УДК 518
Димова Г.О.
Херсонський національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ЧУТЛИВОСТІ ТА СТІЙКОСТІ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Димова Г.О. Дослідження чутливості та стійкості моделей динамічних систем. При рішенні задачі факторизації кореляційної функції вихідних процесів системи визначена матриця коефіцієнтів моделі процесів, що протікають в системі, елементи якої мають помилки, так як отримані експериментально. Тому реальна матриця системи включає в себе розрахункову матрицю, точнісні характеристики системи та рівень шумів. Задача стійкості моделі динамічної системи визначається структурою цієї матриці, її рангом, типом та кратністю коренів характеристичного поліному. Розглядаються три підходи вирішення задачі стійкості моделі динамічних систем та питання чутливості цих систем при збурених основних параметрів.
Ключові слова: модель, вектор, оцінка, управління, чутливість, стійкість, збурення, матриця, власне значення, незалежність, нормування.

G.O. Dymova. Investigation of the sensitivity and stability of models of dynamic systems. In solving the problem of factorization of the correlation function of the output processes of a system, was determined a matrix of coefficients of the model of processes occurring in the system whose elements have errors because as obtained experimentally. Therefore, the real matrix of the system includes a calculation matrix, accurate system characteristics and noise level. The stability problem of a dynamic system model is determined by the structure of this matrix, its rank, type and multiplicity of the roots of the characteristic polynomial. Three approaches to solving the problem of stability of the dynamic systems model and the question of the sensitivity of these systems with perturbations of the basic parameters are considered.
Keywords: model, vector, estimation, control, sensitivity, stability, perturbation, matrix, eigenvalue, independence, normalization.

А.О. Дымова. Исследование чувствительности и устойчивости моделей динамических систем. При решении задачи факторизации корреляционной функции выходных процессов системы определена матрица коэффициентов модели процессов, протекающих в системе, элементы которой имеют ошибки, так как полученны экспериментально. Поэтому реальная матрица системы включает в себя расчетную матрицу, точностные характеристики системы и уровень шумов. Задача устойчивости модели динамической системы определяется структурой этой матрицы, ее рангом, типом и кратностью корней характеристического полинома. Рассматриваются три подхода решения задачи устойчивости модели динамических систем и вопросы чувствительности этих систем при возмущениях основных параметров.
Ключевые слова: модель, вектор, оценка, управление, чувствительность, устойчивость, возмущение, матрица, собственное значение, независимость, нормировка.

Постановка проблеми. При рішенні задачі ідентифікації багатомірної динамічної системи виходили з того, що модель її динаміки може бути задана векторноматричним диференційним рівнянням [1, 2]:

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t)\vec{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}(t)\vec{\mathbf{m}}(t) + \vec{\mathbf{n}}(t)\,, \tag{1}$$

де $\mathbf{A}(t)$ – матриця коефіцієнтів моделі процесів, що протікають в системі;
$\mathbf{D}(t)$ – матриця управління;
$\vec{\mathbf{x}}(t)$ – вектор стану;
$\vec{\mathbf{m}}(t)$ – вектор управляючих впливів;
$\vec{\mathbf{n}}(t)$ – вектор збуджуючих впливів.

Оцінка матриці $\mathbf{A}(t)$ визначалась на основі факторизації кореляційної матриці вихідних сигналів системи [2], а оцінка вектора управління $\vec{\mathbf{m}}(t)$ знаходилась проекційним методом [3] в припущенні, що система має оптимальне управління і $\vec{\mathbf{n}}(t)$ – багатомірний білий шум, потужність якого залежить від режимів роботи динамічної системи.

Заключним етапом є дослідження чутливості отриманої моделі до збуджень і її стійкість.

Вирішення задачі. Вирішення задачі цього етапу потребує врахування того, що елементи матриці $\mathbf{A}(t)$ визначаються з експерименту і тому вони можуть мати помилки. В цьому випадку матриця $\mathbf{A}(t)$, оцінку якої отримано при вирішенні задачі факторизації кореляційної функції вихідних процесів системи, є наближенням матриці, відповідної точним вимірам [2].

