УДК 514.181.6 + 514.182
Журило А.Г.к.т.н., доц., Сівак Є.М. к.т.н., доц. Адашевська І.Ю. к.т.н., доц.
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

ОСНОВНА ТЕОРЕМА АКСОНОМЕТРІЇ – ТЕОРЕМА ПОЛЬКЕ-ШВАРЦА ТА ЇЇ ПРАКТИЧНЕ ВИКОРИСТАННЯ

Журило А.Г., Сівак Є.М., Адашевська І.Ю. Основна теорема аксонометрії – теорема Польке-Шварца та її практичне використання. У статті розглянуто основну теорему аксонометрії – теорему, яку в 1860 році сформулював К. Польке, а найпростіший доказ запропонував у 1864 році Г. Шварц. Показано практичне використання вказаної теореми. Наведено приклади використання коефіцієнтів спотворення.
Ключові слова: аксонометрія, теорема Польке – Шварца, коефіцієнти спотворення, аксонометричні масштаби.

Журило А.Г., Сивак Е.М., Адашевская И.Ю. Основная теорема аксонометрии – теорема Польке-Шварца и её практическое применение. В статье рассмотрена основная теорема аксонометрии - теорема, которую в 1860 году сформулировал К. Польке, а самый простой способ доказательства предложил в 1864 г. Г. Шварц. Показано практическое применение указанной теоремы. Приведены примеры использования коэффициентов искажения.
Ключевые слова: аксонометрия, теорема Польке - Шварца, коэффициенты искажения, аксонометрические масштабы.

Zhurilo A.G., Sivak E.M., Adashevska I.Yu. The main theorem of axonometry – Polke-Schwartz's theorem and its practical application. In the article the main theorem axonometric - theorem, which in 1860 formulated K. Polke, and the easiest way evidence was offered in 1864 y. G. Schwartz a made. The practical the use of implementation of this theorem. Examples of the use of distortion factor.
Keywords: axonometry, theorem Polke - Schwarz, distortion factor, axonometric scale.

Вступ. Незважаючи на широкий розвиток комп'ютерної техніки, застосування її для виконання креслеників, появі вже декількох поколінь програм КОМПАС, AUTOCAD та їхніх аналогів, аксонометричні проекції широко використовуються у машинобудуванні та архітектурі.

Аналіз останніх досліджень та літератури. Питання про точні графічні побудови має велику історичну давнину, беручи свій початок ще в роботах Евкліда, Архімеда та інших вчених. Однак, заглибленого наукового обґрунтування ці методи почали набувати після опублікування робіт французького філософа і математика Рене Декарта (1596 – 1650 рр.). Декартом була запропонована система осей координат на площині та у просторі, що дозволила математикам і технікам розв'язувати на папері задачі метричного характеру [1, 2].

З вичерпною повнотою і строгою науковою обґрунтованістю теорія точних метричних побудов була розроблена математиком Гаспаром Монжем, який у 1795 – 1799 рр. опублікував результати своєї двадцятирічної роботи під назвою «Нарисна геометрія» [1].

Серед імен, з якими пов'язаний розвиток наукової праці в області аксонометричних проекцій, можна згадати видатних вітчизняних вчених: М.О. Риніна, А.І. Добрякова, Д.І. Каргина, М.Ф. Четверухіна, Н.О. Глаголєва, О.О. Вольберга, Н.М. Бескіна, І.І. Котова, Є.А. Глазунова, С.О. Смирнова [3, 4].

У даний час теорія аксонометрії розроблена докладно і висвітлена в численних працях з нарисної геометрії. Питання ж практики побудови аксонометричних зображень висвітлені в літературі недостатньо. Тим часом, у практиці побудови аксонометричних зображень можуть виникнути значні труднощі, обумовлені не тільки недостатньою підготовкою виконавця, але і складністю окремих задач, що вимагають спеціального роз'яснення [5, 6].

Положення ускладнюється ще й тому, що за останні 20..30 років практично не публікувалося робіт із практики побудови аксонометричних зображень та її основних законів. Ті ж роботи, що були опубліковані раніше, у більшості випадків розглядають аксонометричні проекції, не передбачені ГОСТ 2.317 – 69 [3, 4].

Мета дослідження, постановка проблеми. Довести значне практичне значення теореми Польке – Шварца та показати основні властивості аксонометричних проекцій, які зумовлені вказаною теоремою – основною теоремою аксонометрії [8].

