УДК 514.18

Ковальов С.М., Ботвіновська С.І., Мостовенко О.В
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВРІВНОВАЖЕНІ СІТКИ НА ПЛОЩИНІ З КЛІТИНАМИ ОДНАКОВОЇ ПЛОЩІ

Ковальов С.М., Ботвіновська С.І., Мостовенко О.В. Врівноважені сітки на площині з клітинами однакової площі. В статті розглядається можливість управління параметрами сітки в плані при дискретному моделюванні заданої поверхні без зміни розподілу зовнішнього навантаження на вузли сітки.
Ключові слова: дискретне моделювання, дискретний каркас, врівноважена поверхня, параметричний аналіз, статико-геометричний метод

Ковалев С.Н., Ботвиновская С.И., Мостовенко А.В. Уравновешенные сети на плоскости с одинаковыми по площади ячейками. В статье рассматривается возможность управлять параметрами сетки в плане при дискретном моделировании заданной поверхности. При этом распределение внешней нагрузки на узлы сети должно оставаться неизменным.
Ключевые слова: дискретное моделирование, дискретный каркас, уравновешенная поверхность, параметрический анализ сетки, статико-геометрический метод.

Kovalev S.N., Botvinovska S.I., Mostovenko O.V. Balanced networks on a plane with identical on an area cells
Possibility to manage the parameters of net in a plan at the discrete design of the set surface is examined in the article. Thus is must take into account, that the external load on the nodes of network should be unchanged.
Keywords: discrete modeling, digital frame, balanced surface, parameterization, static-geometric method, discrete frame.

Постановка проблеми. При формуванні врівноважених сіток під дією власної ваги, що дискретно моделюють поверхні криволінійних покриттів будівель та споруд, власна вага покриття умовно рівномірно розподіляється між вузлами сітки. При цьому на форму поверхні суттєво впливають як топологія сітки в плані, так і її метричні параметри. Виникає питання, які параметри сітки в плані, при заданому опорному контурі в просторі, можна варіювати так, щоб не порушити рівновагу сітки, яка дискретно моделює поверхню покриття.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основи статико-геометричного методу (СГМ) формування дискретних каркасів врівноважених поверхонь на топологічно правильних сітках у плані під дією рівномірно розподіленого між вузлами вертикального навантаження викладено в [1]. В роботі [2] Золотовою А.В. було доведено, що при загущенні правильної у плані сітки з квадратними клітинами зовнішнє рівномірно розподілене навантаження залишається пропорційним площі клітини у плані.

Невирішені частини проблеми. Варіювання метричних параметрів сітки у плані з заданою топологією, яка не впливає на форму модельованої поверхні в [1], [2] авторами не розглядалось.

Мета дослідження виявити можливості управління параметрами сітки при дискретному моделюванні заданої поверхні без зміни розподілу зовнішнього навантаження на вузли сітки.

Основні результати дослідження. Сформулюємо основні умови до організації сітки в плані, яка забезпечує незмінність форми модельованої поверхні:

1. Статична рівновага вузлів сітки за статико-геометричним методом (СГМ) описується системою рівнянь

$$\begin{gathered} x_{i-1,j}+x_{i+1,j}+x_{i,j-1}+x_{i,j+1}-4x_{i,j}=0 \\ y_{i-1,j}+y_{i+1,j}+y_{i,j-1}+y_{i,j+1}-4y_{i,j}=0 \\ z_{i-1,j}+z_{i+1,j}+z_{i,j-1}+z_{i,j+1}-4z_{i,j}+kP=0 \end{gathered} \qquad (1)$$

В першому і другому рівняннях системи (1) проекції зовнішніх зусиль відсутні, оскільки вони вертикальні. Перші два рівняння системи є незалежними і описують рівновагу кожного вузла у плані. Тобто, першою умовою рівноваги сітки у просторі є рівновага вузлів сітки у плані.

