

УДК 514.18

Малютіна Т.П., Давыденко И.П.

Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

ТОЧЕЧНОЕ ЗАДАНИЕ СИМПЛЕКСОВ С ОБЩИМ ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ

Малютіна Т.П., Давыденко И.П. Точечное задание симплексов с общим центром тяжести. Обобщено понятие медианы на многомерное пространство, дано уравнение двухпараметрического множества симплексов плоскости и трехпараметрического множества пространства с общим центром тяжести.

Ключевые слова: точечное уравнение, медиана, центр тяжести, симплекс.

Малютіна Т.П., Давыденко И.П. Точкове визначення симплексів з загальним центром ваги. Узагальнено поняття медіани на багатовимірний простір, подано рівняння двопараметричної множини симплексів площини і трипараметричної множини простору з загальним центром ваги.

Ключові слова: точкове рівняння, медіана, центр ваги, симплекс.

Malutina T.P., Davydenko I.P. Dot definition simplexes with a common center of gravity. Generalize the concept of median on a multi-dimensional space, given the equation of two-parameter set of simplexes plane and three-parameter sets of the space with a common center of gravity.

Keywords: dot equation, the median, the center of gravity, simplex.

Постановка проблемы. Для треугольника, определяющего плоскость в пространстве, понятия медиан и центра тяжести взаимосвязаны. Возникают вопросы такой связи для тетраэдра, который, по сути, является трехмерным обобщением треугольника. Поставленную задачу можно решить методами БН-исчисления [1-5].

Анализ последних исследований. Определению особых точек треугольника и их геометрических свойств в БН-исчислении (точечное исчисление Балюбы-Найдыша) посвящена работа [6], но в ней автор ограничился исследованием свойств особых точек, включая и центр тяжести, только в симплексе плоскости. В БН-исчислении попытки обобщения понятий центра тяжести на пространства больших размерностей не предпринимались.

Формулировка целей статьи. Обобщить в БН-исчислении понятие центра тяжести на пространства размерностей больше двух.

Основная часть. Заданы три точки A, B, C , образующие симплекс [2] двумерного пространства SAB . Требуется в плоскости треугольника ABC задать все тройки точек A_1, A_2, A_3 , имеющие с этим треугольником ABC общий центр тяжести (рис. 1).

Для решения поставленной задачи зададим искомые вершины треугольников точечными уравнениями в симплексе SAB :

$$A_1 = Ap_1 + Bq_1 + Cr_1, \quad A_2 = Ap_2 + Bq_2 + Cr_2, \quad A_3 = Ap_3 + Bq_3 + Cr_3. \quad (1)$$

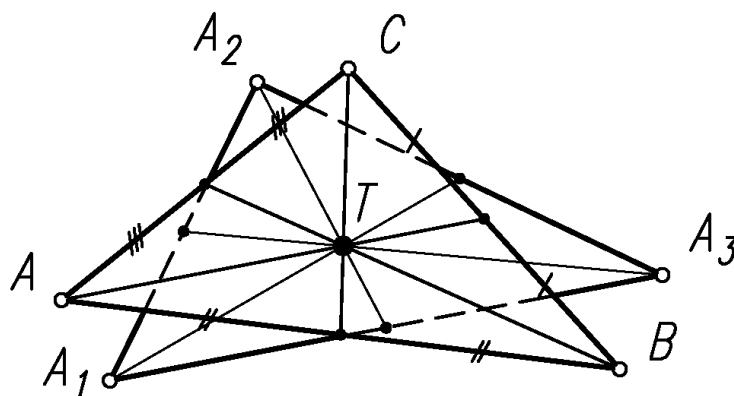


Рис. 1. Центр тяжести в симплексе двумерного пространства

На основании соотношений, полученных в [7], определим общий центр тяжести T треугольников ABC и $A_1A_2A_3$:

$$T = \frac{A+B+C}{3} = \frac{A_1+A_2+A_3}{3} \rightarrow A+B+C = A_1+A_2+A_3. \quad (2)$$

Подставим выражения точек A_1, A_2, A_3 из (1) в равенство (2), получим:

$$\begin{aligned} A+B+C &= Ap_1+Bq_1+Cr_1+Ap_2+Bq_2+Cr_2+Ap_3+Bq_3+Cr_3 \rightarrow \\ &\rightarrow A(1-p_1-p_2-p_3)+B(1-q_1-q_2-q_3)+C(1-r_1-r_2-r_3)=0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для произвольного треугольника ABC последнее соотношение справедливо только при равенстве нулю выражений при точках A, B, C :

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1; \\ q_1+q_2+q_3=1; \\ r_1+r_2+r_3=1. \end{cases} \quad (4)$$