Матеріали дослідження. Як відомо, основною теоремою аксонометрії є теорема Польке – Шварца.

Вперше вона була висловлена К. Польке в 1853 р.: «Три відрізки OE_x, OE_y і OE_z довільної довжини, що належать одній площині і виходять з однієї точки O' під довільними кутами один до одного, становлять рівнобіжну проекцію трьох рівних відрізків OE_x, OE_y і OE_z, відкладених на прямокутних осях координат від початку О» [2, 3].

Ця теорема є важливою для визначення системи аксонометричних осей і аксонометричних масштабів.

Будь-який повний чотирикутник, який не вироджується, можна розглядати як рівнобіжну проекцію тетраедра наперед заданої форми.

Звернемо увагу, що повним чотирикутником вважають фігуру, утворену чотирма точками загального положення (вершинами) і шістьма прямими, обумовленими вершинами. Чотирикутник, що не вироджується, є таким, у якого не всі чотири вершини належать одній прямій.

Припустимо, що є довільний тетраедр $A_oB_oC_oD_o$ і повний чотирикутник ABCD (рис. 1).

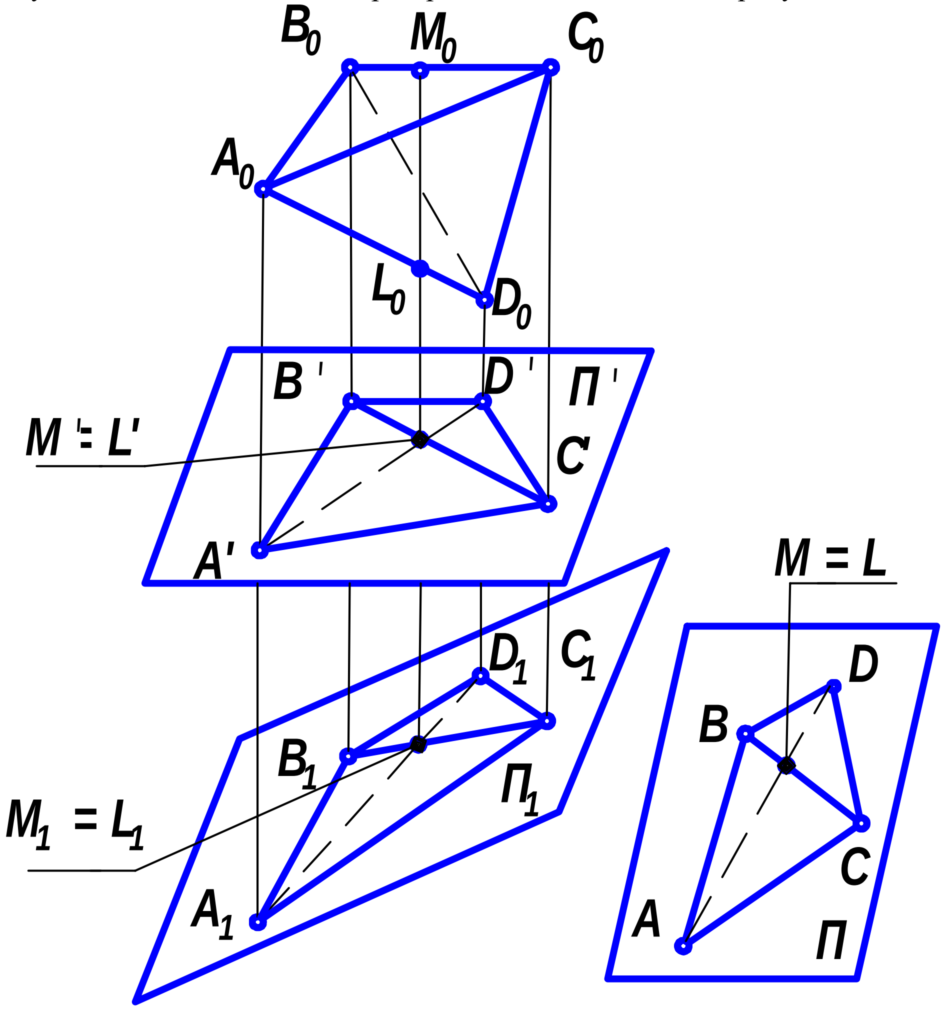

Рис. 1. **Перетворення довільного тетраедра $A_oB_oC_oD_o$ і повного чотирикутника ABCD**