Враховуючи точнісні характеристики вимірювальної системи та рівень шумів, величина помилки ε елементів a_{ij} матриці $\mathbf{A}(t)$, що дорівнює $\varepsilon \le \delta$. Це можна відобразити у вигляді реальної матриці системи як суму двох матриць: $\mathbf{A}(t)$ – реальна розрахункова матриця без врахування шумів і матриця $\mathbf{E}$ – такого ж порядку як і матриця $\mathbf{A}$ та розглядати матрицю ($\mathbf{A}(t)$ + $\mathbf{E}$). Елементи матриці $\mathbf{E}$:

$$|e_{ij}| \le \varepsilon. \tag{2}$$

Повне вирішення поставленої задачі може бути зведено до алгебраїчної проблеми власних значень матриць $\mathbf{A}(t)$ та ($\mathbf{A}(t) + \mathbf{E}$) і складається не тільки у визначенні власних значень і власних векторів матриць $\mathbf{A}(t)$ та ($\mathbf{A}(t) + \mathbf{E}$), але також в оцінці можливих варіацій власних значень всіх матриць класу ($\mathbf{A} + \mathbf{E}$), що задовольняє умові (2). При цьому фундаментальна алгебраїчна проблема власних значень заключається у визначенні значень λ в рівнянні

$$\mathbf{A}x = \lambda x \tag{3}$$

системи n однорідних лінійних рівнянь з n невідомими. Рівняння (3) можна представити у вигляді

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})x = 0, \tag{4}$$

де $\mathbf{I}$ – ($n \times n$) одинична матриця.

При довільному λ система рівнянь (4) має тільки рішення $x = 0$. Нетривіальне рішення існує тоді, коли матриця ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$) особлива, тобто коли її визначник

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0, \tag{5}$$

Розкриваючи визначник в лівої частині рівняння (5) за степенями λ, отримаємо

$$a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n = 0 \tag{6}$$

– характеристичне рівняння і характеристичний поліном. В полі комплексних чисел це рівняння завжди має n коренів, які можуть бути комплексними навіть при дійсній матриці $\mathbf{A}$ та будь-якої кратності, аж до n [3, 4, 5]. Вони називаються власними значеннями або характеристичними числами. Кожному значенню λ відповідає принаймні одне нетривіальне рішення x. Якщо ранг матриці ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$) менше ніж ($n$-1), то буде не менш двох лінійно незалежних векторів, що задовольняє рівнянню (4). Якщо x – рішення рівняння (4), то kx – теж рішення при будь-якому k. Навіть, якщо ранг ($\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$) дорівнює n-1, власний вектор, що відповідає λ, визначений з точністю до довільного множника, тому здійснюється нормування. Найбільш зручними способами нормування є:

а) сума квадратів модулів компонент вектора $\mathbf{x}$ дорівнює одиниці;
б) найбільша за модулем компонента вектора $\mathbf{x}$ дорівнює одиниці;
в) сума модулів компонент вектора $\mathbf{x}$ дорівнює одиниці.

Способи а) та в) – нормування, що рідко зустрічаються.

Формули (1-6) справедливі і для транспонованої матриці $\mathbf{A}^T$. при цьому мають місце співвідношення:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}^T\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}; \qquad \det(\mathbf{A}^T - \lambda\mathbf{I}) = 0; \\ &\mathbf{A}^T\mathbf{y}_i = \lambda_i\mathbf{y}_i; \quad \mathbf{y}_i^T\mathbf{A} = \lambda_i\mathbf{y}^T; \qquad , \\ &\mathbf{x}_i^T\mathbf{y}_j = 0 \qquad (\text{якщо}\, \lambda_i \ne \lambda_j). \end{aligned} \tag{7}$$

Зауважимо, що, так як $\mathbf{x}_i$ та $\mathbf{y}_j$ можуть буди комплексними векторами, ($\mathbf{x}_i^T\mathbf{y}_j$) не є скалярним добутком в звичайному сенсі. Дійсно, маємо

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j^T\mathbf{x}_i, \tag{8}$$

а не

$$\mathbf{x}_i^T \mathbf{y}_j = \overline{\mathbf{y}_j^T \mathbf{x}_i} \,. \tag{9}$$

Якщо **x** – комплексний, то може статися, що

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 0 \,, \tag{10}$$

в той час як даний скалярний добуток завжди позитивний для всіх ненульових **x**.

Рішення задачі стійкості моделі динамічної системи (1) в загальному випадку визначається структурою матриці **A**, її рангом, типом та кратністю коренів характеристичного поліному і може бути вирішено методом теорії збурень різного порядку власних значень і власних векторів [1, 4, 5, 6, 7].

Є три підходи до вирішення задачі стійкості моделі (1):

1) на основі алгебраїчних функцій і теорії векторних та матричних норм [5];
2) на основі функцій комплексного аргументу, слідства теореми Коши – принципу аргументу [8, 9];
3) на основі теорем Гершгоріна [4].

