УДК 519.876.5
В.В. Лишук, Й.Р. Селепина, Л.В. Ящинський, С.М. Костючко
Луцький національний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ЕЙЛЕРА В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

В.В. Лишук, Й.Р. Селепина, Л.В. Ящинський, С.М. Костючко. Застосування методу Ейлера в задачах динаміки. У статті показано застосування явного методу Ейлера на прикладі математичної моделі руху повітряної кулі, що описується нелінійним диференціальним рівнянням. Для опису та аналізу фізичних процесів застосовано мову програмування *FORTRAN* з графічним редактором *GRAPHER*.
Ключові слова: повітряна куля, алгебраїчні та диференціальні рівняння, інтегрування рівнянь.

В.В. Лышук, И.Р. Селепина, Л.В. Ящинский, С.М. Костючко. Применение метода Эйлера в задачах динамики. В статье показано применение явного метода Эйлера на примере математической модели движения воздушного шара, которая описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Для описания и анализа физических процессов применен язык программирования *FORTRAN* с графическим редактором *GRAPHER*.
Ключевые слова: воздушный шар, алгебраические и дифференциальные уравнения, интегрирование уравнений.

W.W. Lyshuk, Y.R. Selepyna, L.W. Jashchynskyy, S.M. Kostiutchko. Application of the Euler method in dynamics problems. In the article the application of the explicit Euler method is shown on the example of a mathematical model of the balloon motion, which is described by nonlinear differential equations. The *FORTRAN* programming language with *GRAPHER* graphical editor is used for describing and analyzing physical processes.
Keywords: balloon, algebraic and differential equations, integration of equations.

Постановка проблеми. На сьогодні часто доводиться стикатися із задачами, розв'язок яких класичними методами неможливий. Це фізичні задачі, що описуються лінійними чи нелінійними диференціальними рівняннями зі звичайними або частинними похідними. Як відомо, розв'язком диференціального рівняння є певна функція або множина точок, що в залежності від кроку дискретизації і кінцевого часу інтегрування може сягати десятків-сотень тисяч точок, які необхідно розрахувати. Розв'язати таке рівняння вручну неможливо через величезний об'єм роботи. Тут слід застосувати інтегрування такого рівняння числовими методами [3, 4].

Якщо рівняння зі звичайними похідними розв'язуються явними чи неявними методами (Ейлера, Рунге-Кутта), то до рівнянь з частинними похідними слід застосовувати просторову дискретизацію за методами скінченних різниць або скінченних елементів. Це реалізується з допомогою персональних комп'ютерів з використанням відповідних математичних методів та програмування [1].

Аналіз досліджень. Класична математика пройшла довгий етап розвитку і досягла величезних успіхів у інтелектуальній культурі людства. Широке застосування ЕОМ в математичному моделюванні, розроблена теорія і значні практичні результати дають змогу говорити про обчислювальний експеримент, як про нову технологію і методологію наукових і практичних досліджень.

Відзначимо деякі переваги обчислювального експерименту в порівнянні з натурним. Обчис-лювальний експеримент, як правило, дешевший за фізичний. В цей експеримент можна легко вно-сити певні зміни. Його можна повторити ще раз, якщо це необхідно, і перервати в будь-який момент. В ході такого експерименту можна змоделювати умови, які не можна створити в лабораторії [3].

У ряді випадків проведення натурного експерименту затруднено, а іноді й неможливо. Часто проведення такого експерименту пов'язане з можливими непередбачуваними наслідками або з небезпекою для життя чи здоров'я людей. В цих випадках обчислювальний експеримент може стати основним засобом дослідження. З його допомогою виявляється можливим прогнозувати властивості нових, ще не створених конструкцій і матеріалів на стадії їх проектування, а також моделювати складні фізичні процеси. У той же час потрібно пам'ятати, що застосовування результатів обчислювального експерименту обмежене рамками прийнятої математичної моделі. На відміну від натурних досліджень, обчислювальний експеримент дає змогу накопичувати отримані результати [4].

Отож, поява ЕОМ дала потужний поштовх ще більш широкому впровадження чисельних методів в практику наукових і технічних розрахунків. Швидкість виконання обчислювальних операцій зросла в мільйони разів, що дало змогу вирішувати широкий клас математичних задач, які до цього практично не розв'язувались.

