

М. Я. Довжик, к. т. н, доцент, Б. Я. Татьянченко, к. т. н, доцент, О. М. Калнагуз, старший викладач, М. В. Горювий, старший викладач (Сумський національний аграрний університет, м. Суми, Україна)

## Брахистохрона у відцентровім полі

Варіаційним методом за допомогою рівняння Ейлера-Лагранжа визначена форма напрямної лопатки відцентрового розгінного пристрою при, якій тверда матеріальна частка переміщується між двома заданими точками відцентрового поля за мінімальний проміжок часу.

**Ключові слова:** відцентрове поле, брахистохрона, диференціальні рівняння, рівняння Ейлера-Лагранжа, умова Лежандра.

При помощи вариационного метода на основе уравнения Эйлера-Лагранжа определена форма направляющей лопасти центробежного разгонного устройства, при которой твердая частица перемещается между двумя заданными точками центробежного поля в минимальное время.

**Ключевые слова:** центробежное поле, брахистохрона, дифференциальное уравнение, уравнение Эйлера-Лагранжа, условие Лежандра.

Using the variational method based on the Euler-Lagrange equation, the shape of the guiding blade of a centrifugal accelerating device is determined, at which the solid particle moves between two specified points of the centrifugal field at the minimum time

**Keywords:** centrifugal field, brachistochrone, differential equation, rivnyanya Euler-Lagrange, leaning of Legendre

### Постановка проблеми у загальному вигляді.

Відцентрові лопатеві пристрої використовуються не тільки для переміщення рідин і газів (насоси, вентилятори), але й для надання швидкості твердим тілам. Наприклад, у механічних дробеструйних установках для очищення й зміцнення металевих поверхонь розгін сферичних часток проводиться лопатками обертового ротора. Цей же принцип застосований у конструкції спеціальної центрифуги [1], де самофугування сферичних часток відбувається під час їх обертання відносно власних центрів ваги при вильоті з ротора, та в інших конструкціях. У всіх цих випадках швидкість часток, час їх руху по напрямних розгінного пристрою й інші параметри істотно залежать від форми напрямної лопатки.

### Аналіз основних досліджень і публікацій.

Спроба отримати рівняння брахистохрони у відцентровому полі була зроблена в роботі [2]. Пізніше ця задача вирішувалася при профілюванні лопаток оптимальної форми для метателів ґрунту [3, 4]. Відомі роботи з розробки просторових лопаток за допомогою брахистохрон у полі відцентрових сил [5], а також створення теорії руху сферичного тіла по поверхні довільної форми з урахуванням сухого і в'язкого тертя [6].

### Формування цілей та постановка задач.

У даній роботі уточнюється рішення задачі про знаходження форми кривої найшвидшого переміщення між двома точками відцентрового поля методом, запропонованим в роботі [2].

### Виклад основного матеріалу дослідження.

Нехай напрямна АВ (рис. 1) обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  відносно центра О. Тіло, потрапляючи на цю напрямну в момент часу  $t=0$  у точці А з початковою відносною швидкістю  $V_0$ , буде рухатися під дією відцентрової сили уздовж напрямної. Якщо знехтувати тертям, миттєва швидкість

$V = \sqrt{V_0^2 + \omega^2(r^2 - r_0^2)}$ . Записуючи через невідому функцію  $r=r(\varphi)$  кривої АВ і її похідну  $r'$  елементарну дугу  $dS = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$ , знаходимо час переміщення тіла від

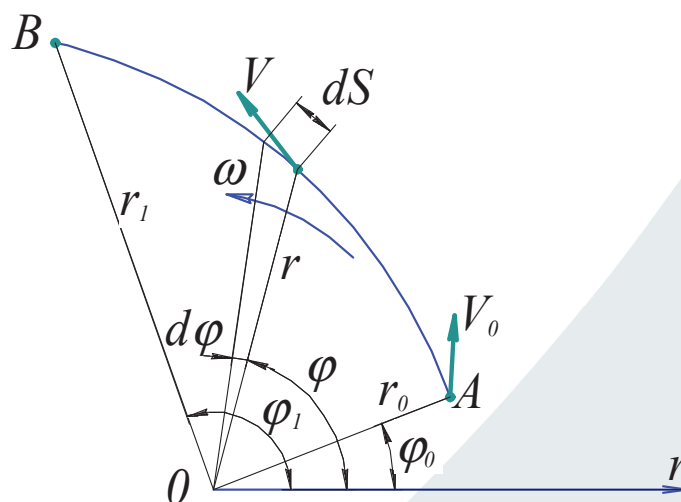


Рис. 1. Розрахункова схема руху матеріальної точки у відцентровому полі

точки А до точки В:

$$t = \int_0^{t_1} \frac{ds}{V} = \frac{1}{\omega} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varphi) d\varphi,$$

$$\text{де } f(\varphi) = \sqrt{\frac{r^2 + (r')^2}{r^2 - k^2}}, \quad k = \frac{\sqrt{\omega^2 r_0^2 - V_0^2}}{\omega}.$$

