УДК 519.83

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫБОРА С ГРУППОВЫМ ПРОСМОТРОМ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОГО ПОДХОДА

С.И. Доценко

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

Рассмотрены три варианта игровой задачи выбора наилучшего элемента для случая, когда элементы разбиты на группы и за один шаг осуществляется одновременный просмотр элементов всей группы. Исходя из концепции сложного рационального поведения, для каждого из случаев найдены равновесные ситуации игры.

Ключевые слова: задача оптимального выбора, пороговая стратегия, групповой просмотр, равновесие Байеса-Нэша, цена анархии.

Розглянуто три варіанти ігрової задачі оптимального вибору для випадку, коли об'єкти розбито на групи та за один крок здійснюється одночасний перегляд всіх елементів групи. Виходячи з концепції складної раціональної поведінки, для кожного з випадків знайдено ситуації рівноваги у грі.

Ключові слова: задача оптимального вибору, порогова стратегія, груповий перегляд, рівновага Байєса-Неша, ціна анархії.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального выбора (известная также как задача секретаря) является одной из классических задач теории вероятностей и служит иллюстративным примером таких разделов математики, как оптимальная остановка марковских процессов, динамическое программирование, принятие решения в условиях риска и неопределенности. Рассмотрено обобщение задачи оптимального выбора на случай, когда просмотр осуществляется одновременно целыми группами. Для такой задачи группового просмотра рассмотрена конфликтная ситуация, когда в поиске наилучшего элемента задействованы два агента с различными интересами. Данная конфликтная ситуация описывается при помощи аппарата теории игр. Рассмотрены три модели взаимодействия агентов, которые могут возникать в ходе поиска. Для каждого из случаев найдены точки равновесия по Нэшу и вычислена цена анархии.

Целью данной статьи является построение иллюстративных примеров, демонстрирующих эффект анархии в игровой задаче оптимального выбора с групповым просмотром, в зависимости от степени информированности игроков.

ПОСТАНОВКА ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ ГРУППОВОГО ПРОСМОТРА

Вначале вкратце напомним классическую постановку задачи оптимального выбора. Пусть есть n объектов, упорядоченных по качеству. Пусть некто знакомится с данными объектами в случайном порядке (т. е. это означает, что все $n!$ перестановок объектов, задающих порядок, в котором они могут встретиться просматривающему, равновероятны). При просмотре каждого из объектов нужно принять решение — остановить просмотр на данном объекте в надежде, что он окажется наилучшим среди всех, либо отвергнуть его и продолжить просмотр. Возвращаться к ранее просмотренным (и отвергнутым) объектам нельзя.

В [1] было рассмотрено обобщение задачи оптимального выбора на случай, когда объекты разбиты на группы и осуществляется одновременный просмотр кандидатов в каждой группе. После просмотра кандидатов группы аналогично классической задаче в случае, если в группе присутствует наилучший кандидат среди всех ранее просмотренных элементов (такой элемент принято называть максимальным), нужно принять решение — выбрать этого кандидата и закончить просмотр либо же отвергнуть его и продолжить просмотр — возвращаться к ранее отвергнутым кандидатам нельзя.

Рассмотрим три варианта игры, которая базируется на задаче оптимального выбора с групповым просмотром, в которой нужно сделать удачный выбор не позже противника. Все три варианта игры имеют общие правила, приведенные ниже, и различаются только степенью информированности игроков.

Правила игры

1) В игре принимают участие два игрока.

2) Каждый игрок осуществляет выбор на своем множестве элементов.

3) В начале игры множество элементов каждого из игроков случайно (с равномерным распределением и независимо) делится на две группы.

4) Каждый из игроков осуществляет поиск максимального элемента, после чего одному или двум игрокам выплачивается выигрыш, который начисляется следующим образом:

4.1. Если удачный выбор сделал один из игроков (а другой — нет), то ему достается 1.

4.2. *Ничья.* Если удачный выбор сделали оба игрока, и номера групп совпадают (оба в 1-й либо оба во 2-й группе), то выигрыш делится между ними поровну и каждый получает 1/2.

4.3. *Приоритет раннего выбора.* Если удачный выбор сделали оба игрока, один в 1-й, другой во 2-й группе, то тому, кто сделал удачный выбор в 1-й группе достается 1, другой же не получает ничего.

4.4. *Обоюдный проигрыш.* Если оба игрока не сделали удачного выбора, то никто не получает ничего.

Следует заметить, что в то время, как задача оптимального выбора с групповым просмотром для случая двух групп является тривиальной (напомним, что в этом случае следует остановиться на максимальном элементе большей из двух групп независимо от порядка их следования), то игровая задача даже для такого простого случая не столь очевидна.