2. Рівномірний розподіл власної ваги між вузлами сітки відповідає однаковим за вагою елементам покриття, що віднесені до кожного вузла. Вага кожного елемента дорівнює добутку його площі, товщини та об'ємної ваги. При постійній товщині оболонки площі всіх елементів повинні бути однаковими. Тоді, якщо площа елемента для пологої оболонки наближено дорівнює його площі в плані, то другою умовою рівноваги сітки у просторі буде те, що площі клітин сітки в плані повинні бути однаковими.

Наведені умови є необхідними для того, щоб при заданих параметрах поверхні вузли різних у плані сіток належали цій поверхні. Якщо перша вимога описується першими двома рівняннями системи (1), то друга умова описується як рівність площ клітин сітки в плані. Для наочності розглянемо контур в плані у вигляді прямокутника з нанесеною на нього сіткою клітин розміром (m x n) (рис.1).

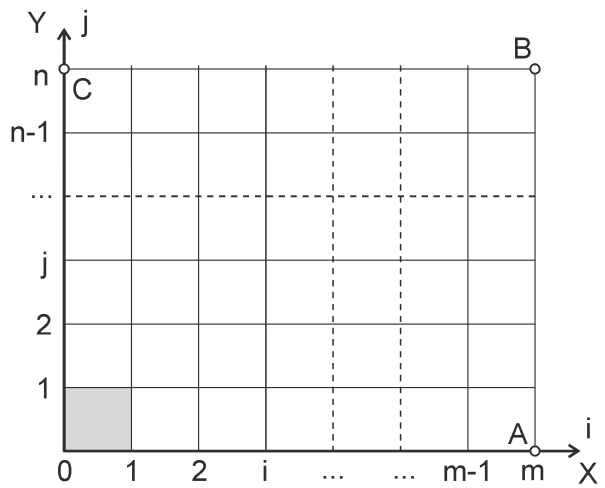

Рис. 1. **Топологічна схема сітки**

Площу довільної опуклої чотирикутної клітини аналогічно опишемо як півсуму площ двох прямокутників EFGH і KLMN (рис. 2):

$$S_{ABCD} = \frac{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j})}{2} + \frac{(x_{i+1,j} - x_{i,j+1})(y_{i+1,j+1} - y_{i,j})}{2} \qquad (2)$$

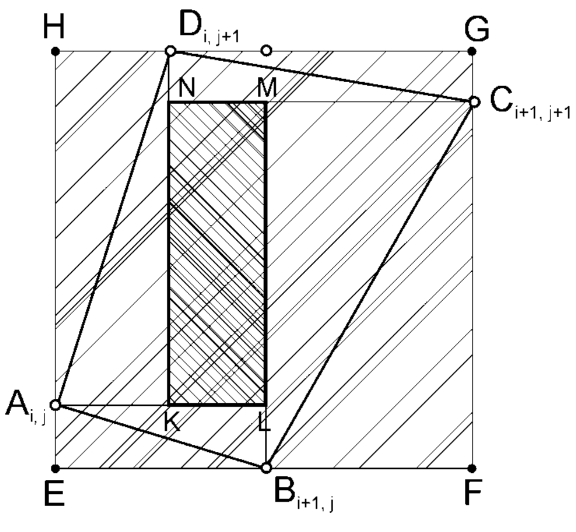

Рис. 2. **Площа довільного чотирикутника**

Рівність площ усіх клітин в плані описується або як рівність кожної пари суміжних клітин, або як незмінна величина S:

$$S = \frac{a \times b}{m \times n} \qquad (3)$$

де a, b – довжини сторін плану;
m, n – число розбиття сторін плану (рис. 1).

Загальна система рівнянь, що пов’язує координати вузлів у плані, складається з двох частин. Перша частина системи описує рівновагу всіх внутрішніх вузлів сітки плану. Друга частина описує рівність площ клітин у плані. Для однозначного розв’язання задачі число невідомих координат вузлів повинно відповідати числу рівнянь системи.