Умова Ейлера-Лагранжа мінімуму цього інтегралу

$$f - r' \frac{\partial f}{\partial r'} = \text{const}$$

у даному випадку буде:

$$r^2 = C \sqrt{(r^2 + (r')^2)(r^2 - k^2)},$$

де С – постійна.

З умови Лежандра, що вимагає невід'ємності другої

часткової похідної від функції  $f(\varphi)$  по  $r'$  для того, щоб шукана екстремаль давала мінімум певному інтегралу, впливає, що постійна  $C$  повинна бути позитивною.

Вирішуючи останнє рівняння відносно  $r' = dr/d\varphi$ , після розділення змінних одержимо вихідне диференціальне рівняння:

$$d\varphi = C \left( \frac{r dr}{k^2 \sqrt{R}} - \frac{dr}{r \sqrt{R}} \right),$$

де  $R = ar^4 + br^2 + c$ ;  $a = \frac{1-C^2}{k^4}$ ;  $b = \frac{2C^2-1}{k^2}$ ;  $c = -C^2$ .

Інтегруючи це рівняння, після знаходження постійних інтегрування з умови ( $r=r_0$ ,  $\varphi_0=0$ ) отримаємо два рівняння:

$$\varphi = \frac{C}{2\sqrt{1-C^2}} \ln \left| u + \sqrt{u^2-1} \right| + \frac{1}{2} \arcsin v - \frac{\pi}{4} \quad \text{при } C < 1;$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arcsin v - \frac{C}{2\sqrt{C^2-1}} \arcsin u + \frac{\pi}{4} \left( \frac{C}{\sqrt{C^2-1}} - 1 \right) \quad \text{при } C > 1,$$

де  $u = 2(1-C^2)\frac{r^2}{k^2} + 2C^2 - 1$ ;  $v = 1 - 2C^2(1 - \frac{k^2}{r^2})$ .

При  $C=1$  маємо особливий випадок. Розглянемо його окремо. Приймаючи  $C=1$  у вихідному диференціальному рівнянні, отримаємо:

$$d\varphi = \frac{1}{kr} \sqrt{r^2 - k^2} dr,$$

що після інтегрування і визначення постійної інтегрування з умови ( $r=r_0$ ,  $\varphi_0=0$ ) дає:

$$\varphi = \sqrt{\frac{r^2}{k^2} - 1} - \arccos \frac{k}{r}.$$

На практиці найчастіше зустрічаються випадки, коли початковою відносною швидкістю тіла можна знехтувати. У цих випадках  $k=r_0$ .

Постійну  $C$  можна знайти з граничної умови ( $\varphi_1$ ,  $r_1$ ). Однак спочатку слід визначити межі застосовуваності отриманих рівнянь. Досліджуючи отримані залежності, переконуємося, що кут  $\varphi$  зі збільшення  $r$  і  $C$  монотонно зростає. Тоді, використовуючи граничну умову ( $\varphi_1$ ,  $r_1$ ), одержимо

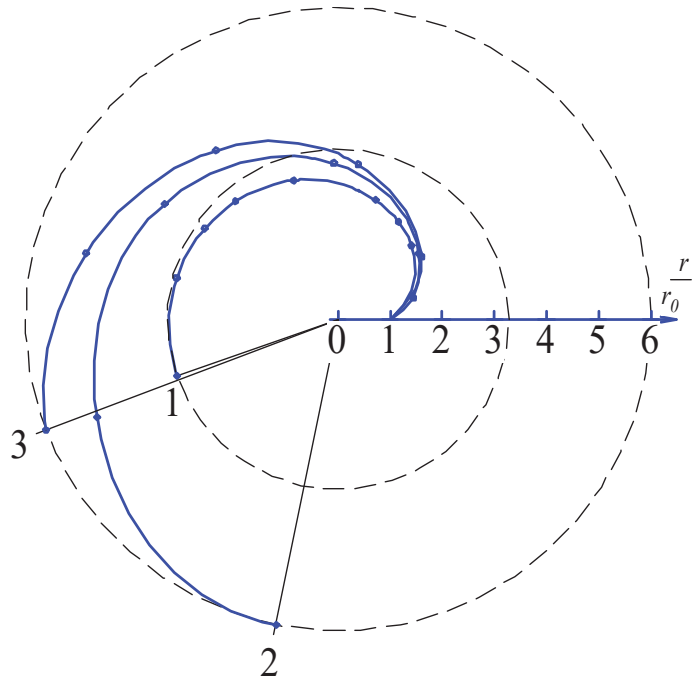
$$\varphi_{r=r_1} = \sqrt{\frac{r_1^2}{r_0^2} - 1} - \arccos \frac{r_0}{r_1}$$

