УДК 539.3

Максимович В.М.[1], Соляр Т.Я.[2], Приходько О.С.[1]
[1] Луцьк. держ. техн. ун-т, Луцьк,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

ЧИСЛОВИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ПІДКРІПЛЕНИХ ОТВОРІВ У ПЛАСТИНКАХ.

Максимович В.М., Соляр Т.Я., Приходько О.С. Числовий алгоритм Визначення напружень біля підкріплених отворів у пластинках. Розроблено алгоритм визначення напружень у пластинках із пружними включеннями, які послаблені отворами. Алгоритм базується на модифікованих інтегральних рівняннях, за яких умови на межі отвору задовольняються тотожно. Інтегральні рівняння розв'язано чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено дослідження напружень біля включень із отворами різної форми. Встановлено характерні особливості у розподілі напружень залежно від форми включень та отворів.

Ключові слова: пластинки, включення, отвори, напруження, модифіковані інтегральні рівняння

Максимович В.М., Соляр Т.Я., Приходько О.С. Численный алгоритм определения напряжений возле подкрепленных отверстий в пластинках. Разработан алгоритм определения напряжений в пластинках с упругими включениями, которые послаблены отверстиями. Алгоритм базируется на модифицированных интегральных уравнениях, при которых условия на границе отверстия удовлетворяются тождественно. Интегральные уравнения решены численно с помощью метода механических квадратур. Проведено исследование напряжений возле включений с отверстиями различных форм. Установлены характерные особенности в распределении напряжений в зависимости от формы включений и отверстий.

Ключевые слова: пластинки, включения, отверстия, напряжения, модифицированные интегральные уравнения

V. M. Maksymovych, T. Ya. Solyar, O. S. Prykhod'ko. Numerical algorithm for determining stresses near reinforcements openingS in the plates. An algorithm to determine the stresses in the plates with elastic inclusions, weathered by the openings, is developed. The algorithm is based on the modified integral equations, for which the conditions on the opening boundary are satisfied identically. The integral equations are solved numerically by the method of mechanical quadratures. Investigation of the stresses near inclusions with openings of different forms is carried out. The singularities in distribution of stresses, depending on the form of inclusions and openings, are determined.

Keywords: plates, inclusions, openings, stresses, modified integral equations

Постановка проблеми. Для зменшення концентрації напружень біля отворів їх підкріплюють пружними кільцями. Для проведення розрахунків на міцність пластинок із підкріпленими отворами необхідно дослідити концентрацію напружень. Така проблема зводиться до визначення напружень у пластинках із пружними включеннями, які додатково послаблені отворами.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Дослідженню напруженого стану пластинок із включеннями присвячено значно менше праць, ніж однорідним пластинкам [2-8]. Підхід до дослідження таких задач на основі методу граничних інтегральних рівнянь (МГІР) запропоновано у [8-10].

Невирішені частини проблеми. Застосування МГІР стосовно до пластинок нескінченних розмірів (зокрема, для півплощин й смуг) та для випадків, коли включення розміщені близько до отвору або отвори мають складну форму, ускладнюється. Тому в літературі для окремих класів таких пластинок із отворами і тріщинами побудовані модифіковані інтегральні рівняння, за яких умови на вибраній межі пластинки задовольняються тотожно [1, 9].

Метою дослідження є розробка підходу до розрахунку напружено-деформованого стану (НДС) пластинок із включеннями, що послаблені отворами, який базується на модифікованих інтегральних рівняннях. Для реалізації підходу побудовано розв'язок типу Гріна, який входить в інтегральне рівняння.

Основні результати дослідження. Розглядається задача про дослідження НДС ізотропної пластинки з пружними включеннями з іншого матеріалу, які послаблені отворами. Приймемо: пластинка займає область D, обмежену контуром L_D; пластинка перебуває під дією прикладених на нескінченності зусиль; в точках c_j, які належать включенню та матриці, діють зосереджені сили $\left(X_j, Y_j\right)$, $(j=1,...,J)$; пластинка перебуває в умовах плоского напруженого стану, межа отвору у включенні вільна від навантажень. Пружні сталі для включень позначатимемо через G_j, χ_j $(j=1,...,J)$, а матриці – через G_0, χ_0. Тут G_j – модулі зсуву, $\chi_j=(3-\nu_j)/(1+\nu_j)$, ν_j –

коефіцієнти Пуассона. Вважатимемо також, що на межі поділу матеріалів має місце ідеальний механічний контакт.

