УДК 514.18
Холковський Ю.Р.
Національний авіаційний університет

МОДЕЛЮВАННЯ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ ЗА ДОПОМОГОЮ ДИСКРЕТНО-ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОГО МЕТОДУ

Холковський Ю.Р. Моделювання багатопараметричних середовищ за допомогою дискретно-інтерполяційного методу. У статті розглядається нетрадиційний дискретно-інтерполяційний підхід щодо геометричного моделювання багатопараметричних об'єктів, процесів та середовищ, пропонується побудова їх дискретних математичних моделей. Актуальність даної роботи полягає у розробці раціональних методів моделювання складних багатопараметричних процесів та середовищ..
Ключові слова: інтерполяція, вузол інтерполяції, однопараметрична множина, дискретно задана функція, дискретні моделі, багатопараметричне середовище.

Холковский Ю.Р. Моделирование многопараметрических сред с помощью дискретно-интерполяционного метода. В работе рассматривается нетрадиционный дискретно-интерполяционный метод моделирования многопараметрических объектов, процессов и сред, предлагается построение их дискретных математических моделей. Актуальность данной работы состоит в разработке рациональных методов моделирования сложных многопараметрических процессов и сред.
Ключевые слова: интерполяция, узел интерполяции, однопараметрическое множество, дискретно заданная функция, дискретные модели, многопараметрическая среда.

Kholkovsky Yu.R. Design of multivariable environments by means of discretely-interpolation method.
The unconventional discretely-interpolation method of design of multivariable objects, processes and environments is in-process examined, the construction of their discrete mathematical models is offered. The relevance of this work is to develop best practices for modeling complex multivariable processes and environments.
Keywords: interpolation, interpolation node, one-parameter set, discretely given function, discrete models, multivariable environment.

Постановка проблеми. Багатопараметричні об'єкти, процеси та середовища відносяться до класу об'єктів та систем, що доволі тяжко описуються аналітично і моделюються. Сюди відносяться складні просторові криволінійні форми, як моделі технічних та архітектурно-будівельних об'єктів, певні виробничі та природні процеси, явища та середовища, що характеризуються, по-перше, великою кількістю параметрів, по-друге, ці параметри, як правило мають різноманітну структуру та різноякісні властивості. До того ж, властивості параметрів можуть мати певну анізотропію у часі або просторі. Стає зрозумілим, що побудова аналітичних, тобто континуальних математичних моделей таких об'єктів та середовищ є неможливою задачею. Але ж такі об'єкти та системи досить широко розповсюджені, досліджуються та використовуються у сучасних інженерних розробках, конструкціях, технологіях та наукових дослідженнях. Актуальними є задачі класифікації та дослідження таких систем, визначення їх параметрів та їх властивостей, прогнозування стану багатопараметричних середовищ у часі й просторі. Відповідно, для вирішення подібного роду задач необхідна розробка раціональних алгоритмів і методів і на їх основі створення математичних моделей моделювання багатопараметричних об'єктів та систем.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У літературі досить рідко зустрічаються окремі випадки розглядання питань геометричного моделювання багатопараметричних систем і середовищ, а також побудови їх математичних моделей. Особливо це стосується таких багатопараметричних систем і середовищ, як, наприклад, екологічні системи, які відрізняються великою кількістю різноманітних і різноякісних параметрів, і для яких аналіз та прогнозування стану є вкрай важливими практичними задачами. Зазначимо, що алгоритми та методи геометричного моделювання складних багатопараметричних систем з побудовою їх математичних моделей у літературних джерелах практично відсутні. Звідки і випливають наступні цілі дослідження.

Метою дослідження є вивчення складних багатопараметричних об'єктів, процесів та середовищ, розробка алгоритмів побудови, методу та дискретних математичних моделей щодо моделювання таких систем.

Основні результати дослідження. У багатьох задачах геометричного моделювання процесів та систем виникає необхідність побудови деякої однопараметричної множини. Таким об'єктом може бути деяка поверхня, як геометрична модель складної просторової криволінійної технічної форми, що застосовуються у техніці, будівництві, архітектурі. Також це може бути деяка гіперповерхня, як **n**-вимірна модель певного середовища, що задана аналітично чи дискретно. Як уже зазначалося, побудова аналітичних, тобто континуальних, математичних моделей складних об’єктів та систем практично неможлива. У таких випадках, як правило, переходять до побудови дискретних моделей з певним рівнем адекватності. Відомо, що, дискретний спосіб представлення інформації про об’єкт, чи систему, що моделюється, є універсальним і одним з раціональних.

При моделюванні складних багатопараметричних систем та середовищ, що не піддаються аналітичному опису часто доцільно й раціонально використовувати дискретні математичні моделі, що являють собою певні множини у вигляді чисельних масивів, які, у свою чергу, можуть бути представлені у вигляді дискретних геометричних моделей (точкових чи лінійних). Наше дослідження показує, що такі моделі оптимально підходять для подальшого проектування. В першу чергу це пов’язано з подальшим розвитком та ускладненням таких систем, процесів та середовищ, а також і з великим рівнем їх параметричності.