Виклад основного матеріалу й обґрунтування отриманих результатів. У нашому столітті літаків і ракет, для яких доступні будь-які висоти над поверхнею Землі, повітряні кулі, громіздкі, ненадійні і некеровані, вже відійшли в минуле, хоча колись саме вони дали людині можливість піднятися в повітря. Втім, у деяких випадках повітряні кулі дуже зручні і часто використовуються. Наприклад, з аеростата зручно навчати стрибків з парашутом, а метеорологи можуть досліджувати тиск, температуру і повітряні потоки в атмосфері за допомогою куль-зондів.

Побудуємо математичну модель задачі, в якій потрібно визначити швидкість піднімання кулі, максимальну висоту підйому у функції часу. При цьому задається деяка модель атмосфери, тобто закон зміни тиску, густини або температури в залежності від висоти.

По суті, ця задача полягає у знаходженні умови рівноваги кулі, на яку діє сила тяжіння Землі, виштовхувальна (архімедова) сила і сила опору середовища. Якщо виштовхуюча сила більша за силу тяжіння (різниця цих сил називають підйомної силою), куля піднімається вгору. Але в міру підйому зменшується густина повітря, а, отже, зменшуються виштовхувальна сила і сила опору.

При збільшенні радіуса кулі виштовхувальна сила зростатиме пропорційно кубу радіуса, а вага оболонки – пропорційно квадрату радіусу. Отже, виштовхувальна сила зростатиме швидше і, починаючи з певного радіусу, стане більшою, ніж вага оболонки. Тоді куля почне підніматися вгору.

Розглянемо задачу динаміки тіла змінної маси, а саме піднімання повітряної кулі, що тягне за собою складений канат. Маса кулі змінюється за законом:

$$m = m_0 + \frac{\gamma h}{g} = \frac{G_0 + \gamma h}{g}, \tag{1}$$

де m_0 – маса повітряної кулі без канату, кг, γ – питома погонна вага канату, Н/м, h – висота під'йому кулі, $g = 9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ – прискорення вільного падіння, G_0 – вага кулі, Н.

Об'єм кулі W, площу поперечного перерізу S будемо вважати незмінними, а довжину і міцність канату – достатніми.

Густина повітря, як відомо, зі збільшенням висоти зменшується. Опишемо цю зміну експоненційним законом:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\alpha h}, \tag{2}$$

де ρ_0 – густина повітря на поверхні землі (на рівні моря), кг/м^3, α – коефіцієнт зменшення густини, м$^{-1}$.

Як відомо, на кулю діють такі сили: підіймальна сила, сила тяжіння і сила опору повітря.

Для побудови моделі опишемо ці сили.

Архімедова сила:

$$P = \rho g W. \tag{3}$$

Сила тяжіння:

$$G = G_0 + \gamma h, \tag{4}$$

де G_0 – вага кулі, Н:

$$G_0 = S' z = 4\pi r^2 z. \tag{5}$$

Тут S' – площа поверхні шару, м^2, z – густина матеріалу кулі, Н/м^2, r – радіус кулі, м.

Сила опору повітря:

$$R = \frac{kS\rho V^2}{2}\ . \tag{6}$$

Тут k – коефіцієнт лобового опору, V – швидкість кулі, м/с, $S = \pi r^2$ – площа поперечного перерізу кулі, м^2.

Складемо диференціальне рівняння у формі Мещерського [1] для вертикального руху кулі:

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=-\frac{dh}{dt}\cdot\frac{dm}{dt}-\left(G_0+\gamma h\right)+\rho_0 e^{-\alpha h}\left(gW-0{,}5kS\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right). \quad (7)$$

Оскільки G_0, γ – постійні, то:

$$\frac{dm}{dt}=\frac{d\left(\left(G_0+\gamma h\right)/g\right)}{dt}=\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{dh}{dt}. \quad (8)$$

Поділивши рівняння (7) на (1) і врахувавши, що $\frac{d^2h}{dt^2}=\frac{dV}{dt}$ або $\frac{dh}{dt}=V$, після елементарних перетворень отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\nu}{dt}=\frac{-g+\left[\rho_0 e^{-\alpha h}g^2W-\left(\gamma+b\rho_0 e^{-\alpha h}G_0\right)V\left|V\right|\right]}{G_0+\gamma h},\\&\frac{dh}{dt}=V,\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

У системі рівнянь (9) врахована зміна знаку сили опору повітря при опусканні кулі, а множник *b* називається балістичним коефіцієнтом:

$$b=\frac{kS}{2m_0}=\frac{kgS}{2G_0}. \quad (10)$$

Сумісному чисельному інтегруванню підлягає система нелінійних рівнянь (9). Умовою кінця інтегрування можна вибрати досягнення максимальної висоти або отримання першого від’ємного значення швидкості *V*.