Основні співвідношення. Виразимо загальний розв'язок поставленої задачі через комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ [6]. Використаємо співвідношення для визначення вектора напружень $q_\Gamma = N_\Gamma + iT_\Gamma$ у довільній точці z кривої Γ на дотичній до неї площинці через комплексні потенціали [6, 9]:

$$q_\Gamma(z) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + d\bar{z} / dz[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \tag{1}$$

де dz – диференціал змінної z на кривій, N_Γ, T_Γ – нормальні і дотичні проекції вектора на кривій Γ.

Похідні від переміщень пластинки з пружними характеристиками G, χ на кривій Γ визначатимемо за формулами

$$2G(u' + iv') = \chi\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - d\bar{z} / dz[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}], \tag{2}$$

де $u' + iv' = d(u + iv) / dz$.

Модифіковані інтегральні рівняння. Розглянемо пластинку, що займає область *D*, межа цієї області ненавантажена, пластинка перебуває під дією зусиль на нескінченності (для пластинок нескінченних розмірів) та зосереджених сил.

Введемо у розгляд потенціали Мусхелішвілі Φ_j^D, Ψ_j^D, $j = 1, 2$, які в довільній точці $t = c \in D$ мають полюси

$$\Phi_j^D \sim \frac{C_j}{c - z}, \ \Psi_j^D \sim \frac{\overline{C_j}}{c - z} - \frac{\bar{c}C_j}{(c - z)^2}. \text{ при } C_1 = 1, C_2 = i.$$

Тоді інтегральне зображення загального розв'язку задачі теорії пружності для області *D* запишемо у вигляді [4]

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_L \left[R(t)\Phi_1^D(z,t) + I(t)\Phi_2^D(z,t) \right] ds + \Phi_D(z), \\ \Psi(z) &= \int_L \left[R(t)\Psi_1^D(z,t) + I(t)\Psi_2^D(z,t) \right] ds + \Psi_D(z), \end{aligned} \tag{3}$$

де $L = L_1 + L_2 + ... + L_J$, $\Phi_D(z)$, $\Psi_D(z)$ – потенціали для суцільної області *D*, які відповідають прикладеному до пластинки зовнішньому навантаженню.

За побудовою потенціали (3) автоматично задовольняють умову відсутності напружень на межі області D та вектор напружень q, що відповідає цим потенціалам, є непервними при переході через контур L.

Інтегральні рівняння матимуть вигляд

$$\beta_k 2\pi \frac{ds}{dt}(iR - I) + S_k(\Phi, \Psi) = f, \quad z \in L_k, \ k = 1, ..., J, \tag{4}$$

де $f = -S_k(\Phi_D, \Psi_D)$,

$$S_k(\Phi, \Psi) = \alpha_k \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - d\bar{z} / dz\left[z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \right], \ z \in L. \tag{5}$$

$$\alpha_k = \frac{H_k \chi_0 - \chi_k}{H_k - 1}, \ \beta_k = \frac{1}{2}\frac{H_k(\chi_0 + 1) + (\chi_k + 1)}{H_k - 1}, \ H_k = G_k / G_0.$$

Тут функції $\Phi, \Psi -$ визначаються за формулами (3) при $z \in L$, у яких сингулярні інтеграли розглядаються в сенсі головного значення за Коші.

Числовий алгоритм розв'язування інтегральних рівнянь. Для розв'язування рівняння (5) використаємо метод механічних квадратур. При цьому рівняння контуру інтегрування запишемо параметрично у вигляді $\xi = \alpha(\theta)$, $\eta = \beta(\theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$. Розглянемо випадок одного включення. Введемо вузлові точки на контурі $z_\nu = \tilde{x}_\nu + i\tilde{y}_\nu$, $t_k = x_k + iy_k$, де $\tilde{x}_k = \alpha(\tau_k)$, $\tilde{y}_k = \beta(\tau_k)$, $x_k = \alpha(\theta_k)$, $y_k = \beta(\theta_k)$, $\theta_k = Hk$, $\tau_n = \theta_n - H/2$, $H = 2\pi/N$, $N-$ кількість вибраних вузлових точок.

