

УДК 539.3

К.Я. Бортник

Луцький національний технічний університет

**АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ У АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПІВНЕСКІНЧЕНОЮ І ОБМЕЖЕНИМИ ТРІЩИНАМИ**

*Розроблено алгоритм розрахунку напружено-деформованого стану анізотропних пластинок із півнескінченною тріщиною та тріщинами.*

**Ключові слова:** анізотропія, пластинка, тріщина, напруження, коефіцієнти інтенсивності напружень.

**Форм. 11. Табл. 6. Рис. 1. Літ. 6**

У механіці руйнування приймають, що на початковій стадії процесу руйнування тріщина підростає вздовж прямої. Тому важливе значення має задача про визначення напружень біля тріщини, коли відношення довжини бічної тріщини до включення є нескінченно малим. Така задача детально вивчена для ізотропних матеріалів [4-6], причому її розв'язування проведено головним чином на основі розгляду тріщин скінченної довжини із наступним числовим переходом до границі.

**Постановка задачі.** Нехай пружна анізотропна пластинка займає область  $D$ , що лежить поза півнескінченим розрізом  $x > 0$ . Прийемо, що пластинка додатково послаблена тріщиною, яка лежить на контурі  $L$ . Розглянемо випадок, коли пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності та зосереджених сил. Розв'язок побудовано на основі методу інтегральних рівнянь, ядрами в яких є розв'язки типу Гріна допоміжної задачі теорії пружності. При цьому задані умови на прямолінійній півнескінченній тріщині задовольняються автоматично, що дозволяє спростити розв'язування конкретних задач та підвищити точність розрахунків.

**Загальний розв'язок задачі теорії пружності для багатозв'язних анізотропних пластинок з тріщинами.** Наведемо основні співвідношення плоскої анізотропної задачі теорії пружності, які далі будуть використовуватись. Розглянемо довільну криву  $\Gamma$ , яка лежить в області  $D$ , що займає пластинка та виберемо на ній додатній напрямок обходу. Введемо вектор  $\vec{S}_\Gamma$  на дотичній до кривої площинці, нормаль до якої розміщена справа відносно вибраного напрямку обходу. Проекції  $(X_\Gamma, Y_\Gamma)$  вектора  $\vec{S}_\Gamma$  і похідні від переміщень  $(u, v)$  за дуговою координатою на кривій через комплексні потенціали Лехніцького визначаються за формулами [1,2]

$$Y_\Gamma = -2 \operatorname{Re} [\Phi(z_1) z_1' + \Psi(z_2) z_2'], \quad X_\Gamma = 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi(z_1) z_1' + s_2 \Psi(z_2) z_2'],$$

$$u' = 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi(z_1) z_1' + p_2 \Psi(z_2) z_2'], \quad v' = 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi(z_1) z_1' + q_2 \Psi(z_2) z_2'],$$

де  $z_j = x + s_j y$ ,  $u' = du / ds$ ,  $v' = dv / ds$ ,  $z_j' = dx / ds + s_j dy / ds$ ,  $p_j = a_{11} s_j^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16} s_j$ ,

$q_j = \alpha_{12} s_j + \alpha_{22} / s_j - \alpha_{26}$ ,  $j = 1, 2$ ;  $ds$  – диференціал дуги на  $\Gamma$ ;  $s_j$  – корені характеристичного рівняння;  $\alpha_{ij}$  – пружні сталі, які входять у закон Гука.

Далі введемо в розгляд вектор напружень  $q_\Gamma(z) = X_\Gamma + iY_\Gamma$  на кривій  $\Gamma$ , який з використанням формул (1), визначається за формулою

$$q_\Gamma = (s_1 - i) z_1' \Phi(z_1) + \overline{(s_1 - i) z_1'} \overline{\Phi(z_1)} + (s_2 - i) z_2' \Psi(z_2) + \overline{(s_2 - i) z_2'} \overline{\Psi(z_2)} \quad (1)$$

Між потенціалами та напруженнями і похідними від переміщень на кривій  $\Gamma$  справедливі взаємозв'язки [2]

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1 u' + p_1 X_\Gamma + q_1 Y_\Gamma}{\Delta_1 z_1'}, \quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2 u' + p_2 X_\Gamma + q_2 Y_\Gamma}{\Delta_2 z_2'}$$

де  $\Delta_1 = \alpha_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - \overline{s_1})(s_1 - \overline{s_2})$ ,  $\Delta_2 = \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_2 - \overline{s_1})(s_2 - \overline{s_2})$ .

