В. А. Тодчук канд. техн. наук, доц. (г. Харьков, Украина)

Устойчивость оболочек, пластин и стержней

На основе общей линейной теории тонкостенных оболочек, энергетическим методом теоретически определена зависимость осевых критических нагрузок цилиндрических оболочек, прямоугольных пластин и стержней от характеристик материалов, геометрических параметров и граничных условий.

Ключевые слова: *выпучивание, критическая нагрузка, перемещение, устойчивость, эксперимент, энергия.*

На основі загальної лінійної теорії тонкостінних оболонок, енергетичним методом теоретично визначена залежність осьових критичних навантажень циліндричних оболонок, прямокутних пластин і стрижнів від характеристик матеріалів, геометричних параметрів та граничних умов.

Ключові слова: *спучування; критичні зусилля; переміщення; стійкість; експеримент; енергія.*

On the basis of general linear theory of the thin-walled shells, dependence of critical axleloadings of cylindrical shells is certain) in theory a power method, rectangular plates and bars at an axial compression from descriptions of materials, geometrical parameters and scope terms.

Keywords: *goggling, critical loading, displacement, stability, experiment, energy.*

1. Постановка проблемы

Цилиндрические оболочки и пластины широко используются в инженерных сооружениях. Потеря устойчивости оболочек и пластин может привести к разрушению конструкции. Для оценки несущей способности инженерных сооружений необходимы точные формулы для расчета критических нагрузок оболочек и пластин при осевом сжатии. Такие формулы для оболочек еще не получены. Причина больших расхождений между теоретическими и экспериментальными значениями осевых критических нагрузок цилиндрических оболочек не обнаружена. В этой статье делается попытка решить эту проблему.

2. Анализ последних исследований и публикаций

Первые результаты исследования устойчивости конструкций были получены Л. Эйлером [1], Брайаном [2], Лоренцем [3] и С.П. Тимошенко [4].

Л. Эйлер получил формулу критической силы стержня, шарнирно опертого по концам. Брайан впервые решил задачу устойчивости шарнирно опертой пластинки, сжатой в одном направлении. Лоренц и С. П. Тимошенко в линейной постановке на основе статического критерия Л. Эйлера рассмотрели устойчивость шарнирно опертой круговой цилиндрической оболочки при осевом сжатии. Полученная в этих работах, величина критической нагрузки (ее называют верхней критической нагрузкой) не подтвердилась экспериментально. Наблюдаемые в экспериментах критические нагрузки существенно меньше верхних критических нагрузок.

Все дальнейшее развитие теории устойчивости оболочек было направлено на выявление причин этого расхождения. Однако проблема не решена и требует дальнейших исследований. Наиболее полно и детально различные направления исследований устойчивости оболочек, пластин и стержней изложены в [5, 6,7,8].

В работах [9,10] исследована устойчивость шарнирно опертого цилиндра при осевом сжатии с учетом изменения внешней нагрузки при выпучивании, где показано, что учет изменения внешнего усилия в момент потери устойчивости существенно влияет на величину его критической нагрузки.

Различие между классическим и предлагаемым подходами заключается в следующем:

- классический подход предполагает, что переход от прямолинейной к изогнутой форме равновесия происходит без изменения величины критического усилия сжатия N_*, т.е. при постоянной длине L образующих оболочки. При этом торцы оболочки получают некоторое смещение в осевом направлении, а усилие $N_* = const$ совершает дополнительную работу $\Delta A \neq 0$ на этих перемещениях;
- предлагаемый подход полагает, что при выпучивании *торцы оболочки остаются на месте.* Следовательно, образующие оболочки удлиняются, а это возможно, когда сжимающие усилия уменьшаются и становятся равными $N_* - N_1$. Дополнительная работа этих усилий равна нулю ($\Delta A = 0$), т. к. нет перемещений торцов. Выпучивание оболочки происходит не за счет работы внешней нагрузки на дополнительных перемещениях торцов оболочки (как предполагается при классическом решении задачи), а за счёт перераспределения внутренней энергии сжатия, накопленной в докритическом состоянии.