Для практичного користування запропонованою моделлю необхідно знати густину атмосфери ρ_0, коефіцієнт зменшення густини повітря α, радіус кулі r, густину матеріалу кулі z, погонну вагу канату γ, коефіцієнт лобового опору k. Боковим вітром нехтуємо.

Для моделі приймаємо такі параметри: $g=9{,}81\,кг/м^2$; $\pi=3{,}14$; $\rho_0=1{,}225\,кг/м^3$; $\alpha=0{,}0002\,м^{-1}$; $k=0{,}005$; $r=1{,}3\,м$; $z=0{,}7\,Н/м^2$; $\gamma=0{,}15\,Н/м$; $G_0=10\,Н$.

Інтегрування системи нелінійних диференціальних рівнянь (9) здійснено явним методом Ейлера. Крок часової дискретизації dt = 0,01 с. Для розрахунку перехідних процесів використано мову програмування *Visual FORTRAN* з графічним пакетом *GRAPHER*.

Метод Ейлера ґрунтується на заміні шуканої функції многочленом І-го степеня, тобто на лінійній екстраполяції. Розглянемо диференціальні рівняння нашої задачі з нульовими початковими умовами (куля нерухома).

$$\frac{dx}{dt}=f\left(x,t\right),\qquad x=V,\ h;\quad V\left(t_0\right)=V^{(0)},\quad h\left(t_0\right)=h^{(0)}. \quad (11)$$

Розглянемо інтервал $\left[a,\,b\right]$ і розіб’ємо його на *m* відрізків вузлами t_k з кроком Δt. Точний розв’язок рівняння (11) у точці t_{k+1} на будь-якому з окремих інтервалів $\left[t_k,\,t_{k+1}\right]$ $0\le k\le m-1$ можна представити у вигляді ряду Тейлора з центром у точці x_k.

Візьмемо до уваги, що функція $f\left(x,t\right)$ є n+1 разів диференційована за обома аргументами [4], тобто:

$$x\left(t_{k+1}\right)=x\left(t_k\right)+\Delta t\cdot x'\left(t_k\right)+\frac{\Delta t^2}{2!}\cdot x''\left(t_k\right)+\frac{\Delta t^3}{3!}\cdot x'''\left(t_k\right)+\ldots+\delta\left(\Delta t^{(n+1)}\right). \quad (12)$$

Похідні у (12) можна обчислити згідно (11) таким чином:

$$
\begin{gathered}
x'(t)=f(x,t); \qquad x''(t)=\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)+f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,t); \\
x'''(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right]\cdot f; \qquad x^{(n)}(t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[x^{(n-1)}(t)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{(n-1)}(t)\right]\cdot f.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

Якщо прийняти $x=x(t)$ за точний розв'язок (11), а потім підставити $t=t_k$ і відкинути залишковий член у (12), то отримаємо таке дискретне рівняння:

$$
\begin{gathered}
x_{k+1}(t)=x_k+\Delta t\cdot f(x_k,t_k)+\frac{\Delta t^2}{2!}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(x_k,t_k)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_k,t_k)\cdot f(x_k,t_k)\right]+\ldots+ \\
+\frac{\Delta t^n}{n!}\left[\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}}\cdot f(x_k,t_k)+\ldots+\frac{\partial^{(n-1)}}{\partial t^{(n-1)}}\cdot f(x_k,t_k)\cdot f^{(n-1)}\right],
\end{gathered}
\tag{14}
$$

де $0\le i\le n-1,\ x(t_0)=x^{(0)},\quad x=V,\ h$ задано в (11).

Рівняння (12) є двоточковою явною різницевою схемою, що дає змогу обчислити послідовно всі значення, починаючи з x_1 і закінчуючи x_m. Похибка апроксимації при цьому дорівнюватиме значенню відкинутого доданка у (12) при $\Delta t\to 0$.

Якщо прийняти n = 1, то отримаємо шуканий явний метод Ейлера, причому точність апроксимації буде $\delta\left(\Delta t^2\right)$:

$$
x_{k+1}=x_k+\Delta t\cdot f(x_k,t_k). \tag{15}
$$

На рис.1, 2 показано розроблену програму у середовищі *FORTRAN* та після компіляції програми біжучий файл результатів *.exe* на основі якого формується масив змінних, що записується і зберігається у файл з розширенням *.dat*.