Поклавши у співвідношеннях (4) $x = \tilde{x}_\nu$, $y = \tilde{y}_\nu$, $\nu = 1,...,N$ і замінивши інтеграли квадратурною формулою прямокутників, яка для періодичних підінтегральних функцій, що можуть містити ядро Коші є формулою підвищеної точності, отримаємо систему рівнянь вигляду

$$\beta_k 2\pi \left(\frac{ds}{dt}\right)_\nu (iR_\nu - I_\nu) + H\sum_{n=1}^{N}(S_{\nu n}^{(R)} R_n + S_{\nu n}^{(I)} I_n) = f_\nu, \quad \nu = 1,...,N, \tag{6}$$

де

$$S_{\nu n}^{(R)} = S_k(\Phi_1^D(z_\nu, t_n), \Psi_1^D(z_\nu, t_n)), \quad S_{\nu n}^{(I)} = S_k(\Phi_2^D(z_\nu, t_n), \Psi_2^D(z_\nu, t_n)),$$

$$f_\nu = -S_k(\Phi_D(z_\nu), \Psi_D(z_\nu)), \quad R_n = R(x_n, y_n)s_n^{'}, I_n = I(x_n, y_n)s_n^{'}, \quad s_n^{'} = (ds/d\theta)\big|_{\theta=\theta_n}.$$

Тут враховано, що функції $S_k(\Phi,\Psi)$ містять інтеграли типу Коші.

Доповнимо цю систему рівняннями, які отримані заміною параметрів t і τ на $t + H/2$ і $\tau + H/2$, відповідно.

$$\beta_k 2\pi \left(\frac{ds}{dt}\right)_n (iR_n - I_n) + H\sum_{\nu=1}^{N}(S_{n\nu}^{(R)} R_\nu + S_{n\nu}^{(I)} I_\nu) = f_n, \; n = 1,...,N. \tag{7}$$

Системи рівнянь (6) і (7) є замкненими. Визначивши величин R, I у вузлових точках потенціали (а далі й напруження) у довільних точках пластинки знайдемо за квадратурними формулами. Під час знаходження напружень на межі поділу необхідно додатково врахувати складові, що виникають при граничному переході у формулі Сохоцького.

Включення, послаблене отвором. Розглянемо нескінченну пластинку з включенням, яке послаблене отвором, межа якого Γ вільна від навантаження. За область D виберемо нескінченну площину з отвором, обмеженим контуром Γ. Задача визначення допоміжних потенціалів $\Phi_j^D(z,c)$, $\Psi_j^D(z,c)$ зводиться до знаходження потенціалів Φ_0, Ψ_0, які мають полюси

$$\Phi_0 \sim \frac{C}{c-z}, \; \Psi_0 \sim \frac{\overline{C}}{c-z} - \frac{\bar{c}C}{(c-z)^2}, \tag{8}$$

за умови, що відповідні до цих потенціалів напруження на межі області D відсутні. Тут C – довільна комплексна стала.

Розглянемо детальніше випадок, коли отвір має форму еліпса. Для побудови потенціалів Φ_0, Ψ_0 необхідно розглянути задачу теорії пружності для пластинки із еліптичним ненавантаженим отвором за умови, що у внутрішніх точках комплексні потенціали $\varphi_0(z)$ та $\psi_0(z)$ мають такі особливості [1]:

$$\varphi_0 \sim -C\ln(z-c), \quad \psi_0 \sim \overline{C}\ln(z-c) + \bar{c}C\frac{1}{z-c}, \tag{9}$$

де C, c – довільні комплексні сталі

Розв'язок знаходимо з використанням методу Мусхелішвілі [6]. Для цього використовуємо функцію z=ω(ς), що конформно відображає область D на зовнішність одиничного круга, де $\omega(\zeta) = R(\zeta + m/\zeta)$, $R = (a+b)/2$, $m = (a-b)/(a+b)$, a і b – півосі еліптичного отвору, $|\varsigma| > 1$.