Особенность данной работы. Здесь продолжены исследования начатые в [9,10]. Рассмотрена устойчивость цилиндрических оболочек, прямоугольных пластин и стержней с *различными граничными условиями.*

3. Цель работы. Получить более точные математические зависимости для критических значений осевых сжимаемых нагрузок цилиндрических

оболочек и прямоугольных пластин с различными граничными условиями.

4.Метод исследования. Для решения задачи используются энергетический критерий устойчивости и соотношения общей линейной теории тонкостенных оболочек.

5. Решение проблемы

Устойчивость шарнирно опертой цилиндрической оболочки

Цилиндрическая оболочка длиной L, радиуса R, с толщиной стенок h, нагружена по краям равномерно распределёнными усилиями сжатия N.

Исходные предпосылки. Оболочка геометрически совершенна и идеально упругая, докритическое состояние – безмоментное, края - шарнирно опёрты.

Согласно [11], если оболочка имеет шарнирные, неподвижно опертые края, то граничные условия имеют вид: $u=0$, $v=0$, $w=0$, $M_1=0$. Здесь u, v, w – смещения точек срединной поверхности оболочки в направлении координат x, y, z; M_1 – изгибающий момент на краю оболочки.

Равенство $u=0$ означает, что при потере устойчивости расстояние между торцами оболочки не изменяется, т. к. сближение торцов за счет изгиба компенсируется продольными перемещениями за счет удлинения образующих. При этом: энергия сжатия уменьшается; внешняя нагрузка становится равной $N_* - N_1$ (N_1- изменение критической нагрузки в момент потери устойчивости), а приращение ее работы $\Delta A=0$.

Изменение энергии деформации оболочки при потере устойчивости

$$\Delta V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^{2\pi R}\int_0^L \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \dfrac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2 + \\ \dfrac{h^2}{12}[\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 2(1-\nu)\chi_{12}^2] \end{array} \right\} dxdy, \quad (1)$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{w}{R}; \varepsilon_{12} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y};$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y}; \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x};$$

E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала.

Зададим, отвечающие граничным условиям, смещения

$$v = f_2 \sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{ny}{R}; \quad w = f_3 \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{ny}{R}, \quad (2)$$

где f_2, f_3 - амплитуды смещений в направлении осей y и z.

Перемещение u найдем следующим образом. Пусть сумма, удлинения срединной поверхности единичного элемента оболочки в осевом направлении за счет растяжения и сближения его противоположных граней при изгибе, равна некоторой функции $f_1(x,y)$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = f_1(x,y). \quad (3)$$

Проинтегрировав выражение (3), получим

$$u = \int f_1(x,y)dx - \frac{1}{4}f_3^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(x + \frac{L}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{L}\right)\sin^2\frac{ny}{R}. \quad (4)$$

В соответствии с граничными условиями, $u(0) = u(L) = 0$, при этом $u(x,y) \neq 0$. Выполнение этого условия возможно если

$$\int f_1(x,y)dx = \frac{1}{4}f_3^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\left(x - \frac{L}{2m\pi}\sin\frac{2m\pi x}{L}\right)\sin^2\frac{ny}{R}. \quad (5)$$

Учтя (5), из (4) находим

$$u = -\frac{1}{4}f_3^2\frac{m\pi}{L}\sin 2\frac{m\pi x}{L}\sin^2\frac{ny}{R}. \quad (6)$$

Подставив (2), (6) и выполнив операции дифференцирования и интегрирования из (1) получаем:

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{3}{16}f_3^4\dfrac{\lambda^2}{R^2}\left(\lambda^2 + \dfrac{1-\nu}{6}n^2\right) + f_2^2\left[\dfrac{1-\nu}{2}\lambda^2 + n^2 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\left[2(1-\nu)\lambda^2 + n^2\right]\right] + \\ 2f_2f_3n\left[1 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\left[(2-\nu)\lambda^2 + n^2\right]\right] + f_3^2\left[1 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2(\lambda^2 + n^2)^2\right] \end{array} \right\} \quad (7)$$

Работа внешней нагрузки равна:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L \left(N_* - \frac{1}{2}N_1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dxdy. \quad (8)$$

Внешняя нагрузка N_1 численно равна внутренним усилиям T_1 в каждой точке каждого края оболочки

$$N_1 = T_1(0) = T_1(L) = -\frac{Eh}{2(1-\nu^2)}f_3^2\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\sin^2\frac{ny}{R}. \quad (9)$$