Будемо розглядати останній як проекцію деякого тетраедра [8]. У такому випадку шість сторін повного чотирикутника є проекціями ребер цього тетраедра. Таким чином, необхідно позначити двома буквами діагональну точку перетинання двох сторін, відносячи її до ребра AD (точка L) або до ребра BC (точка M). Просте відношення трьох точок не змінюється при рівнобіжному проеціюванні, тому можна знайти точки L_0 і M_0 відповідно на ребрах A_0D_0 та B_0C_0 початкового тетраедра з умов:

$(A_0L_0D_0) = (ALD)$, $(B_0M_0C_0) = (BMC)$.

Приймаємо напрямок прямої M_0L_0 за напрямок проеціювання, тому що пряма M_0L_0 проецюється в одну точку. Спроецюємо тетраедр за напрямком M_0L_0, для чого через кожну вершину проведемо проецюючі лінії, та отримаємо проецюючу призму. Перетнемо її довільною площиною П'. У перетині буде повний чотирикутник A'B'C'D', в якому:

$(A'L'D') = (A_oL_oD_o) = (ALD)$; $(B'M'C')=(B_oM_oC_o) = (BMC)$.

Повний чотирикутник A'B'C'D' є афінним чотирикутником ABCD. Розглядаючи чотирикутник A'B'C'D' як основу призми, можна побудувати перетин $A_1B_lC_1D_1$ проецюючої призми площиною $П_1$, який буде подібним чотирикутнику ABCD. Таким чином, повний чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ є рівнобіжною проекцією даного тетраедра $A_oB_oC_oD_o$, а заданий чотирикутник ABCD є проекцією тетраедра, подібного даному.

Можна зробити висновок, що якщо задано проекцію тетраедра на площині П (повний чотирикутник ABCD), то напрямок проеціювання та положення площини проекцій можна знайти, як і натуральні розміри начального тетраедра. При цьому розв'язанням задачі є чотири випадки.

Дійсно, проецюючій призмі відповідає відносно площини проекцій симетрична проецююча призма. У кожній з них початковий тетраедр може займати два істотно різних положення, симетричних щодо нормального перетину проецюючої призми.

Результати дослідження. З теореми Польке - Шварца можна зробити висновки дуже великого практичного значення**.** Якщо визначити систему прямокутних координат у просторі OXYZ, а також відкладені по осях координат одиничні відрізки (масштабні відрізки), кінці яких позначимо буквами E_x, E_y, E_z, то отримаємо масштабний тетраедр $OE_xE_yE_z$ (рис. 2).

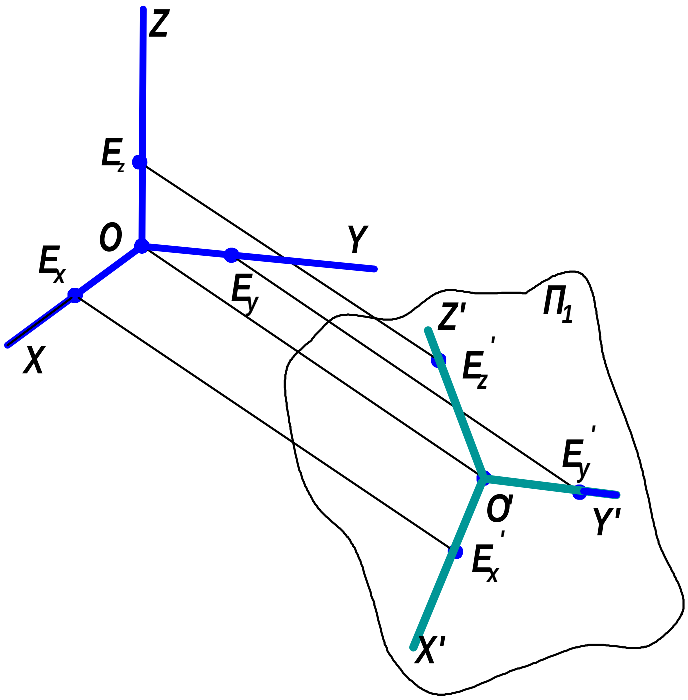

Рис. 2. **Паралельне проеціювання системи прямокутних координат у просторі OXYZ на будь - яку площину $П_1$ [8]**

Однією вершиною масштабного тетраедра є початок координат О, а трьома іншими вершинами — кінці масштабів по осях координат E_x, E_y і E_z. Масштабний тетраедр є тетраедром спеціального вигляду. Три його грані — рівнобедрені прямокутні трикутники, а четверта грань — рівнобічний трикутник.