**Інтегральні рівняння задачі для пластинки відносно стрибків переміщень.** Побудуємо

інтегральні рівняння для даної пластинки з тріщинами так, щоби умови на межі області  $D$  (на півнескінченному розрізі) виконувались автоматично. З цією метою спочатку побудуємо комплексні потенціали Лехніцького  $\Phi_j^D, \Psi_j^D$  ( $j=1, 2$ ), які є розв'язком задачі теорії пружності для області  $D$  з вільною від навантаження межею, за умови, що ці функції мають наступні особливості

$$\Phi_j^D \sim \frac{A_j}{z_{10} - z_1}, \Psi_j^D \sim \frac{B_j}{z_{20} - z_2}, \quad (2)$$

де  $z_{10} = x_0 + s_1 y_0, z_{20} = x_0 + s_2 y_0, (x_0, y_0) \in D,$

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2},$$

Позначимо ці потенціали  $\Phi_j^D(z_1, T), \Psi_j^D(z_2, T)$ , де  $T$  – точка з координатами  $(x_0, y_0)$ .

На основі [2,3] для цього випадку для потенціалів Лехніцького маємо інтегральні зображення

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \int_L [\Phi_1^D(z_1, T)g_1'(s) + \Phi_2^D(z_1, T)g_2'(s)]ds + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \int_L [\Psi_1^D(z_2, T)g_1'(s) + \Psi_2^D(z_2, T)g_2'(s)]ds + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (3)$$

де  $g_j' = dg_j/ds, g_1 = u^+ - u^-, g_2 = v^+ - v^-, u^\pm, v^\pm$  – граничні значення переміщень при підході до розрізу зліва і справа відносно вибраного напрямку;  $\Phi_D(z_1) = \Phi_D^P(z_1) + \Phi_D^\infty(z_1), \Psi_D(z_2) = \Psi_D^P(z_2) + \Psi_D^\infty(z_2)$ ,  $T$  – точка  $(\xi, \eta)$ , за якою проводиться інтегрування. Тут потенціали  $\Phi_D^\infty, \Psi_D^\infty$  та  $\Phi_D^P, \Psi_D^P$  – розв'язки задач теорії пружності для області  $D$  з однорідними умовами на межі при дії прикладених до пластинки на нескінченності зусиль або зосереджених сил відповідно.

Інтегральні рівняння для знаходження функцій  $g_1'(s), g_2'(s)$  у випадку тріщин отримуємо після підстановки (3) в граничні умови за використання формули Сохоцького при граничному переході у вигляді

$$\int_\Gamma [g_1'(s)Q_1(Z, T) + g_2'(s)Q_2(Z, T)]ds = Q(Z), Z \in L, \quad (4)$$

де  $Q(Z) = Q_T(Z) - Q_D(Z); Q_j(Z, T)$  – вектор напружень  $q_L$  в точці  $Z$  з координатами  $(x, y)$  на кривій  $L$ , який визначається за формулою (3) через комплексні потенціали  $\Phi_j^D(z_1, T), \Psi_j^D(z_2, T)$ ;  $T$  – точка з координатами  $(\xi, \eta)$ ;  $Q_D(Z)$  – вектор напружень, відповідний потенціалам  $\Phi_D(z_1), \Psi_D(z_2)$ .

Система алгебраїчних рівнянь, відповідна інтегральним рівнянням (4), будується методом механічних квадратур [1].

**Побудова допоміжних (дислокаційних) розв'язків.** Розглянемо задачу знаходження функцій  $\Phi_j^D(z_1, M), \Psi_j^D(z_2, M)$ , де  $M$  – точка  $(x_0, y_0) \in D, D$  – область, яку займає пластинка поза включенням. Для їх знаходження введемо комплексні потенціали  $\Phi_0(z_1), \Psi_0(z_2)$  для області  $D$ , за умови, що ці функції мають наступні особливості

$$\Phi_0(z_1) \sim \frac{A}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_0(z_2) \sim \frac{B}{z_2 - z_{20}}, \quad (5)$$