Из условия $\Delta A = 0$ находим

$$\frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{3}{16}f_3^4\frac{\lambda^4}{R^2} + N_* f_3^2\lambda^2 = 0; \quad \frac{3}{16}f_3^2\frac{\lambda^2}{R^2} = -\frac{1-\nu^2}{Eh}N_*. \quad (10)$$

С учетом (7) и (10) находим $\Delta U = \Delta V - \Delta A$

$$\Delta U = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{ \begin{array}{l} f_2^2\left[\dfrac{1-\nu}{2}\lambda^2 + n^2 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\left[2(1-\nu)\lambda^2 + n^2\right]\right] + 2f_2f_3n\left[1 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\left[(2-\nu)\lambda^2 + n^2\right]\right] + \\ + f_3^2\left[1 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\left(\lambda^2 + n^2\right)^2 - \dfrac{1-\nu^2}{Eh}N_*\left(\lambda^2 + \dfrac{1-\nu}{6}n^2\right)\right] \end{array} \right\}\frac{\pi L}{4R}. \quad (11)$$

N_* получаем из условия минимума потенциальной энергии по перемещениям $\dfrac{\partial \Delta U}{\partial f_2} = 0$; $\dfrac{\partial \Delta U}{\partial f_3} = 0$.

$$N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2}\frac{1}{\lambda^2 + \dfrac{1-\nu}{6}n^2}\left\{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2(\lambda^2 + n^2)^2 - \frac{n^2\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2\left[(2-\nu)\lambda^2 + n^2\right]\right]^2}{\dfrac{1-\nu}{2}\lambda^2 + n^2 + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\left[2(1-\nu)\lambda^2 + n^2\right]}\right\}; \quad \bar{N}_* = \frac{N_*}{N_*^{в}}, \quad (12)$$


ПУБЛИЧНОЕ
АКЦИОНЕРНОЕ
ОБЩЕСТВО
Глуховский завод
"ЭЛЕКТРОПАНЕЛЬ"
СОВРЕМЕННАЯ ТЕХНИКА
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ОТРАСЛЕЙ
НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА.
Качественно. Надежно. Долговечно.
ELPA
BUREAU VERITAS
Certification
ISO 9001
УКРАИНА, 41400, Сумская обл.
г. Глухов, ул. Индустриальная, 7
тел.: +38 /05444/ 222 27; факс: +38 /05444/ 228 29
e-mail: elpa-info@nicmas.com.ua

где $N_*^в = \dfrac{Eh^2}{R\sqrt{3\left(1-\nu^2\right)}}$.

На рис.1 представлены результаты минимизации выражения (12) по m и n когда $\nu = 0,3$.

Вычисленные критические значения осевой сжимающей нагрузки N_* близкие к экспериментальным данным, приведенным в [6].

Жестко заделанная оболочка

Если края оболочки жестко заделаны, то граничные условия требуют, чтобы $u=v=w=0$ и $\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$.

Смещения v и w, отвечающие граничным условиям, зададим в виде

$$v = f_2 \sin^2 \frac{\pi m x}{L} \cos \frac{ny}{R}, \quad w = f_3 \sin^2 \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{ny}{R}. \qquad (13)$$

Перемещения из-за удлинения образующих u находим также как в предыдущем параграфе, но с учетом того, что они должны быть отрицательными, т. к. компенсируют положительные перемещения за счет изгиба:

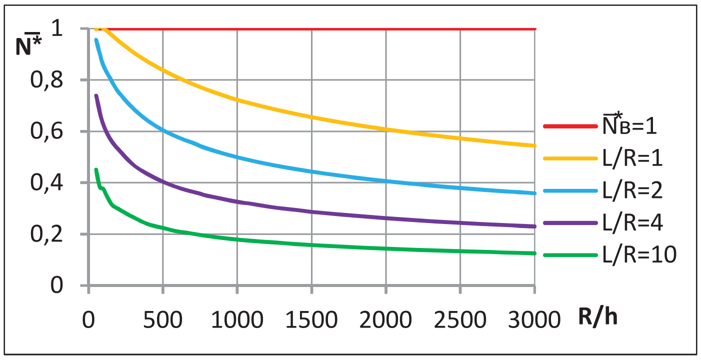

Рис. 1. Зависимость $\overline{N_*}$ от изменения отношений L/R и R/h шарнирно опертой цилиндрической оболочки

$$u = -\frac{1}{8} f_3^2 \frac{\pi m}{L} \sin 4\frac{\pi m x}{L} \sin^2 \frac{ny}{R}. \qquad (14)$$