і порівняємо отриману величину з  $\varphi_1$ . Якщо  $\varphi_1 < \varphi_{r=r_1}$ , необхідно застосовувати перше рівняння, що відповідає  $C < 1$ ; при  $\varphi_1 > \varphi_{r=r_1}$  дійсне друге рівняння ( $C > 1$ ) і, нарешті, при  $\varphi_1 = \varphi_{r=r_1}$  шуканим є третє рівняння, для якого  $C=1$ .

Друге рівняння має обмежену область застосування, обумовлену умовами існування  $\arcsin u$  та  $\arcsin v$ , з яких впливає  $r_1/r_0 \leq n$ , що після підстановки в рівняння  $\varphi = \varphi(r)$  й виключення постійної  $C$  дає

$$\varphi_1 \geq \frac{\pi}{2} \left( \frac{r_1}{r_0} - 1 \right).$$

На рис. 2, як приклад, побудовані брахістохрони, відповідні до граничних умов ( $r/r_0 = 1$ ;  $\varphi_0 = 0$ ) і



**Рис. 2. Приклад брахістохрон з різними значеннями постійних інтегрування:**

1 -  $C < 1$ ; 2 -  $C = 1$ ; 3 -  $C > 1$

I - ( $r/r_0 = 6$ ;  $\varphi_1 = 1,6\pi$ ),  $C = 0,976$ ; II - ( $r/r_0 = 6$ ),  $C = 1$ ;

III - ( $r/r_0 = 2,5$ ;  $\varphi_1 = 0,8\pi$ ),  $C = 1,091$ .

#### Висновок.

Отримані результати можуть бути корисними при профілюванні відцентрових розгінних пристроїв і лопатевих систем.

#### Список літератури:

1. Холін Б.Г., Тат'яниченко Б.Я. Способ центрифугирования зернистых материалов и фактор разделения, «Теоретические основы химической технологии», 1979, № 3, т. XIII.
2. Холін Б.Г., Тат'яниченко Б.Я. Брахістохрона в центробежном поле. «Известие Вузов. Машиностроение», №2. Изд-во МВТУ им. Баумана, М., 1982.
3. Семків О.М. Исследование движения частицы грунта по лопатке с профилем оптимальной формы в поле центробежных сил инерции / О.М. Семків, В.М. Шатохин, А.Н. Попова // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Технічна естетика і дизайн». - К.: КНУБА. - 2012. - Вип. 11. - С. 165-174.
4. Шатохин В.М. Удосконалення форми лопати роторного розкидача ґрунту для гасіння лісових пожеж / В.М. Шатохин, О.М. Семків, А.М. Попова. Збірник наукових праць ЛДУ БЖД. - Львів: ЛДУ БЖД. - 2012. - Вип. 21. - С. 188-194.
5. Шатохин В. М. Построение пространственных лопаток ґрунтометателя с помощью брахістохрон для поля центробежных сил инерции / В.М. Шатохин, О.М. Семків, А. Н. Попова // Энергоэффективность в будівництві та архітектурі. - Київ: КНУБА. - 2013. - Вип. 5 - С. 143-152.
6. Гладков С.О. К теории движения шарика по вращающейся брахістохроне с учетом сил трения / С.О. Гладков, С.Б. Богданова // Учен. зап. физ. фак-та Моск. ун-та. - Москва: Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет (МАИ)). - 2017. - Вип. №2.



СП 000



# ОРЕЛКОМПРЕССОРМАШ

Стационарные и передвижные,  
винтовые и поршневые  
компрессорные станции и установки

ПРОИЗВОДСТВО, ИНЖИНИРИНГ, СЕРВИСНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ

РОССИЯ, 302020  
г. Орел, ул. Цветаева, 1-б  
тел./факс: (4862) 421157,  
(4862) 421158  
[info@orelkompresormash.ru](mailto:info@orelkompresormash.ru)



... ударная волна  
высоких технологий