та відповідні їм напруження на берегах півнескінченної тріщини рівні нулю. Тут  $A, B$  – довільні комплексні сталі;  $z_{j0} = x_0 + s_j y_0$ . За побудованих таким чином потенціалів дислокаційні розв'язки будуть

$$\Phi_j^D(z_1, M) = -\Phi_0(z_1)|_{A=A_j, B=B_j}, \quad \Psi_j^D(z_2, M) = -\Psi_0(z_2)|_{A=A_j, B=B_j}.$$

Для побудови розв'язку типу Гріна задачі теорії пружності для напівнескінченного включення  $x > 0$  використаємо комплексні потенціали для пластинки з еліптичним жорстким включенням із півосями  $a, b$  та центром в т.  $(a, 0)$  [1]. Після граничного переходу  $a \Rightarrow \infty$  отримуємо комплексні потенціали для півнескінченного включення  $x > 0, y = 0$  у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{1}{2\sqrt{z}} \left[ \frac{A}{\sqrt{z} - \zeta_1} + \alpha_1 \frac{\bar{A}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_1} + \beta_1 \frac{\bar{B}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_2} \right], \\ \Psi_0(z) &= \frac{1}{2\sqrt{z}} \left[ \frac{B}{\sqrt{z} - \zeta_2} + \alpha_2 \frac{\bar{A}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_1} + \beta_2 \frac{\bar{B}}{\sqrt{z} - \bar{\zeta}_2} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\zeta_j = \sqrt{z_{j0}}$ ;  $\text{Im} \zeta_j > 0$ ;  $\text{Im} \sqrt{z} > 0$ .

$$\text{Тут } \alpha_1 = \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\Delta_1}, \quad \beta_1 = \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\Delta_1}, \quad \beta_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_2}{\Delta_1}, \quad \alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = s_2 - s_1$$

Чисельний розв'язок ГР проводився з умови обмеженості напружень у точках виходу тріщини з вершини включення.

**Результати розрахунків.** В механіці руйнування приймають, що в процесі руйнування на окремих елементарних етапах тріщина підростає вздовж прямої. Тому важливе значення має задача про визначення напружень біля тріщини, коли відношення довжини бічної частини тріщини до основної є нескінченно малою. Для моделювання такої задачі доцільно розглянути тріщину, що складається із двох ланок: півнескінченної  $x > 0$  та прямолінійної, довжиною  $l$ , яка нахилена під кутом  $\theta$  до від'ємної півосі  $Ox$ . Прийемо, що відомі КІН для півнескінченної тріщини (рис.1), які позначимо через  $K_I^0, K_{II}^0$ .

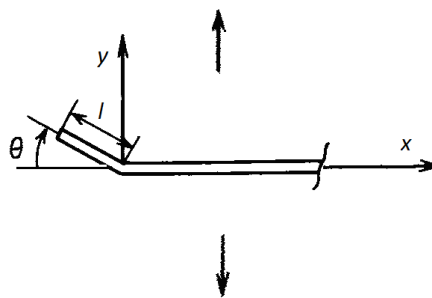


Рис.1. Схема задачі

Тоді коефіцієнти інтенсивності напружень для вершини нахиленої ланки у випадку ізотропної пластинки зображають у вигляді [5,6]

$$K_I = C_{11}(\theta) K_I^0 + C_{12}(\theta) K_{II}^0, \quad K_{II} = C_{21}(\theta) K_I^0 + C_{22}(\theta) K_{II}^0. \quad (7)$$

Для випадку анізотропної пластинки цю формулу запишемо у вигляді

$$K_I = C_{11}(\varphi, \theta)K_I^0 + C_{12}(\varphi, \theta)K_{II}^0, K_{II} = C_{21}(\varphi, \theta)K_I^0 + C_{22}(\varphi, \theta)K_{II}^0, \quad (8)$$

де  $\varphi$  – кут між напрямком з мінімальною жорсткістю матеріалу і основною тріщиною.

Позначимо для пластинки із основною тріщиною через  $K_{I\theta}^0(\varphi, \theta), K_{II\theta}^0(\varphi, \theta)$  КІН, які пов'язані із напруженнями на нахилених під кутом  $\theta$  площинках співвідношеннями

$$\sigma_\theta = \frac{K_{I\theta}^0(\varphi, \theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \tau_{r\theta} = \frac{K_{II\theta}^0(\varphi, \theta)}{\sqrt{2\pi r}}, \quad (9)$$

де  $\varphi$  – кут нахилу дотичної у вершині тріщини до осі  $Ox$ .