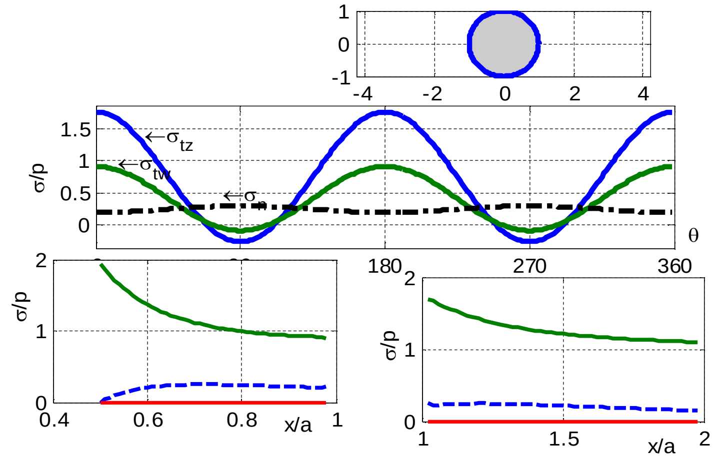
Комплексні потенціали $\varphi(\zeta) = \varphi_0(\omega(\zeta))$, $\psi(\zeta) = \psi_0(\omega(\zeta))$ в площині ζ матимуть вигляд [1]

$$\varphi(\varsigma) = U(\varsigma) + \overline{\gamma C}\frac{\varsigma_*^2}{(\varsigma - \varsigma_*)}, \quad \psi(\zeta) = V(\varsigma) + \gamma C\frac{1}{(\varsigma - \varsigma_0)} - \frac{\zeta(1+m\zeta^2)}{\zeta^2 - m}\varphi'(\zeta), \tag{10}$$

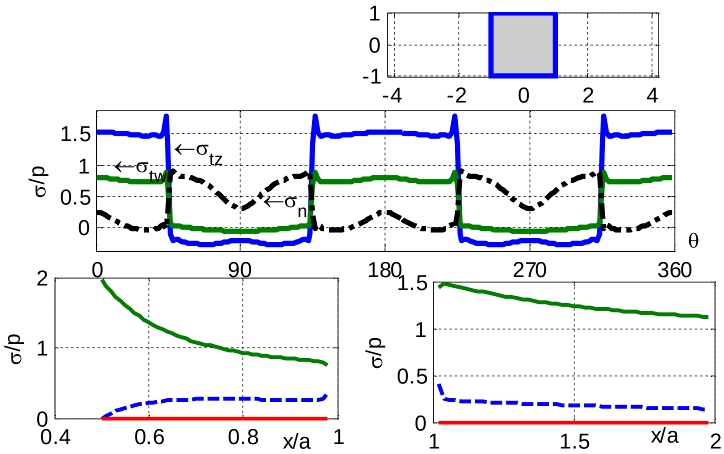
де $c=\omega(\zeta_0)$, $\varsigma_* = 1/\bar{\varsigma}_0$, $\gamma = \dfrac{\overline{\omega(\varsigma_0)} - \bar{\omega}(1/\varsigma_0)}{\omega'(\varsigma_0)}$,

$$U(\varsigma) = -C\left[\ln(\varsigma-\varsigma_0) + \ln\left(\frac{\varsigma-\varsigma_*}{\varsigma}\right)\right], \quad V(\varsigma) = \bar{C}\left[\ln(\varsigma-\varsigma_0) + \ln\left(\frac{\varsigma-\varsigma_*}{\varsigma}\right)\right].$$

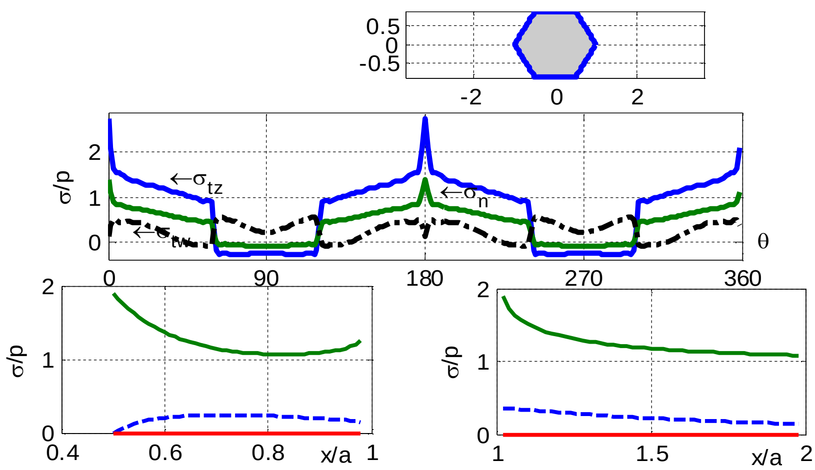
Результати розрахунків. Розглянемо пластинку із включенням, яке додатково послаблене круговим отвором радіуса R. Результати розрахунків для випадку, коли включення кругове радіуса *a* при *R=a/2*, $E_0 = 0,5E$ наведено на рис. 1.а.