После подстановки выражений (13) и (14) в (1) и (8) и выполнения таких же операций как в предыдущем параграфе, получаем:

$$N_*^3 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\,\frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{24}n^2}\left\{\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right)\left[4\lambda^2+2\lambda^2 n^2+\frac{3}{4}n^4\right] - \frac{n^2\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2\left[(2-\nu)\lambda^2+\frac{3}{4}n^2\right]\right]^2}{\frac{1-\nu}{2}\lambda^2+\frac{3}{4}n^2+\frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2\left[2(1-\nu)\lambda^2+\frac{3}{4}n^2\right]}\right\};\quad \overline{N}_*^3 = \frac{N_*^3}{N_*^в}. \qquad (15)$$

Результаты минимизации выражения (15) приведены на рис. 2.

Устойчивость прямоугольных пластин, равномерно сжатых в осевом направлении

Пластина со сторонами a, b и толщиной h сжата в срединной плоскости усилиями N, равномерно распределёнными по сторонам $x = 0$ и $x = a$.

Шарнирно опертые пластины по всем кромкам

В этом случае граничные условия на краях должны быть: при $x=0$ и $x=a$ – $u=0$; $v=0$; $w=0$; $M_1=0$; при $y=0$ и $y=b$ – $u=0$; $v=0$; $w=0$; $M_2=0$.

Граничные условия удовлетворяются, если выбрать выражение нормального прогиба в виде

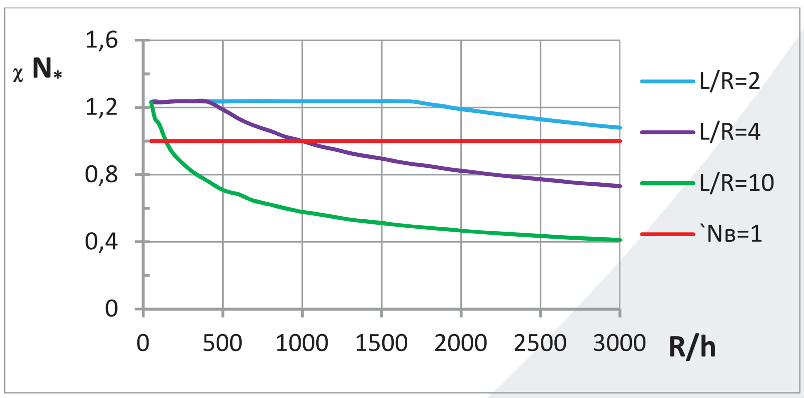

Рис. 2. Зависимость $\overline{N_*}$ от изменения отношений L/R и R/h жестко заделанной цилиндрической оболочки

$$w = f_3 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \qquad (16)$$

Взаимное смещение точек пластины по оси x определим аналогично

оболочке, используя выражение (3) и граничные условия $u(0) = u(a) = 0$:

$$u = -\frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{a} \sin 2\frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b}, \qquad (17)$$

а по оси y - смещение v находим аналогично, используя граничные условия $v(0) = v(b) = 0$, однако амплитудное значение f_2 задаем произвольно, т.к. края $v(0)$ и $v(b)$ не нагружены, а жесткая связь с f_3 справедлива только при наличии внешней нагрузки на краях:

$$v = f_2 \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin 2\frac{n\pi y}{b}. \qquad (18)$$

Энергия деформации пластины

$$\Delta V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \int_0^b \int_0^a \left\{ \varepsilon_1^2 + 2\nu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2 + \frac{1-\nu}{2}\varepsilon_{12}^2 + \frac{h^2}{12}\left[\chi_1^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + \chi_2^2 + 2(1-\nu)\chi_{12}^2\right] \right\} dxdy, \qquad (19)$$

где $\varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}$; $\varepsilon_{12} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}$;