Число рівнянь рівноваги вузлів налічує $2(m-1)(n-1)$. Число рівнянь, що забезпечує рівність площ клітин, налічує $(mn-1)$. Число невідомих координат внутрішніх вузлів налічує $2(m-1)(n-1)$. Число невідомих координат контурних вузлів налічує $2(m-1)+2(n-1)= 2(m+n-2)$. Звідки можна визначити різницю між числом невідомих координат і числом рівнянь:

$$l=2(m+n-2)-mn+1==2(m+n)-mn-3 \qquad (4)$$

Рівняння (4) у системі координат *Omnl* описує гіперболічний параболоїд, горизонтальними перерізами якого є гіперболи. Величини *o, m,n,l* є цілочисельними та додатними. Тобто, для однозначного розв’язання задачі необхідно додатково задати *l* координат контурних або внутрішніх вузлів.

Залежність між цілочисельними параметрами формули (4) можна уявити у вигляді дискретного каркаса гіперболічного параболоїда (рис.3, *а*). Перерізи цього параболоїда горизонтальними площинами *l=0; 1; 2; 3…*..показано на рис. 3 *б*. Точки цих перерізів, що збігаються з вузлами квадратної сітки з додатними параметрами *m* і *n*, визначають можливі сітки з заданою границею і топологією у плані, метричні параметри яких можна змінювати без зміни зовнішнього навантаження. З графіка видно, що такими є лише обмежені сітки (*m*x2) та (2x*n*). Тобто, при заданому контурі крайовими умовами і при заданій топології плоскої сітки з довільними параметрами *m* і *n*, і однаковими за площею чотирикутними клітинами.