Проведені розрахунки показали, що КІН  $K_I, K_{II}$  для дволанкової тріщини є близькі до КІН  $K_{I\theta}, K_{II\theta}$  для основної тріщини на нахилених площинках. В зв'язку з цим запишемо

$$C_{ij} = K_{ij}^0 + \Delta C_{ij}, \quad (10)$$

де  $K_{11}^0, K_{12}^0$  і  $K_{21}^0, K_{22}^0$  дорівнюють величинам  $K_{I\theta}^0(\varphi, \theta), K_{II\theta}^0(\varphi, \theta)$  при  $K_I^0 = 1, K_{II}^0 = 0$  та  $K_I^0 = 0, K_{II}^0 = 1$  відповідно.

Поправкові члени  $\Delta C_{ij}$  визначались числово. Для цього знаходились КІН методом інтегральних рівнянь, а далі отримані дані описувались аналітично з використанням методу найменших квадратів. В результаті ці величини при  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  та заданих значеннях кута  $\varphi$  записано у вигляді

$$\Delta C_{ij} = p_0 x^4 + p_1 x^2 + p_2, \quad (11)$$

де  $x = \theta / 90^\circ$ .

Для матеріалу ЕФ значення коефіцієнтів у формулі (11) при різних значеннях кута  $\varphi$  наведено в таблицях 1а, 1б.

Таблиця 1а. Коефіцієнти формули (11) для матеріалу ЕФ

$\varphi, ^\circ$	$\Delta C_{11}$			$\Delta C_{12}$		
	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
0	0,0064	0,0094	-0,0004	0,0585	0,0719	-0,0014
10	0,0055	0,0073	-0,0003	0,0489	0,0846	-0,0019
20	0,0051	0,0045	-0,0002	0,0489	0,0834	-0,0023
30	0,0042	0,0027	-0,0002	0,0553	0,0712	-0,0022
40	0,0032	0,0018	-0,0002	0,0620	0,0561	-0,0018
50	0,0020	0,0022	-0,0002	0,0658	0,0445	-0,0013
60	0,0013	0,0034	-0,0002	0,0644	0,0418	-0,0010
70	0,0015	0,0058	-0,0003	0,0577	0,0516	-0,0010
80	0,0024	0,0105	-0,0005	0,0462	0,0772	-0,0014
90	0,0030	0,0193	-0,0006	0,0328	0,1142	-0,0022

Таблиця 1б. Коефіцієнти формули (11) для матеріалу ЕФ

$\varphi, ^\circ$	$\Delta C_{21}$			$\Delta C_{22}$		
	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
0	-0,0148	0,0185	-0,0004	-0,0474	0,2062	0,0027
10	-0,0103	0,0110	-0,0005	-0,0891	0,2367	0,0023
20	-0,0044	0,0026	-0,0005	-0,1090	0,2516	0,0006
30	0,0005	-0,0051	-0,0003	-0,1038	0,2454	-0,0012
40	0,0020	-0,0094	-0,0001	-0,0816	0,2233	-0,0023
50	0,0001	-0,0096	0,0000	-0,0552	0,1964	-0,0023
60	-0,0045	-0,0057	-0,0001	-0,0363	0,1759	-0,0012
70	-0,0100	0,0016	-0,0003	-0,0381	0,1758	0,0006
80	-0,0163	0,0124	-0,0004	-0,0707	0,2072	0,0030
90	-0,0253	0,0289	-0,0003	-0,1311	0,2689	0,0051

Аналогічні результати для матеріалів ЕТФ та ЛУ-1 наведено в таблицях 2-3.

Таблиця 2а. Коефіцієнти формули (11) для матеріалу ЕТФ

$\varphi, ^\circ$	$\Delta C_{11}$			$\Delta C_{12}$		
	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
0	0,0107	0,0005	-0,0001	0,0637	0,0728	-0,0013
10	0,0035	-0,0002	0,0000	0,0673	0,0530	-0,0019
20	-0,0036	0,0029	0,0001	0,0736	0,0301	-0,0021
30	-0,0091	0,0075	0,0000	0,0755	0,0146	-0,0018
40	-0,0105	0,0096	-0,0001	0,0700	0,0123	-0,0013
50	-0,0075	0,0076	-0,0003	0,0577	0,0244	-0,0009
60	-0,0007	0,0015	-0,0004	0,0405	0,0514	-0,0005
70	0,0072	-0,0052	-0,0005	0,0194	0,0941	-0,0005
80	0,0114	-0,0038	-0,0004	0,0022	0,1424	-0,0011
90	0,0094	0,0128	-0,0005	0,0069	0,1645	-0,0029

