заделанной оболочки

$$\bar{N}_*^3 = \frac{N_*^3}{N_*^e}. \quad (16)$$

Расчеты показывают, что $\bar{N}_*^3 = \bar{N}_*^e = 1$ (рис. 2) в рассмотренном диапазоне L/R и R/h . Это означает, что критические значения осевой сжимающей нагрузки жестко заделанной по концам цилиндрической оболочки значительно выше чем при шарнирном оперании, и что N_*^3 можно вычислять не по формуле (15),

по формуле $N_*^3 = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$.

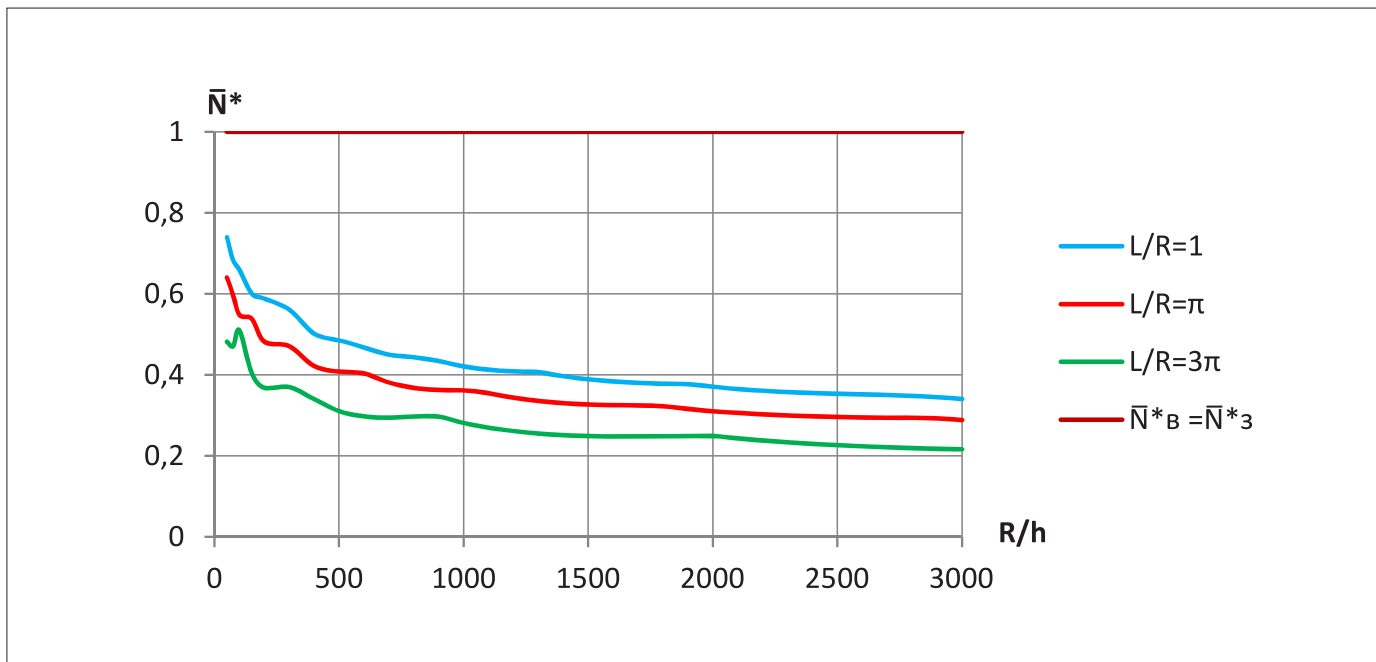


Рис. 2. Значения относительных критических усилий сжатия

Выводы

По результату проведенных исследований можно сделать следующие выводы:

1. На основе предположения, что при выпучивании внешняя нагрузка изменяется и использования теоремы о работе внешних сил на конечных перемещениях, решены задачи устойчивости шарнирно опертых и жестко заделанных цилиндрических оболочек при осевом сжатии.

2. Получены формулы, позволяющие вычислять теоретические значения критических нагрузок, близкие к экспериментальным данным.

3. Установлена зависимость относительных значений осевой критической нагрузки шарнирно опертой цилиндрической оболочки и от отношения радиуса к толщине, и от отношения длины к радиусу оболочки.

4. Показано, что жесткая заделка краев оболочки сильно повышает ее устойчивость по сравнению с шарнирным операнием краев оболочки, а критические значения осевой критической нагрузки жестко заделанной цилиндрической оболочки можно вычислять по классической формуле для шарнирно опертой оболочки.

5. Данный подход можно использовать для решения задач устойчивости оболочек.

6. Данный подход совместно с учетом динамики происходящих процессов, исходных и граничных условий, начальных несовершенств в дальнейшем позволит приблизить исследователей к решению проблемы устойчивости тонкостенных конструкций.

Список литературы:

1. Lorenz R. Die nicht assensymmetrische / R. Lorenz // *Knickung dünnwandiger Hohlzylinder Zeitschrift.*– 1911. – Bd 12. – Nr. 7. – P. 241–260.

2. Тимошенко С. П. К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки / С. П. Тимошенко // *Вестн. о-ва технол.*– 1914. – Т. 21. – С. 785–792.

3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1976.– 984 с.

4. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек / Григолюк Э. И., Кабанов В. В. – М.: Наука, 1978.– 359 с.

5. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем / С. П. Тимошенко. – ОГИЗ: Гостехиздат, 1946.– 532 с.

6. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1971.– 807 с.

7. Греков В. Ф. Подход к решению задачи устойчивости цилиндра при осевом сжатии / Греков В. Ф., Пьянков А. А., Тодчук В. А. // *Компрессорное и энергетическое машиностроение.*– 2013.– № 3 (29). – С. 40–42.

8. Греков В. Ф. Об устойчивости тонкостенных цилиндров / Греков В. Ф., Пьянков А. А., Тодчук В. А. // *Компрессорное и энергетическое машиностроение.*– 2013.– № 3 (32). – С. 10–12.

9. Греков В. Ф. Об устойчивости оболочек, пластин и стержней / Греков В. Ф., Пьянков А. А., Тодчук В. А. // *Компрессорное и энергетическое машиностроение.*– 2014.– № 3 (37). – С. 33–37.

10. Флюгге В. Статика и динамика оболочек / В. Флюгге. – М.: Стройиздат, 1961.– 385 с.

11. Бернштейн М. С. Теорема о работе внешних сил на конечных перемещениях и ее применение к задачам устойчивости упругого равновесия / М. С. Бернштейн // *Расчет пространственных конструкций.*– 1961. – Вып. 8. – С. 34–38.

12. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962.– 431 с.