Перший та другий підходи в термінах характеристичного поліному для кратних значень λ занадто грубі, так як поліном недостатньо відображує будову матриці (**A** + ε **E**). тому використовуємо третій підхід – на основі теорем Гершгоріна; він має більшу практичну цінність і враховує структуру матриць **A** і (**A** + ε **E**), що випливає з теореми 1:

Будь-яке власне значення матриці **A** лежить принаймні в одному з кіл з центром a_{ii} і радіусами

$$r_i = \sum_{j \neq i} | a_{ij} | \tag{11}$$

на комплексній площині.

З цього витікає, що у будь-якого власного значення λ є хоча б один ненульовий **x**, що **Ax** = λ**x**. В обраному **x** проведемо нормування (б) за r-ій найбільшій за модулем компоненті вектора **x**:

$$\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, ..., \ x_{r-1}, 1, x_{r+1}, ..., \ x_n) \,,$$

де $|x_i| \leq 1, \ i \neq r$.

Звідси витікає:

1)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{rj} x_j = \lambda x_r = \lambda \tag{12}$$

2)

$$\left| \lambda - a_{rj} \right| \leq \sum_{j \neq r} | a_{rj} x_j | \leq \sum_{j \neq r} | a_{rj} \| x_j | \leq \sum_{j \neq r} | a_{rj} | \tag{13}$$

і λ лежить в одному з цих кіл.

Теорема 2 [4]. Якщо φ кіл теореми 1 утворюють зв'язну область, то в цій зв'язній області знаходиться рівно φ власних значень матриці **A**. З доказу теореми та теорії алгебраїчних функцій витікає, що корені характеристичного поліному для матриці (**A** + ε **E**) являються безперервними функціями від збурення ε та радіусами $\varepsilon \, r_i$ для ε від 0 до 1 і при $\varepsilon = 1$. Аналогічні висновки і результати можна отримати, якщо розглядати транспоновану матрицю $\mathbf{A}^T$ замість матриці **A**.

Для визначення стійкості моделі необхідно проаналізувати власні значення матриці (**A** + ε **E**), використовуючи її жорданову канонічну форму. Для простих власних значень λ_i матриці, що має елементарні дільники [3, 4, 6, 10] матриць **A** та (**A** + ε **E**) діагональні. Отже існує матриця **H** така, що ($\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H}$) = diag ($\lambda_i$), причому стовпці **H** складають повну систему правих власних векторів x_i, а рядки $\mathbf{H}^{-1}$ складають повну систему лівих власних векторів $\mathbf{y}_j^T$.

При нормуванні $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$ [4, 11] ($\|\bullet\|_2$ – евклідова норма) можна взяти в якості i-го стовпці матриці **H** власний вектор $\mathbf{x}_i$ і тоді i-ий рядок матриці $\mathbf{H}^{-1}$ буде

$$\mathbf{y}_i^T \,/\, \mathbf{s}_i\,, \tag{14}$$

де $\mathbf{s}_i = \mathbf{y}_i^T \mathbf{x}_i$ при $i = (1, 2, \ldots, n)$.

Тоді

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{E})\mathbf{H} = \mathrm{diag}\lambda + \varepsilon\begin{vmatrix} \beta_{11}/s_1 & \beta_{12}/s_1 & \ldots & \beta_{1n}/s_1 \\ \beta_{21}/s_2 & \beta_{22}/s_2 & \ldots & \beta_{2n}/s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1}/s_n & \beta_{n2}/s_n & \ldots & \beta_{nn}/s_n \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Згідно теореми 1 Гершгоріна отримаємо, що власні значення лежать в колах з центрами $\lambda_i + \varepsilon\beta_i / s_i$ та радіусами $\sum\limits_{j\neq i} |\,\beta_{ij} / s_i\,|$, де $\beta_{ij} = \mathbf{y}_i^T\mathbf{E}\mathbf{x}_j$, так як $\|\mathbf{E}\|_2 \le n$, то

$$\left|\beta_{ij}\right| = \left|\mathbf{y}_i^T\mathbf{E}\mathbf{x}_j\right| \le \left\|\mathbf{y}_i\right\|_2\left\|\mathbf{E}\mathbf{x}_j\right\|_2 \le \left\|\mathbf{E}\right\|_2 \le \left\|\mathbf{E}\right\|_2\left\|\mathbf{y}_i\right\|_2\left\|\mathbf{x}_j\right\|_2 \le n\,. \tag{16}$$

За визначенням

$$(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{E})\mathbf{x}_i(\varepsilon) = \lambda_i(\varepsilon)\mathbf{x}_i(\varepsilon) \tag{17}$$