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\ \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};\ \chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Из (19) получаем

$$\Delta V=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\frac{3}{16}f_3^4\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\frac{1-\nu}{6}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]+f_2^2\left[\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+3\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]-f_2f_3^2\frac{1+\nu}{4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)+f_3^2\frac{h^2}{12}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2\right\}\frac{ab}{8}. \quad (20)$$

Работа, произведенная сжимающими усилиями при выпучивании пластины

$$\Delta A=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a\left(N_*-\frac{1}{2}N_1\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2dxdy=$$
$$=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{3}{16}f_3^4\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+\frac{1-\nu^2}{Eh}N_*f_3^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right]\frac{ab}{8}, \quad (21)$$

где учтено $N_1=-\dfrac{Eh}{2\left(1-\nu^2\right)}f_3^2\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2\sin^2\dfrac{n\pi y}{b}$.

Из $\Delta A=0$ находим $\dfrac{3}{16}f_3^4\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2=-\dfrac{1-\nu^2}{Eh}N_*$. (22)

Выражение для ΔU принимает вид

$$\Delta U=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left\{\begin{array}{l}f_2^2\left[\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+3\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]-f_2f_3^2\frac{1+\nu}{4}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)+\\+f_3^2\left(-\frac{1-\nu^2}{Eh}N_*\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\frac{1-\nu}{6}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]+\frac{h^2}{12}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2\right)\end{array}\right\}\frac{ab}{8}. \quad (23)$$

Из условий $\dfrac{\partial\Delta U}{\partial f_2}=0$; $\dfrac{\partial\Delta U}{\partial f_3}=0$ получаем

$$N_*=D\pi^2\frac{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\frac{1-\nu}{6}\left(\frac{n}{b}\right)^2-\frac{(1+\nu)^2\left(\frac{m}{a}\right)^2\left(\frac{n}{b}\right)^2}{12\left[\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{m}{a}\right)^2+3\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}},$$

где $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$. (24)

Анализируя выражение (25), видим, что наименьшее значение N_* будет получено, если n = 1, так как с увеличением n числитель возрастает намного быстрее знаменателя. Таким образом, выражение для критического значения сжимающей нагрузки шарнирно опёртой пластины получает вид:

$$N_*=\frac{\pi^2D}{b^2}\frac{\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{mb}\right)^2\right]^2}{1+\frac{1-\nu}{6}\left(\frac{a}{mb}\right)^2-\frac{(1+\nu)^2}{12\left[\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{mb}{a}\right)^2+3\right]}}=k_1\frac{\pi^2D}{b^2}. \quad (25)$$

На рис. 3. представлены результаты расчетов коэффициентов k_1 и k при ν = 0,3 (k - коэффициент, полученный Брайаном), которые показывают, что формула (25) более точно описывает процесс выпучивания шарнирно опертой пластины, т. к. энергетический метод дает приближение сверху, а результаты расчетов ниже.

В данном случае граничные условия на краях должны быть: при $x=0$ и $x=a$ – $u=0$; $v=0$; $w=0$ и $\dfrac{\partial w}{\partial x}=0$; при $y=0$ и $y=b$ – $u=0$; $v=0$; $w=0$ и момент $M_2=0$.

Эти граничные условия удовлетворяются, если

$$w=f_3\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b};\quad v=f_2\sin^4\frac{m\pi x}{a}\sin2\frac{n\pi y}{b};$$

$$u=-\frac{1}{8}f_3^2\frac{m\pi}{a}\sin4\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}. \quad (26)$$

Аналогично выше рассмотренному получаем

$$N_*=\frac{\pi^2D}{b^2}\frac{4\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{mb}\right)^2+2}{1+\frac{1-\nu}{24}\left(\frac{a}{mb}\right)^2-\frac{(1+\nu)^2}{60\left[2(1-\nu)\left(\frac{mb}{a}\right)^2+7\right]}}=k_2\frac{\pi^2D}{b^2}. \quad (27)$$

При решении задачи энергетическим методом, но традиционным способом, когда потенциальная энергия изгиба приравнивается работе внешних сил и не учитывается изменение внешней нагрузки при выпучивании пластины, получаем:

$$N_*=\frac{\pi^2D}{b^2}\left[4\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\frac{a}{mb}\right)^2+2\right]=k_{21}\frac{\pi^2D}{b^2}. \quad (28)$$

На рис.4. представлены результаты расчетов коэффициентов k_2 и k_{21} при ν=0,3. Из графиков видно, что приведенное решение дает критические нагрузки ниже полученных путем приравнивания энергии изгиба работе внешних сил. Максимальная погрешность составляет 12,5%.