Припустимо, що система прямокутних координат у просторі OXYZ (будемо називати її натуральною системою координат), проецюється паралельно на будь-яку площину $П_1$ (рис. 2). У такому випадку масштабний тетраедр зобразиться у вигляді повного чотирикутника, шість сторін якого є проекціями шести ребер масштабного тетраедра [7]. Натуральні осі координат OXYZ зобразяться в проекції на площину $П_1$ трьома прямими лініями, що виходять із точки O', яка є зображенням початку координат О. Ця система трьох прямих O'X'Y'Z' (аксонометричних осей) називається аксонометричною системою координат, а три проекції натурального масштабу по осях координат $O'E'_x$, $O'E'_y$, $O'E'_z$ називаються аксонометричними масштабами.

Застосовуючи теорему Польке - Шварца до розглянутого випадку, коли початковий тетраедр є масштабним тетраедром, можна зазначити наступне: довільний повний чотирикутник, що не вироджується, завжди можна розглядати як рівнобіжну проекцію масштабного тетраедра натуральної системи координат у просторі.

Як для теорії аксонометрії, так і в багатьох практичних її застосуваннях ця теорема має фундаментальне значення. Справді, на підставі теореми Польке – Шварца система аксонометричних осей, а також і аксонометричних масштабів на них може бути задана зовсім довільним чином. Завжди знайдеться таке положення прямокутної системи натуральних координат у просторі і такий розмір натурального масштабу по осях, що задана аксонометрична система виявиться рівнобіжною проекцією натуральної системи.

З теореми Польке – Шварца легко вивести основні властивості аксонометричних проекцій.

1. Проекцією точки є точка, проекцією прямої – пряма (колінеарність).

2. Якщо точка належить прямій, то проекції точки (аксонометричні і вторинні) належать однойменним проекціям цієї прямої (інцидентність зберігається).

3. Якщо лінії (прямі або криві) у просторі перетинаються, то проекції цих ліній також перетинаються, причому точки перетинання проекцій є однойменними проекціями точки перетинання самих ліній у просторі.

4. Якщо прямі в просторі взаємно паралельні, то їхні проекції також взаємно паралельні.

5. Проекції відрізків однієї і тієї ж прямої лінії пропорційні самим відрізкам. Відношення відрізків взаємно паралельних прямих дорівнює відношенню їхніх проекцій. Ця властивість разом із властивістю 4 дає можливість користуватися системою аксонометричних координат так само, як системою натуральних координат, що і становить сутність аксонометричного способу побудови зображень.

6. Якщо пряма торкається кривої лінії в будь - якій точці А, то проекція прямої торкається проекції кривої в точці A_1, яка буде проекцією точки торкання А. Торкання можна розглядати як граничний випадок перетинання, тому дана властивість є похідною з властивості 3.

7. Якщо лінії, фігури або сторони кутів належать площині, паралельній картині, то відрізки ліній, фігури і кути проецюються на останню без спотворення.

8. Усі аксонометричні проекції мають однакове спотворення.

Наприклад, точні коефіцієнти спотворення для ізометричної проекції становлять: $K_x = K_y = K_z = 0{,}82$. Але на практиці часто використовують коефіцієнти спотворення $K_x = K_y = K_z = 1$. Пов’язане це з тим, що при побудові аксонометрії кресляр буде вимушений кожен розмір (як мінімум раз, а максимум – тричі) помножити на 0,82 та округляти отриманий результат треба не грубо, а з однаковим наближенням. Тому наведені коефіцієнти спотворення вибираються таким чином, щоб спростити аксонометричні масштаби і перехід натуральних координат в аксонометричні. Для цього застосовують коефіцієнти спотворення рівні одиниці, збільшуючи приблизно в 1,22 рази їхню натуральну величину.