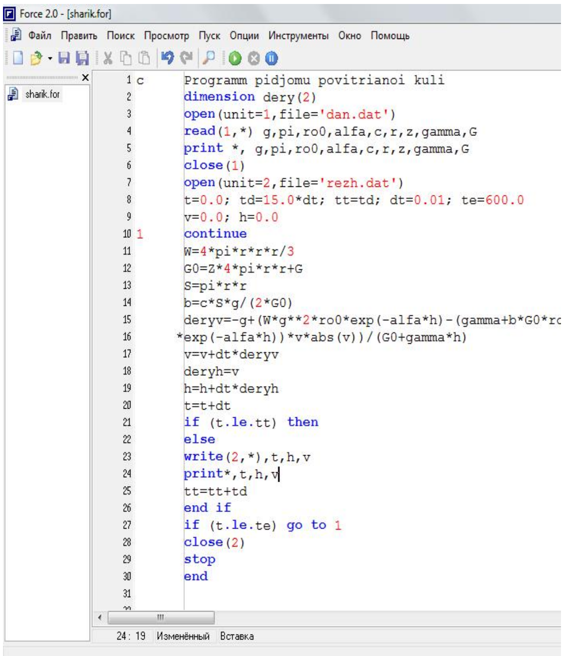

Рис.1. Вікно розробленої програми у середовищі *FORTRAN FORCE 2.0*.

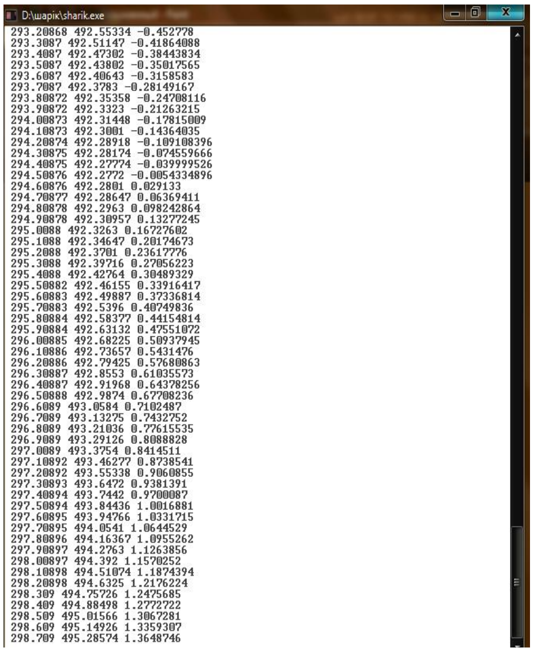

Рис.2. Вікно файлу результатів *.exe*.

Перехідні процеси швидкості кулі та її висоти в функції часу показано на рис.3, 4, а на рис.5 блок-схему програми.

Просимульовано підйом кулі. На рис.3, 4 видно, що максимальна швидкість кулі становить V = 21 м/с при часі t = 1,95 сек. Після цього швидкість зменшується і в момент часу t = 47 сек швидкість дорівнює нулю, а це означає, що вистота піднімання в нашому випадку є максимальною і становить *h* = 542 м. Далі швидкість кулі стає від’ємною, досягає свого максимального від’ємного значення *V* = - 3 м/с, що означає опускання повітряної кулі. Далі спостерігаємо згасаючі коливання з періодом 55 сек.

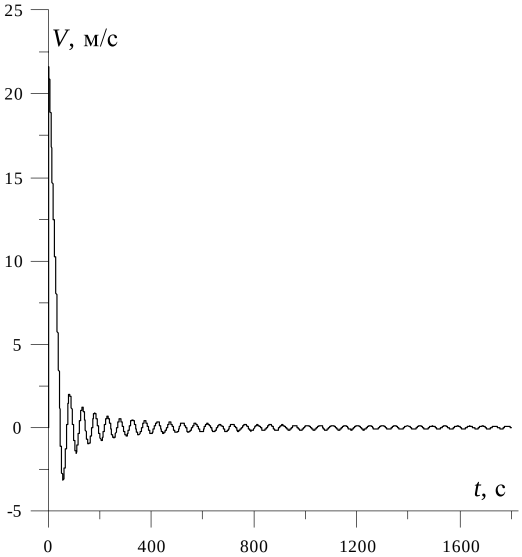

Рис.3. Графік швидкості під’йому кулі.