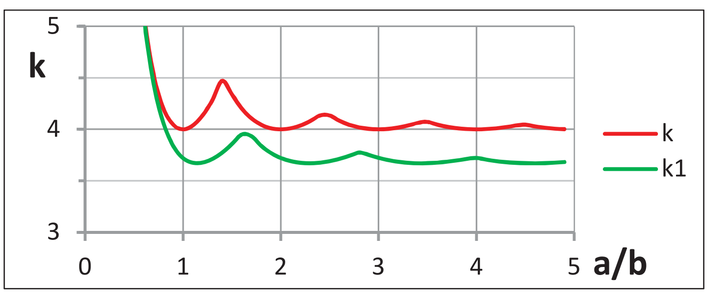

Рис. 3. Графики изменения коэффициентов k_1 и k

Сравнение полученных результатов с решением [5] на основе дифференциального уравнения изгиба жест-

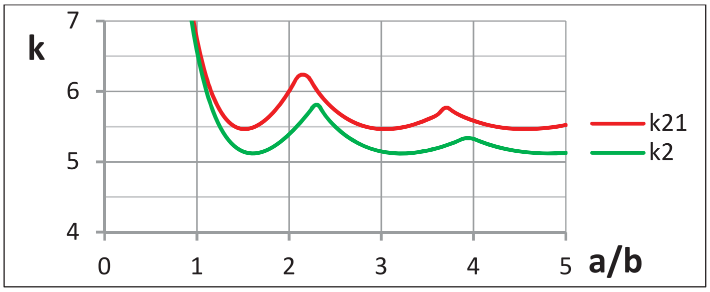

Рис. 4. Графики изменения коэффициентов k_2 и k_{21}

ких пластинок, показывает, что они ниже для коротких пластинок и выше для пластинок с $a/b > 2$.

Пластина с нагруженными шарнирно опертыми и ненагруженными защемленными краями

В этом случае граничные условия на краях должны быть: при $x=0$ и $x=a$ – $u=0; v=0; w=0$ и момент $M_1=0$; при $y=0$ и $y=b$ – $u=0; v=0; w=0$ и $\frac{\partial w}{\partial y}=0$. Эти граничные условия удовлетворяются, если

$$w = f_3 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b};\quad v = f_2\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin 4\frac{n\pi y}{b};$$

$$u = -\frac{1}{4}f_3^2\frac{m\pi}{a}\sin 2\frac{m\pi x}{a}\sin^4\frac{n\pi y}{b}. \qquad (29)$$

$$N_* = \frac{\pi^2 D}{b^2}\frac{\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\frac{16}{3}\left(\frac{a}{mb}\right)^2+\frac{8}{3}}{1+\frac{2(1-\nu)}{7}\left(\frac{a}{mb}\right)^2-\frac{(1+\nu)^2}{35\left[\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{mb}{a}\right)^2+12\right]}} = k_3\frac{\pi^2 D}{b^2}. \qquad (30)$$

При не учете изменения внешней нагрузки и приравнивании потенциальной энергии изгиба работе внешних сил приводит к следующим результатам

$$N_* = \frac{\pi^2 D}{b^2}\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\frac{16}{3}\left(\frac{a}{mb}\right)^2+\frac{8}{3}\right] = k_{31}\frac{\pi^2 D}{b^2}. \qquad (31)$$

На рис. 5 представлены результаты расчетов коэффициентов k_3 и k_{31} при $\nu=0{,}3$.