Суммируя уравнения системы (3), получим:

$$(p_1+q_1+r_1)+(p_2+q_2+r_2)+(p_3+q_3+r_3)=3. \quad (5)$$

Учитывая, что для двумерного пространства справедливо соотношение $p_i+q_i+r_i=1$, делаем вывод, что в системе (4) только два из трех уравнений являются независимыми:

$$\begin{cases} p_1+p_2+p_3=1 \\ q_1+q_2+q_3=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p_3=1-p_1-p_2 \\ q_3=1-q_1-q_2 \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя значения параметров из (6) в (1), получим двухпараметрическое множество симплексов, имеющих общий центр тяжести:

$$\begin{cases} A_1=(A-C)p_1+(B-C)q_1+C; \\ A_2=(A-C)p_2+(B-C)q_2+C; \\ A_3=(A-C)(1-p_1-p_2)+(B-C)(1-q_1-q_2)+C. \end{cases} \quad (7)$$

Учитывая s -теорему БН-исчисления [2], определим площади треугольников:

$$\frac{s_{123}}{s} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ 1-p_1-p_2 & 1-q_1-q_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow s_{123} = s \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где s – площадь треугольника ABC .

Переходим к трёхмерному пространству. Рассмотрим четыре точки A, B, C, D , образующие тетраэдр. Требуется в пространстве этого тетраэдра задать все четверки точек A_1, A_2, A_3, A_4 , которые имеют общий центр тяжести с точками A, B, C, D (рис. 2).

По аналогії з двохмерним симплексом, зададим іскомые вершини тетраэдров $A_1A_2A_3A_4$ точечными уравнениями в симплексе $DABC$:

$$\begin{cases} A_1 = (A-D)p_1 + (B-D)q_1 + (C-D)r_1 + D; \\ A_2 = (A-D)p_2 + (B-D)q_2 + (C-D)r_2 + D; \\ A_3 = (A-D)p_3 + (B-D)q_3 + (C-D)r_3 + D; \\ A_4 = (A-D)p_4 + (B-D)q_4 + (C-D)r_4 + D. \end{cases} \quad (9)$$

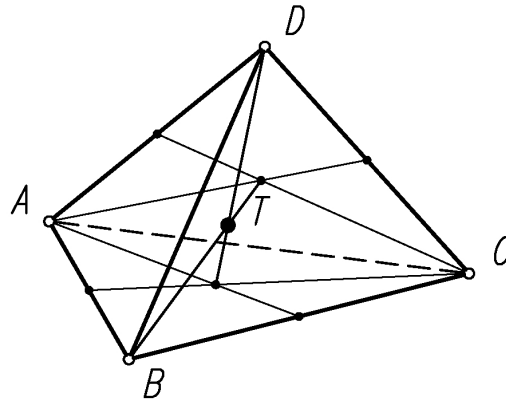


Рис. 2. Центр тяжести в симплексе трехмерного пространства

Определим общий центр тяжести тетраэдра:

$$\begin{aligned} T = \frac{\sum_1^4 A_i}{4} &= (A-D)\frac{\sum_1^4 p_i}{4} + (B-D)\frac{\sum_1^4 q_i}{4} + (C-D)\frac{\sum_1^4 r_i}{4} + D = \\ &= \frac{(A-D)}{4} + \frac{(B-D)}{4} + \frac{(C-D)}{4} + D. \end{aligned} \quad (10)$$

Откуда имеем:

$$(A-D)\sum_1^4 p_i + (B-D)\sum_1^4 q_i + (C-D)\sum_1^4 r_i = (A-D) + (B-D) + (C-D). \quad (11)$$

Получаем связь параметров для тетраэдров с общим центром тяжести с заданным тетраэдром $ABCD$:

$$\sum_1^4 p_i = \sum_1^4 q_i = \sum_1^4 r_i = 1. \quad (12)$$

Откуда имеем:

$$p_4 = 1 - \sum_1^3 p_i, \quad q_4 = 1 - \sum_1^3 q_i, \quad r_4 = 1 - \sum_1^3 r_i. \quad (13)$$

В пространстве имеется трехпараметрическое множество симплексов, имеющее общий центр тяжести с симплексом $DABC$:

$$\begin{cases} A_1 = (A - D)p_1 + (B - D)q_1 + (C - D)r_1 + D; \\ A_2 = (A - D)p_2 + (B - D)q_2 + (C - D)r_2 + D; \\ A_3 = (A - D)p_3 + (B - D)q_3 + (C - D)r_3 + D; \\ A_4 = (A - D)(1 - \sum_1^3 p_i) + (B - D)(1 - \sum_1^3 q_i) + (C - D)(1 - \sum_1^3 r_i) + D. \end{cases} \quad (14)$$

Учитывая v -теорему БН-исчисления [2], определим объемы этих тетраэдров:

$$\begin{aligned} \frac{v_{1234}}{v} &= \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & r_3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

где v объем тетраэдра $ABCD$.