а)



б)



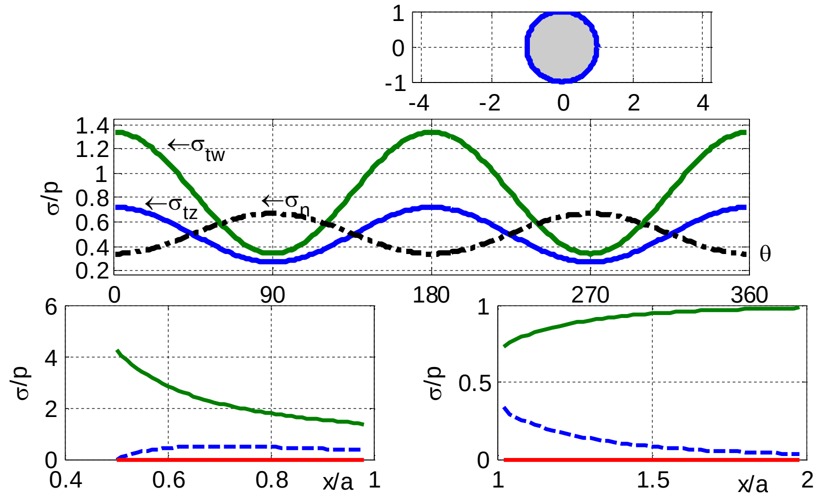
в)

Рис. 1. Кругове (а), квадратне (б) та шестикутне (в) включення із круговим отвором

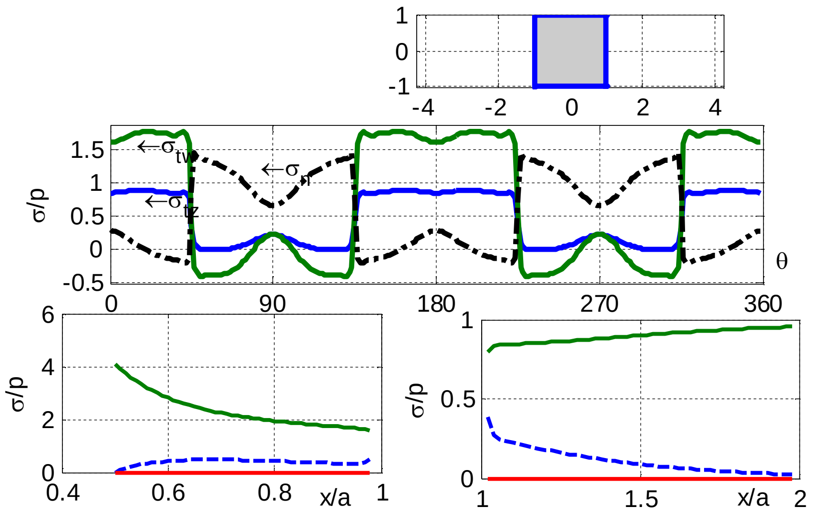
Аналогічні результати для квадратного і шестикутного включень наведено на рис.1.б,в.

На основі наведених графіків випливає, що: при м'якшому включенні концентрація напружень біля отвору зменшується. Для включень усіх форм виявилось, що коефіцієнт концентрації напружень (ККН) ≈ 2. Тобто, форма включень мало вплинула на ККН. Значно більше впливає форма включень на напруження на межі поділу матеріалів.