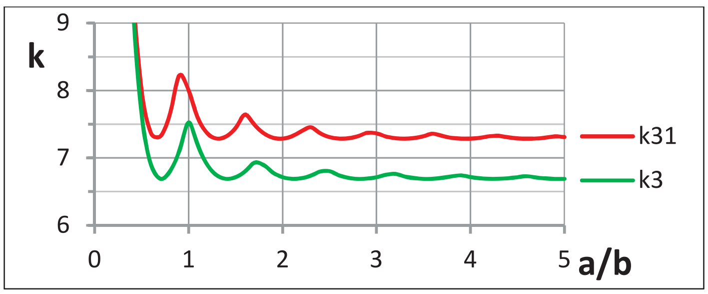

Рис. 5. Графики изменения коэффициентов k_3 и k_{31}

Найденные критические нагрузки ниже критических нагрузок, полученных из решения энергетическим методом без учета изменения внешней нагрузки и путем решения дифференциального уравнения изгиба жесткой пластины. Максимальная погрешность составляет 15,8% и 10,3% соответственно.

Для практических расчетов пластин с отношением сторон $a/b \geq 0{,}7$ можно рекомендовать формулу:

$$N_* = 6{,}9\,\pi^2 D/b^2. \qquad (32)$$

Пластина жестко защемлена по всем кромкам

В этом случае граничные условия имеют вид:

при $x=0$ и $x=a$ – $u=0; v=0; w=0; \frac{\partial w}{\partial x}=0$; при $y=0$ и $y=b$ – $u=0; v=0; w=0; \frac{\partial w}{\partial y}=0$.

Они удовлетворяются если

$$w = f_3\sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b};\quad v = f_2\sin^4\frac{m\pi x}{a}\sin 4\frac{n\pi y}{b};$$

$$u = -\frac{1}{8}f_3^2\frac{m\pi}{a}\sin 4\frac{m\pi x}{a}\sin^4\frac{n\pi y}{b}. \qquad (33)$$

$$N_* = \frac{\pi^2 D}{b^2}\frac{4\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{mb}\right)^2+\frac{2}{3}\right]}{1+\frac{1-\nu}{14}\left(\frac{a}{mb}\right)^2-\frac{(1+\nu)^2}{4900\left[1+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{mb}{a}\right)^2\right]}} = k_4\frac{\pi^2 D}{b^2}. \qquad (34)$$

При решении энергетическим методом, без учета изменения внешней нагрузки при выпучивании пластины, получаем

$$N_* = \frac{\pi^2 D}{b^2}4\left[\left(\frac{mb}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{mb}\right)^2+\frac{2}{3}\right] = k_{41}\frac{\pi^2 D}{b^2}. \qquad (35)$$

На рис. 6 представлены результаты расчетов коэффициентов k_4 и k_{41} при $\nu = 0{,}3$

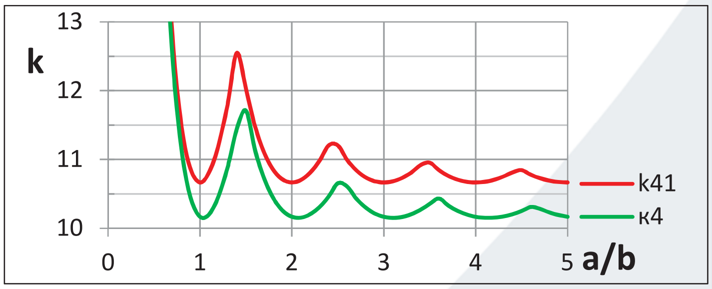

Рис. 6. Графики изменения коэффициентов k_4 и k_{41}

Полученное решение дает критические нагрузки ниже критических нагрузок, полученных путем приравнивания энергии изгиба работе внешних сил (максимальная погрешность составляет 9,7%) и больше по сравнению с решением на основе дифференциального уравнения изгиба жестких пластинок.

Вывод: предложенный подход даёт хорошие результаты и при решении задач устойчивости пластин.

Шарнирно опертый стержень, нагруженный силой *P*

$$u = -\frac{1}{4}f^2\frac{m\pi}{L}\sin 2\frac{m\pi x}{L};\quad w = f\sin\frac{m\pi x}{L};\quad P_* = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EJ. \qquad (36)$$

Формула (37) полностью совпадает с формулой Эйлера.

Жестко заделанный стержень

$$u = -\frac{1}{8}f^2\frac{m\pi}{L}\sin 4\frac{m\pi x}{L};\; w = f\sin^2\frac{m\pi x}{L};$$

$$P_* = 4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EJ \ . \qquad (37)$$

Формула (37) полностью совпадает с решениями полученными другими авторами, что подтверждает правомочность предложенного подхода и в этом случае.