В роботі пропонується оригінальний нетрадиційний підхід щодо моделювання багатопараметричних об’єктів, процесів, середовищ, що базується на використанні дискретно-інтерполяційного методу. Отже, розглянемо його сутність.

По-перше, у якості інструментарія були використані інтерполяційні поліноми Лагранжа. Вибір саме таких інтерполяційних поліномів Лагранжа, на нашу думку, серед певної кількості інтерполяційних поліномів є оптимальним. Це обумовлено необов’язковим рівномірним розташуванням вузлів інтерполяції, можливістю представлення по кожній змінній своєї кількості вузлів інтерполяції. Також важливим чинником є й фактор збіжності цих поліномів.

По-друге, на основі запропонованого підходу та інтерполяційних поліномів Лагранжа були побудовані певні інтерполяційні схеми, що характеризуються певною кількістю вузлів інтерполяції і, що найголовніше, характером самих вузлів інтерполяції. Відповідно, отримані таким чином інтерполяційні схеми дозволяють отримати, у випадку одновимірної інтерполяції, однопараметричну множину певних об’єктів чи навіть процесів.

По-третє, і це найголовніше, під вузлами інтерполяції у запропонованому нами підході надалі розуміються не точки, як у випадку класичної інтерполяції, а більш складні математичні об’єкти (лінії та поверхні), або ж, навіть, певні процеси, системи та середовища, що представлені у вигляді деяких функціоналів, як сукупності їх властивостей та параметрів, у чому власне й полягає нетрадиційність та оригінальність запропонованого дискретно-інтерполяційного підходу.

По-четверте, схема розташування саме таких вузлів інтерполяції надалі й розуміється як схема інтерполяції.

Важливо зазначити, що такий підхід щодо моделювання складних багатопараметричних об’єктів, систем та середовищ, наприклад, екологічних систем, процесів чи екологічних ситуацій у літературі взагалі відсутній.

У п’ятому, однопараметричні множини, як деяка сукупність, навіть, різноякісних і різноструктурних параметрів, отримані таким чином, саме й є дискретними математичними моделями таких процесів, систем та середовищ.

По-шосте, елементом таких множин є деяка дискретна функція або функціонал, що у загальному випадку може бути представлена, як дискретний чисельний масив, розмірність якого може варіюватись. Відповідно, інтерполювання функцій, що можуть бути задані неявно чи параметрично, зводиться до розміщення у вузлах інтерполяції рівнянь, якщо можливий аналітичний спосіб завдання, чи дискретних масивів та отримання деякого функціонала з вектором параметрів, що включає в себе інтерполяційний параметр, координатні змінні, параметри, що характеризують форму та положення об’єктів, певні параметричні характеристики процесів та середовищ.

По-сьоме, запропонований дискретно-інтерполяційний підхід дозволяє включати в однопараметричну множину параметри та характеристики систем, процесів та середовищ, що мають різну структуру і навіть властивості. Надзвичайно важливим і цікавим слідством цього є застосування запропонованого підходу щодо моделювання різних роду явищ і середовищ, що характеризуються великою кількістю різноякісних параметрів, які часто просто неможливо функціонально-аналітично поєднати у звичайній математичній моделі. Наприклад, саме такою, власне кажучи, й є, задача прогнозування екологічного стану певної екосистеми і, відповідно, екологічної безпеки цієї системи.

Дискретний підхід можна вважати більш загальним, тому що від неперервно-аналітичної моделі практично завжди можна перейти до дискретної, а саме в нашому випадку до дискретно-інтерполяційної.

При використанні запропонованого дискретно-інтерполяційного підходу поліном Лагранжа може набути такого вигляду:

$$\Phi(u)_n = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(p_1, p_2, \dots, p_m) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \qquad (1),$$

де **u** – параметр інтерполяції, $\mathbf{F(p_1, p_2, \dots p_k)}$ - вузлова функція, $\mathbf{p_1, p_2, \dots p_k}$ – параметри вузлової функції, **n** – кількість вузлів інтерполяції.

Багатопараметричні системи та середовища, на прикладі екологічних систем, можуть бути настільки складними структурно й параметрично, що використання апарату одновимірної інтерполяції може виявитися недостатнім. У таких випадках доцільно використати апарат двовимірної інтерполяції. Ось у чому полягає його сутність, враховуючи саме запропонований дискретно-інтерполяційний метод моделювання.

Для вирішення певної задачі, наприклад, можна знайти вид степеневого многочлена $\mathbf{\Phi_{m,n}(u,v)}$ степеня **m** по **u** та **n** по **v**, та визначити значення функціонала **F** у довільній точці з параметрами **(u,v)**. Цілком зрозуміло, геометрично це означає, що при двовимірній інтерполяції через вузлові точки проходить деяка поверхня $\mathbf{z=\Phi_{m,n}(u, v)}$.