Аналогічні результати для жорскішого включення при $E_0 = 2E$ наведено на рис. 2, 3



а)



б)

Рис. 2. Кругове (а) та квадратне (б) включення із круговим отвором

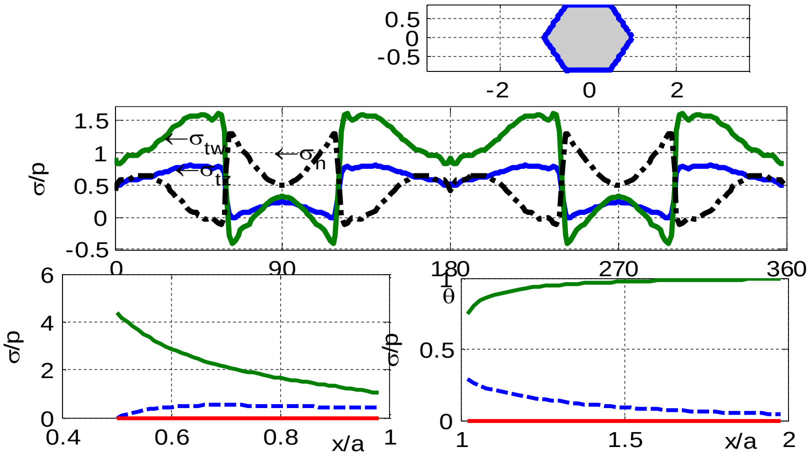


Рис. 3. Шестикутне включення із круговим отвором

На основі аналізу отриманих результатів розрахунків випливає, що: при жорсткішому включенні концентрація напружень біля отвору зростає. Для включень усіх форм виявилось, що коефіцієнт концентрації напружень (ККН) ≈ 4. Тобто, форма включень мало вплинула на ККН. Значно більше впливає форма включень на напруження на межі поділу матеріалів, причому напруження найбільші в околі кутових точок.

Висновки. Побудовано модифіковані інтегральні рівняння для пластинок із пружними включеннями, які додатково послаблені отворами. Основна перевага таких рівнянь полягає в тому, що граничні умови на деяких межах задовольняються тотожно, що дозволяє підвищити точність розрахунків та зменшити об'єм обчислень. Розв'язування інтегральних рівнянь виконано чисельно з використанням методу механічних квадратур. Проведене тестування вказує на високу точність та ефективність розробленого підходу. З використанням розробленого алгоритму досліджено напруження у включеннях та в їх околі залежно від форми включень. Встановлено характерні особливості у розподілі напружень залежно від форми включень та їх пружних характеристик.

1. Божидарнік В.В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластині з отвором складної форми / В.В. Божидарнік, О.В. Максимович // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 1. – С. 19-26.
2. Довідниковий посібник. / під заг.ред. В.В. Панасюка, Т12: Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації / В.І. Маруха, В.В. Панасюк, В.П. Силованюк Під ред. акад. НАН України В.В. Панасюка – Львів: Вид-во "Сполом", 2009. – 262 с.
3. Космодамианский А.С. Анизотропные многосвязные среды / А.С. Космодамианский // Учебн. Пособие. – Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1970. – С. 233.
4. Максимович В.М. Визначення напружень біля пружних включень у пластинках складної форми / В.М. Максимович, О.О. Приходько, Т.Я. Соляр // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2014. – **57**, №3. – С. 109-118.
Те саме: *Maksymovych V. M., Prykhod'ko O. S., Solyar T. Ya.* Determination of stresses near elastic inclusions in plates of complex shape // J. Math. Sci. – 2016. – **217**, No. 3. – P. 271–282.
5. Мартинович Т.Л. Крайові умови в інтегральній формі задачі про напружений стан в анізотропній пластинці з несиметрично підкріпленим краєм / Т.Л. Мартинович, В.К. Божидарник // Вісник Львів. у-ту ім. Франка. Сер. мех.-мат. – 1972. – Вип. 7. – С. 112-118.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили // М.: Наука, 1966. – С. 708.
7. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н. Савин // К.: Наук. думка, 1968. – С. 888.
8. Савін Г.М. Довідник з концентрації напружень / Г.М. Савін, В.І. Тульчій // К.: Вища школа, 1976. – С. 412.
9. Саврук М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук // К.: Наук. думка, 1989. – С. 248.
10. Саврук М. П. Сингулярные интегральные уравнения плоских задач теплопроводности и термоупругости для кусочно-однородной плоскости с трещинами / М.П. Саврук, В.М. Зеленяк // Физ.-хим. механика материалов. – 1986. – **22**, № 3. – С. 82–88.