6. Основные результаты

1.Получены новые формулы, позволяющие вычислять теоретические значения критических нагрузок цилиндрических оболочек и прямоугольных пластин близкие к экспериментальным данным.

2. Установлена зависимость относительных критических значений осевой сжимающей нагрузки $\overline{N}_*$ оболочек и от отношения радиуса оболочки к ее толщине R/h, и отношения длины оболочки к ее радиусу L/R (при решении в классической постановке $\overline{N}_* = 1$.

3. Показана большая зависимость осевых критических нагрузок цилиндрических оболочек от граничных условий.

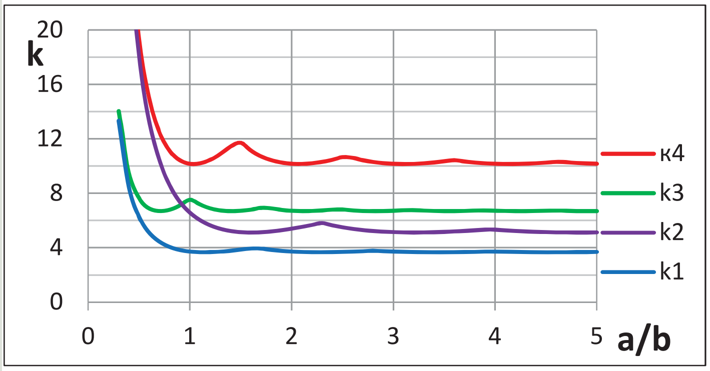

Рис. 7. Итоговый график изменения коэффициентов k_1, k_2, k_3, k_4

7. Выводы

1. Полученные формулы можно использовать для вычисления осевых критических нагрузок оболочек и пластин.

2. Предлагаемый подход может приблизить исследователей к решению проблемы устойчивости и несущей способности в целом инженерных конструкций.

Список літератури:

1. Euler l., (1744), Methodus inveniendi lineas curvas…, Lausanne et Geneve, Additamentum 1: De cursives elasticis, p. 267.

2. G. H. Bryan, „Proc. London Math. Soc.", 1891, vol. 22, pp. 54.

3. Lorenz R. (1911), Die nicht assensymmetrische Knickung dunnwandiger Hohlzulinder. Zeitschrift, Bd 12, Nr. 7, SS. 241-260.

4. Тимошенко С. П. (1914), К вопросу о деформации и устойчивости цилиндрической оболочки. Вестн. о-ва технол., т. 21 с. 785 – 792; Изв. Петрогр. элекротехн. ин-та, 1914, т. 11, с. 267 – 287.

5. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / Арнольд Сергеевич Вольмир. М.,Наука, 1976. - 984с.

6. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек./ Э. И. Григолюк, В. В.Кабанов. М. Наука, 1978. -359с.-

7. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем / Степан Прокофьевич Тимошенко. ОГИЗ – Гостехиздат, 1946. -532с-

8.Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. / Степан Прокофьевич Тимошенко. М., Наука, 1971.- 807с.-

9. В. А. Тодчук Об одном подходе к решению задачи устойчивости цилиндра при осевом сжатии / Вестник петровской академии № 2-3 (27-28), Санкт-Петербург 2012. -166с.

10. В. А. Тодчук Об одном подходе к определению критических нагрузок оболочек, пластин и стержней. Материалы XVIII международной научно – технической конференции [Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта], (Київ, 29 червня – 1 липня 2017р.)/ КПУ; 2017. – 384с.

11. В.В. Новожилов Теория тонких оболочек / Валентин Валентинович Новожилов Л. Судпромгиз, 1962 - 431с.


СП ООО
ОРЕЛКОМПРЕССОРМАШ
Стационарные и передвижные, винтовые и поршневые компрессорные станции и установки
ПРОИЗВОДСТВО, ИНЖИНИРИНГ, СЕРВИСНОЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ
РОССИЯ, 302020
г. Орел, ул. Цветаева, 1- б
тел./факс: (4862) 421157, (4862) 421158
info@orelkompressormash.ru
ОРЕЛКОМПРЕССОРМАШ
... ударная волна высоких технологий