і так як $\lambda(\varepsilon)$ та всі компоненти $\mathbf{x}_i(\varepsilon)$ представляються рядами, що сходяться, прирівняємо члени при однакових степенях ε в рівнянні (17) [5]. Прирівнюючи коефіцієнти при ε та враховуючи, що

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i + k_1\varepsilon + k_2\varepsilon^2 + \ldots\,, \tag{18}$$

взявши перше наближення ряду

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i + k_1\varepsilon \tag{19}$$

і так як

$$k_1 = \frac{\mathbf{y}_i^T\mathbf{E}\mathbf{x}_i}{\mathbf{y}_i^T\mathbf{x}_i} = \frac{\beta_{11}}{s_1}\,; \tag{20}$$

з (16) витікає

$$\left|k_i\right| = \frac{n}{\left|\mathbf{s}_i\right|}\,. \tag{21}$$

Тобто при достатньо невеликому ε головний член λ_i дорівнює $k_1\varepsilon$ і чутливість цього власного значення в першу чергу залежить від $\mathbf{s}_i$.

Система і відповідно її модель стійкі, якщо корені характеристичного рівняння збуреної матриці **A** – (матриці **A** + ε **E**) лежать в лівій напівплощині комплексної площини (лівіше уявної осі – осі ординат). При цьому центри кіл Гершгоріна є діагональні елементи матриці (**A** + ε **E**), а радіуси визначаються згідно рівняння (11) для матриці (**A** + ε **E**).

Для обчислення власних значень матриць **A** та (**A** + ε **E**) існують розроблені чисельні методи: метод обертань для симетричних матриць, метод А.М.Данилевського з перетворенням вихідної матриці в матрицю Фробеніуса, метод О.Н.Крилова на основі тотожності Гамільтона-Келі, метод Леверрьє-Фаддеєва на основі формул Ньютона для сум степенів коренів характеристичного рівняння матриці [11, 12, 13, 14]. Останні три метода приблизно однакові з точки зору обчислювальних витрат і не потребують умови симетричних матриць.

Основні результати і висновки.

1. Стійкість моделі динамічної системи визначається розташуванням власних значень на комплексній площині.
2. Чутливість моделі до збурень параметрів моделі можна в першому приближенні оцінити першим членом в розкладанні в ряд $\lambda(\varepsilon)$.
3. Змінення запасу стійкості можливо прорахувати одним з трьох методів (А.М.Данилевського, О.Н.Крилова, Леверрьє-Фаддеєва) по зсувах власних значень матриці ($\mathbf{A} + \varepsilon\ \mathbf{E}$) на комплексній площині, змінюючи ε від 0 до 1 для нормованих значень векторів.

1. Ту Ю. Современная теория управления / Юлиус Ту – М.: Машиностроение, 1971. – 472 с.
2. Марасанов В.В. Прогнозирование структуры динамических систем / В.В. Марасанов, О.И. Забытовская, А.О. Дымова – Вестник ХНТУ № 1 (44) - 2012, С. 292-302.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Феликс Рувимович Грантмахер – М.: Наука, 1988. – 552 с.
4. Ланкастер П. Теория матриц / Питер Ланкастер – М.: Наука, 1978. – 280 с.
5. Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж.Х. Уилкинсон – М.: Наука, 1972. – 565 с.
6. Деруссо П. Пространство состояний в теории управления / Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. ; пер. с англ. Р. Т. Янушевского – М.: Наука, 1970. – 620 с.
7. Математические основы теории автоматического регулирования. Т.1. / В. А. Иванов, В. С. Медведев, Б. К. Чемоданов, Б. К. Ющенко. – М.: Высшая школа, 1977. – 808 с.
8. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. / И. И. Привалов. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
9. Теория автоматического регулирования. Книга 1. Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования. / Под ред. д-ра техн. наук, проф. В. В. Солодовникова. – М.: Машиностроение, 1967. – 770 с.
10. Арбиб М.М., Мейнс Э.Дж. Основания теории систем: разложимые системы / М.М. Арбиб, Э.Дж.Мейнс – Математические методы в теории систем. – М.: Мир, 1979. – С.7-49.
11. Фадеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева. – М.: Физматгиз, 1963. – 736 с.
12. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики. / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
13. Березин И.С. Методы вычислений. Т.2. / И.С. Березин, Н.П.Жидков. – М.: Физматгиз, 1962. – 639 с.
14. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник. / Игорь Гайдышев. – СПб.: Питер, 2001. – 752 с.
15. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. – М.: Наука, 1981. – 464 с.