Геометрический смысл точки T для треугольника ABC известен, как точка пересечения медиан, которая отсекает от основания ее третью часть. Определим геометрический смысл точки T для тетраэдра $ABCD$. Точка T , как и любая его точка, тетраэдр делит на четыре тетраэдра:

$$ABCD = TABC + TBCD + TCDA + TDAB. \quad (16)$$

Особенность центра тяжести состоит в том, что все четыре объема равны между собой:

$$v_{ABCD} = 4v_{TABC} = 4v_{TBCD} = 4v_{TCDA} = 4v_{TDAB} = 4v. \quad (17)$$

Учитывая, что $v_{ABCD} = v_{TABC} + v_{TBCD} + v_{TCDA} + v_{TDAB} = 4v$, получим утверждение, что «медиана» тетраэдра отделяет точкой T от основания четвертую ее часть. Остается выяснить, в какую точку основания проводится эта «медиана».

В симплексе $DABC$ проведем «медиану» DT и определим точку T_{ABC} пересечения ее с основанием ABC (рис. 3):

$$\begin{aligned} \frac{TT_{ABC}}{DT_{ABC}} &= \frac{T - T_{ABC}}{D - T_{ABC}} = \frac{1}{4} \rightarrow 4T - 4T_{ABC} = D - T_{ABC} \rightarrow \\ &\rightarrow 3T_{ABC} = 4T - D = A + B + C \rightarrow T_{ABC} = \frac{A + B + C}{3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Утверждение. «Медиана» симплекса пространства – это отрезок прямой, соединяющий вершину симплекса с центром тяжести противоположного подсимплекса.

Такое обобщение медианы справедливо как для треугольника, так и для тетраэдра, что обобщает понятие медианы. Аналогичным образом можно решить подобную задачу и в

пространстве более высоких размерностей. При этом способ решения, предложенный выше, не изменится, только увеличится количество координат и, соответственно, ранг определителя, который напрямую зависит от размерности пространства.

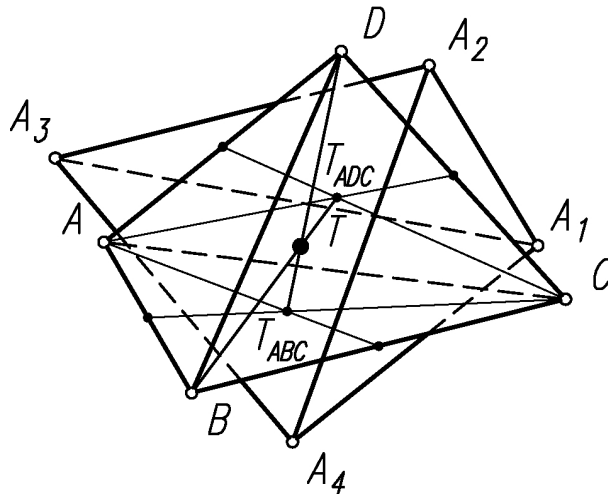


Рис. 3. Проекция центра тяжести тетраэдра на грани ABC и ADC

Выводы. В статье обобщено понятие медианы на многомерное пространство, даны уравнения двухпараметрического множества симплексов плоскости и трехпараметрического множества пространства с общим центром тяжести, что позволяет использовать теоретическую базу БН-исчисления, как аппарата моделирования геометрических объектов, в пространстве размерностей больше двух.

1. Найдиш В.М. Алгебра БН-исчисления / Найдиш В.М., Балюба И.Г., Верещага В.М. // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Міжвідомчий науково-технічний збірник. Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.210-215.
2. Балюба И.Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении: диссертация на соискание научной степени доктора технических наук: 05.01.01 / Балюба Иван Григорьевич – Макеевка: МИСИ, 1995. – 227 с.
3. Балюба И.Г. Основы математического аппарата точкового числения / Балюба И.Г., Полищук В.И., Малютіна Т.П. Праці // Таврійська державна агротехнічна академія. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. – Т. 29. – Мелітополь: ТДАТА, 2005. – С.22-30.
4. Точечное исчисление – математический аппарат параллельных вычислений для решения задач математического и компьютерного моделирования геометрических форм. [Балюба И.Г., Полищук В.И., Горягин Б.Ф., Малютіна Т.П.] // Материалы Международной научной конференции «Моделирование – 2008», 14-16 мая 2008 р., Том 2. – К.: Институт проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова НАН Украины. – С.286-290.
5. Точечное исчисление геометрических форм и его место в ряду других существующих исчислений / [Балюба И.Г., Горягин Б.Ф., Малютіна Т.П. и другие] // Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво. Науковий журнал №6. – Луцьк: ЛНТУ, 2011. – С. 24-29.
6. Малютіна Т.П. Інтерпретація обчислювальної геометрії плоских фігур у точковому численні: Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук: 05.01.01 / Малютіна Тетяна Петрівна – К.: КДТУБА, 1998. – 227 с.
7. Балюба И.Г. Использование площади треугольника, как параметра точкового исчисления для решения геометрических задач / Балюба И.Г., Конопацкий Е.В., Бородин А.В. // Науковий вісник Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Математика. Геометрія. Інформатика / гол. ред. кол. А.В. Найдиш. – Мелітополь: МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2014. – Т.1. – С.11-19.