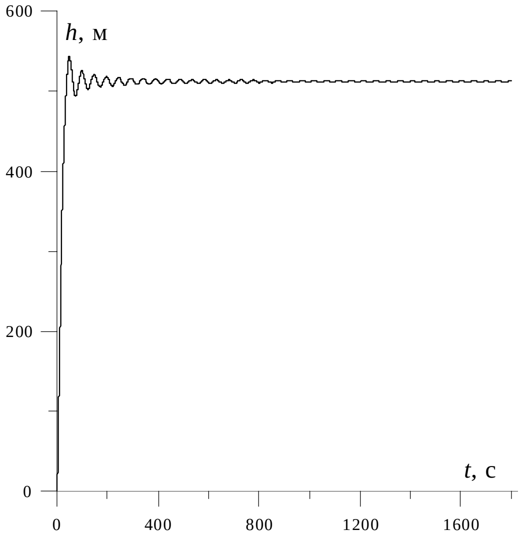

Рис.4. Графік висоти під’йому кулі.

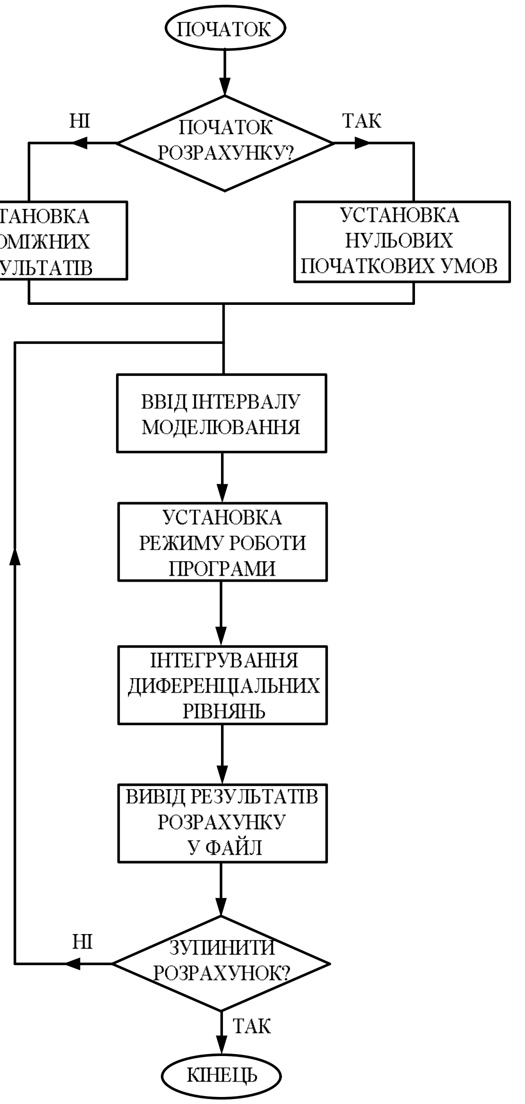

Рис.5. Блок-схема програми.

Усталене значення висоти кулі становить *h* = 511 м при *V* = 0 м/с. Слід зазначити, що незначне коливання висоти та швидкості в кінці інтервалу інтегрування зумовлене прийнятими вхідними допущеннями, похибкою методу, що в кінцевому результаті відповідають за похибку розрахунків, яка лежить в допустимих межах.

Система диференціальних рівнянь (9) становить модель піднімання повітряної кулі. Її переваги: диференціальні рівняння є безпараметричними і записаними в нормальній формі Коші.

Висновки. Комп’ютерна програма, виконана на основі розробленої математичної моделі за об’ємом пам’яті і обчислень проста, вигідно відрізняється можливістю здійснювати розрахунки з наперед заданою точністю. Розроблена математична модель дає можливість легко змінювати параметри досліджуваного об’єкту і тим самим аналізувати різні перехідні процеси. Так, при певних параметрах кулі вона може і не піднятись у повітря. Використання методів математичного моделювання та комп’ютерної симуляції дасть змогу відмовитись від натурних експериментів, які в багатьох випадках є складними і коштовними.

1. Бартеньев О. В. Современный Фортран / О. В. Бартеньев. – М. : Диалог-МИФИ, 1998. – 397 с.
2. Рыжиков Ю.И. Програмирование на Фортране POWERSTATION для инженеров / Ю.И. Рыжиков. Практическое руководство. Санкт Петербург: КОРОНА, 2000, 161 с.
3. Хвищун І. О. Програмування і математичне моделювання: Підручник / І. О. Хвищун. – К. : Видавничий Дім “Ін Юре”, 2007. – 544 с.
4. Чабан В. Чисельні методи / В. Чабан. Львів: В-во Нац. у-ту „Львівська політехніка”, 2001. – 186 с.