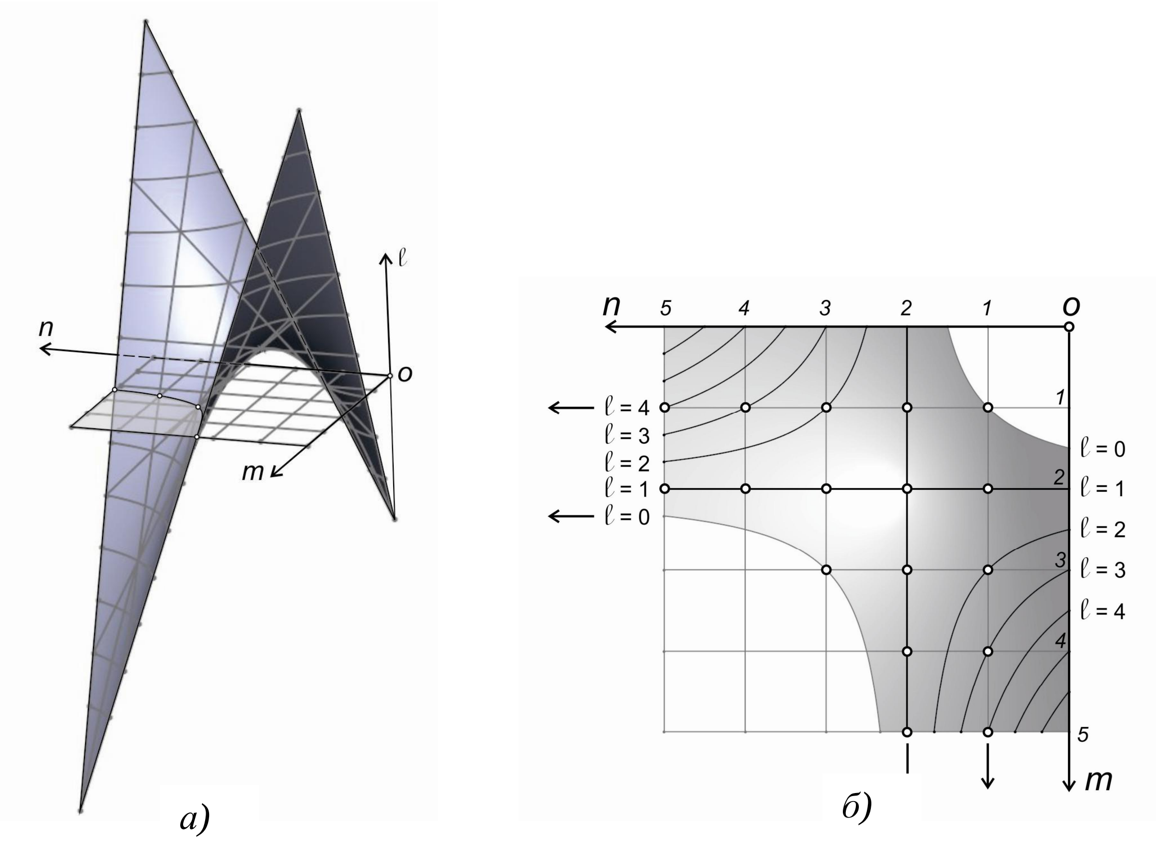

Рис. 3. **Гіперболічний параболоїд та його перерізи горизонтальними площинами**

Проаналізуємо, чи можна таку сітку побудувати при заданих не крайових, а початкових умовах. За початкові умови приймемо координати вершин довільного чотирикутника, площу якого можна визначити за рівнянням (2). На топологічній схемі (рис.1) йому відповідає заштрихована клітина. Для спрощення розрахунків приймемо $m=n$. Виконаємо параметричний аналіз задачі. Система рівнянь, що пов'язує координати вузлів сітки у плані так само, як і у попередній задачі складається з двох частин. Число рівнянь системи повинно відповідати числу невідомих (координат вузлів, площ клітин сітки у плані і т. інш.). Якщо число невідомих перевищує число рівнянь, з'являється можливість задавати додаткові початкові умови у вигляді координат вузлів. Число рівнянь рівноваги вузлів налічує:

$$2(m-1)^2 \tag{5}$$

Число рівнянь, що забезпечує рівність площ налічує:

$$m^2-4 \tag{6}$$

При цьому вузли А $_{m,0}$; $B_{m,n}$; $C_{0,n}$ (рис. 1) не задані при складанні рівнянь системи, оскільки дві координати кожного з цих вузлів можуть належати тільки одному рівнянню рівності площі і такі координати не можуть бути визначеними. Число невідомих дорівнює подвійному числу вузлів сітки за виключенням заданих і неврахованих кутових вузлів:

$$2(m+1)-14 \tag{7}$$

Задача розв'язується тільки у тому випадку, коли число невідомих дорівнює числу рівнянь, або перевищує їх на цілочисельну додатну величину l. В останньому випадку завжди можна додатково задати l координат вузлів як додаткові початкові умови. Число l визначається як різниця між числом невідомих та числом рівнянь:

$$l=-m^2-8m-10 \tag{8}$$

Графіком залежності (8) є парабола другого порядку, яку показано на рис. 4. З графіка видно, що додатні цілочисельні величини l можуть бути тільки у межах:

$$2 \le m \le 6 \tag{9}$$

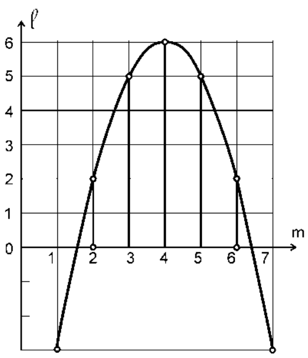

Рис. 4. **Графік залежності додаткових умов від числа клітин сітки в плані**

З графіка також видно, яке число додаткових координат вузлів сітки у плані потрібно задати для кожного значення m, що знаходиться у вказаних межах (9).

Висновки. В результаті дослідження доведено, що варіювання метричних параметрів сітки з чотирикутними клітинами у плані при дискретному моделюванні заданої поверхні і при незмінному рівномірно розподіленому навантаженні на вузли сітки можливо тільки при обмеженому числі вузлів сітки.

1. Ковальов С.М., Гумен М.С., Пустюльга С.І., Михайленко В.Є., Бурчак І.Н. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Спеціальні розділи. Випуск 1. [Текст] / Ковальов С.М., Гумен М.М., Пустюльга С.І. та інш. // Київ – Луцьк,2005.– С. 253.
2. Золотова А.В. Дискретна кускова інтерполяція точок при формуванні поверхонь в архітектурі [Текст] / Золотова А.В. // Дис…кандидата технічних наук: 05.01.01. – К.: КНУБА, 2015.– С. 142.