Якщо побудувати регулярну сітку та задати у вузлах сітки значення функції **z**, то вся площадка розпадається на **mn** прямокутників, в один з яких і потрапить точка **(u,v)** (рис.1).

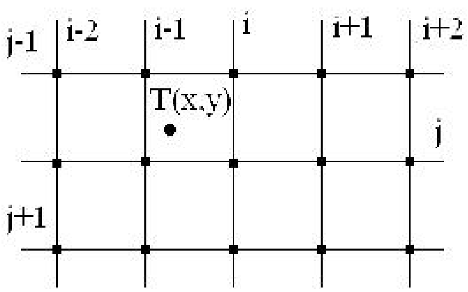

Рис.1 **Регулярна сітка при двовимірній інтерполяції**

Надалі відбувається інтерполяція при різних $\mathbf{u_i}$, но фіксованих $\mathbf{v_j}$, після чого необхідно перейти до $\mathbf{v_{j+1}}$ і повторити знову всю процедуру. Отже, отримуємо двовимірну інтерполяцію $\Rightarrow$ $\mathbf{P_{m,n}(x, y)}$ степеня **m** по **x** і степеня **n** по **y** $\Rightarrow$ **z(x, y)** у довільній точці **T(x, y)**. Через вузлові точки проводиться деяка поверхня $\mathbf{z= P_{m,n}(x, y)}$. Таким чином ми можемо отримати таку формулу двовимірної інтерполяції за Лагранжем для побудови дискретних моделей складних багатопараметричних систем та середовищ:

$$P_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} z(x_j, y_j) \prod_{\substack{p=0 \\ p \neq i}}^{m-1} \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq j}}^{n-1} \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{(x_p - x_i)(y_q - y_j)} \qquad (2)$$

Зазначимо, що у найбільш загальному випадку при **n**-вимірній інтерполяції через вузлові точки проходить деяка гіперповерхня, що являє собою многочлен **n** змінних, а формула буде мати складніший, але аналогічний вигляд.

Відомо, що інтерполяційний поліном фактично є зрізаним рядом (аналогом ряду Тейлора) у наслідок того, що він обмежений степенем **n**. Звідки випливає, що важливим фактором є введення певного критерію інтерполяції. Тому для збіжності відповідного аналога ряду Тейлора необхідно спадання абсолютної величини коефіцієнта при **u** з ростом степеня **u**. Як відомо й прийнятно, критерієм гарної апроксимації у випадку багатовимірної інтерполяції є спадання абсолютних величин похідних по всім змінним із зростанням їх порядку.

Отже, запропонований дискретно-інтерполяційний підхід може бути найбільш єфективним при моделюванні об'єктів, процесів та середовищ, що характеризуються великою кількістю різноструктурних та різноякісних параметрів. Наприклад, при моделюванні багатопараметричного середовища, яким є певна екологічна система, може бути розглянута задача якісної й кількісної оцінки впливу забруднення на навколишнє середовище з часом і у просторі. Для таких випадків виникають такі перспективні задачі щодо вивчення та моделювання екологічної ситуації у певному екологічному середовищі чи екосистемі:

1. Аналіз екологічного стану певного середовища
2. Визначення загального рівня шкідливості певної екологічної системи.
3. Визначення й локалізація місць найбільшого та найменшого забруднення.
4. Динамічне та довгострокове прогнозування забруднення навколишньої території, як результату певної екологічної ситуації середовища.

Для вирішення зазначених вище задач можна отримати у вигляді функціонала таку дискретно-інтерполяційну модель щодо визначення локальних параметрів екологічної ситуації певного середовища:

$$\Phi_{шкідл.}(p_k) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i(p_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{u - u_j}{u_i - u_j} \quad (3),$$

де $\mathbf{F_i(p_k) = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k-1}, p_k\}}$, а $\mathbf{p_1, p_2, p_3}$, …- параметри екологічної системи.

Висновки. Використання запропонованого дискретно-інтерполяційного методу дає можливість будувати дискретні математичні моделі досить складних систем, процесів і середовищ, що характеризуються великою кількістю параметрів та властивостей, які можуть мати не тільки різноманітну структуру, але й певну анізотропність властивостей у часі й просторі.

1. Холковський Ю. Р. Інтерполяція дискретних масивів у загальному випадку як спосіб моделювання багатопараметричних об'єктів та процесів / Ю. Р. Холковський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип.4 – Т51. – Стор. 156-160.
2. Холковський Ю. Р. Моделювання складних просторових форм із використанням дискретно-інтерполяційного підходу / Ю. Р. Холковський // Труды 14-й Международной научно-практической конференции «Современные проблемы геометрического моделирования». – Мелитополь: ТГАТУ, 2012. – С.
3. Холковський Ю. Р. Дискретно-інтерполяційна екоматриця, як геометрична модель багатопараметричних процесів та систем в екології / Ю. Р. Холковський // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. «Прикладна геометрія та інженерна графіка». – Мелітополь: ТГАТУ, 2012. – Вип.4 – Т55. – Стор. 308-311.