Таблиця 2б. Коефіцієнти формули (11) для матеріалу ЕТФ

$\varphi, ^\circ$	$\Delta C_{21}$			$\Delta C_{22}$		
	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
0	0,0039	0,0028	-0,0003	-0,0360	0,2074	0,0026
10	0,0054	-0,0103	0,0001	-0,0466	0,2039	-0,0012
20	0,0020	-0,0165	0,0008	-0,0420	0,1887	-0,0044
30	-0,0048	-0,0161	0,0012	-0,0295	0,1668	-0,0055
40	-0,0121	-0,0113	0,0010	-0,0198	0,1474	-0,0046
50	-0,0156	-0,0064	0,0002	-0,0213	0,1396	-0,0019
60	-0,0130	-0,0042	-0,0010	-0,0405	0,1514	0,0020
70	-0,0051	-0,0048	-0,0021	-0,0820	0,1896	0,0067
80	-0,0009	-0,0004	-0,0022	-0,1439	0,2559	0,0104
90	-0,0116	0,0204	-0,0010	-0,2040	0,3317	0,0087

Таблиця 3.а. Коефіцієнти формули (11) для матеріалу Лу-1

$\varphi, ^\circ$	$\Delta C_{11}$			$\Delta C_{12}$		
	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
0	0,0049	0,0027	-0,0001	0,0574	0,0510	-0,0003
10	0,0017	-0,0057	0,0001	0,0324	0,0742	-0,0015
20	-0,0014	-0,0131	0,0003	0,0307	0,0705	-0,0019
30	-0,0062	-0,0153	0,0005	0,0366	0,0527	-0,0017
40	-0,0117	-0,0128	0,0004	0,0411	0,0335	-0,0012
50	-0,0151	-0,0087	0,0003	0,0413	0,0196	-0,0006
60	-0,0151	-0,0055	0,0000	0,0374	0,0141	-0,0003
70	-0,0111	-0,0051	-0,0001	0,0303	0,0203	-0,0002
80	-0,0047	-0,0038	-0,0002	0,0136	0,0603	-0,0004
90	-0,0202	0,0597	-0,0011	-0,0753	0,2650	-0,0015

Таблиця 3.б. Коефіцієнти формули (11) для матеріалу Лу-1

$\varphi, ^\circ$	$\Delta C_{21}$			$\Delta C_{22}$		
	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_0$	$P_1$	$P_2$
0	-0,0108	0,0113	-0,0004	0,0840	0,0903	0,0075
10	0,0027	-0,0132	-0,0006	-0,0535	0,1789	0,0040
20	0,0186	-0,0392	-0,0004	-0,0912	0,2018	0,0012
30	0,0268	-0,0572	0,0002	-0,0821	0,1860	-0,0012
40	0,0239	-0,0624	0,0008	-0,0531	0,1502	-0,0022
50	0,0123	-0,0557	0,0010	-0,0225	0,1110	-0,0020
60	-0,0012	-0,0426	0,0005	-0,0015	0,0810	-0,0010
70	-0,0094	-0,0296	-0,0003	0,0008	0,0721	0,0006
80	-0,0102	-0,0176	-0,0015	-0,0424	0,1157	0,0050
90	-0,0676	0,0632	0,0019	-0,2692	0,3424	0,0265

**Висновок.** Розроблено методику дослідження напружень біля тріщин малих розмірів, що виростають із вершини макротріщини в анізотропних пластинках. Досліджено характерні властивості розподілу КІН залежно від кута нахилу тріщин та анізотропії матеріалу. Встановлено загальні співвідношення щодо КІН для анізотропних пластинок.

1. В.В. Божидарнік, О.В. Максимович. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами / Монографія. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – С. 226.
2. Максимович О. Розрахунок напруженого стану анізотропних пластинок з отворами і криволінійними тріщинами при врахуванні контакту їхніх берегів/ Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – № 3. – С. 36-42.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / М.: Наука, 1966. – С. 708.
4. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами / К.: Наук. думка, 1988. – С. 620.
5. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук // К.: Наук. думка, 1989. – С. 248.
6. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2-х томах / Под ред. Ю. Мураками // М.: Мир, 1990. – Т. 1. – С. 448.