На рис. 3 зображені для зрівняння нормальна і збільшена ізометричні проекції куба з ребром, рівним одиниці натурального масштабу. Як видно з кресленика, нормальне і збільшене зображення відрізняються одне від одного лише розмірами, зберігаючи всі інші властивості, у тому числі і наочність. А трудомісткість побудови знижується, що важливо для початківців.

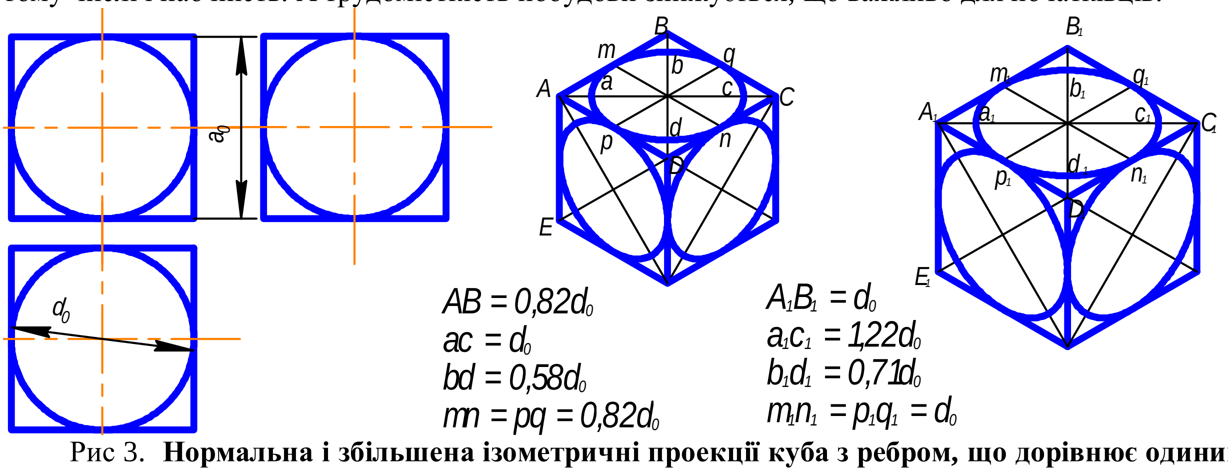

Рис 3. **Нормальна і збільшена ізометричні проекції куба з ребром, що дорівнює одиниці натурального масштабу [8]**

Висновки. Теорема Польке – Шварца є основною теоремою аксонометрії, яка дозволяє визначити систему аксонометричних осей і аксонометричних масштабів. З теореми Польке – Шварца легко вивести основні властивості аксонометричних проекцій, які є ідентичними властивостям ортогональних креслеників. При побудові аксонометрії з коефіцієнтом спотворення $K_x = K_y = K_z = 1$, натуральну величину треба збільшити приблизно в 1,22 рази. Нормальне і збільшене зображення відрізняються одне від одного лише розмірами, зберігаючи всі інші властивості, у тому числі і наочність при суттєвому зниженні трудомісткості побудови аксонометрії.

1. Гордон В. О. Курс начертательной геометрии : учебник / В. О. Гордон, М. А. Семенцов - Огиевский. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
2. Каменев В. И. Аксонометрические проекции : Альбом чертежей / В. И. Каменев. — Москва–Свердловск : Гос. изд - во машиностроит. лит., 1946. – 72 с.
3. Порсин Ю. Я. Аксонометрические изображения машиностроительных деталей : учебник / Ю. Я. Порсин. – М.- Л. : Машгиз, 1973. – 188 с.
4. Ланюк А. В. Аксонометрические проекции : учебник / А. В. Ланюк. — М. : Гос. изд - во лит - ры по строительству и архитектуре, 1956. – 176 с.
5. Журило А. Г. Методика построения аксонометрических проекций тел вращения на примере изометрической проекции цилиндра / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2007. – № 11. – С. 78 – 81.
6. Журило А. Г. Методика построения аксонометрических проекций тел вращения на примере изометрической проекции конуса / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ».— 2005. – № 57. – С. 65 – 68.
7. Журило А. Г. Побудова деяких геометричних тіл у диметрії / А. Г. Журило // Вестн. НТУ «ХПИ». — 2008. – № 43. – С. 128 – 131.
8. Журило А. Г. Теоретичні та практичні основи аксонометрії [Текст] / А. Г Журило. Навч. посібник. Х.: НТУ «ХПІ», 2010. - 196 с.