Аналогичная постановка игры для классической задачи оптимального выбора рассматривалась в [2]. Там было доказано, что оптимальные стратегии игроков, целью которых является найти наилучший элемент и при этом сделать остановку раньше противника, имеют пороговый вид —

пропускать все объекты с индексами, меньшими $z^* N$, где z^* — корень уравнения $-\ln(z) - z \cdot \ln^2\left(\frac{z}{2}\right) = 1$, примерно равный 0.295. Пороговое значение по сравнению с классической задачей $\frac{1}{e} \approx 0.368$ смещено влево, что можно объяснить «эффектом спешки». Ошибки неверного определения наилучшего элемента при этом возрастают, но это необходимо для того, чтобы опередить противника.

Рассмотренные ниже три примера игровой модификации поиска наилучшего элемента в задаче с групповым просмотром наглядно иллюстрируют вариативность поведения игроков в зависимости от степени их информированности.

Первый вариант — симметричная игра с неполной информацией

Пусть множества элементов игроков были разделены на две группы, и при этом каждый из игроков знает, каким образом произошло деление элементов его группы, и не знает, как были разделены элементы противника.

Оказывается, что в этой ситуации игрокам следует применять пороговые стратегии, которые заключаются в том, чтобы выбирать элемент из первой группы при условии, что доля этой группы от общего числа элементов составляет не менее заданного порога u. Согласно формуле полной вероятности, каждая такая пороговая стратегия порождает некоторое вероятностное распределение исходов игрока:

$$(p_1(u), p_2(u), 1 - p_1(u) - p_2(u)) = \left(\frac{1}{2} - \frac{u^2}{2}, u - \frac{u^2}{2}, u^2 - u + \frac{1}{2}\right), \qquad (1)$$

где первая компонента вектора описывает вероятность того, что был осуществлен удачный выбор из первой группы, вторая — удачный выбор из второй, а третья — это вероятность того, что наилучший элемент не был выбран.

Назовем распределение исходов (p_1', p_2') неэффективным, если существует другое распределение исходов (p_1, p_2), порожденное некоторой другой стратегией выбора, такое, что $p_1 \geq p_1'$, $p_1 + p_2 \geq p_1' + p_2'$, и одно из двух неравенств является строгим.

Поскольку более эффективное распределение исходов является лучшим ответом на любую стратегию противника, то стратегии, порождающие неэффективные исходы заведомо не являются эффективными.

Следует заметить, что все распределения исходов, порожденные не пороговыми стратегиями, являются неэффективными (доказательство этого факта простое, но громоздкое, поэтому не включено в данную статью). Поэтому равновесное состояние следует искать в классе пороговых стратегий. Поскольку распределение исходов выбора каждого из игроков случайно, то искомое равновесие является равновесием Байеса-Нэша.

Пусть оба игрока применяют пороговые стратеги, первый — с порогом x, второй — с порогом y; тогда, согласно приведенных правил игры, выигрыш первого игрока составит:

$$W_1(x,y) = p_1(x)(1-p_1(y)) + p_2(x)(1-p_1(y)-p_2(y)) + \frac{1}{2}p_1(x)p_1(y) + \frac{1}{2}p_2(x)p_2(y)\,. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), и группируя подобные по степеням x, имеем:

$$W_1(x,y) = \frac{1}{8}[(-4y^2+2x-5)x^2 + (6y^2-4y+4)x + (y^2+3)]\,. \quad (3)$$

Наилучший выбор значения порога первым игроком в ответ на выбор второго игрока составляет:

$$x_0 = BR(y) = \frac{3x^2-2x+2}{4x^2-2x+5}\,.$$

Равновесие Байеса-Нэша находится из системы $\begin{cases} x = BR(y) \\ y = BR(x) \end{cases}$.

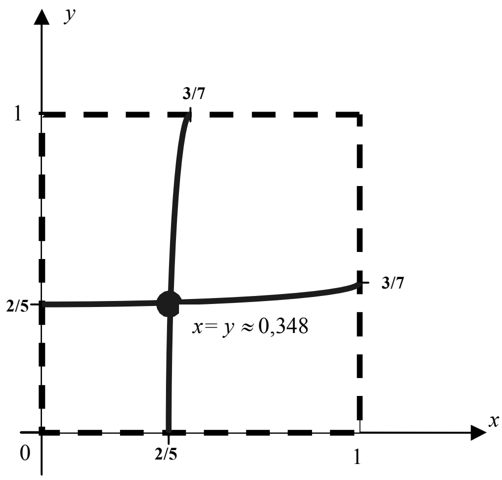

Рис. 1. Точка равновесия Нэша

Оказывается, что решение этой системы единственно и находится из соотношения x = BR(x), $y = x$, что, в свою очередь, сводится к решению кубического уравнения $4x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0$. Это уравнение на интервале [0;1] имеет единственный корень, примерно равный 0.348 (Рис. 1), при этом выигрыши игроков примерно равны 0.463.

Для сравнения, рассмотрим ситуацию корпоративного поведения игроков. В этом случае каждому из участников игры безразлично, кому именно достанется выигрыш — ему или другому игроку. Игроки должны минимизировать вероятность ситуации, в которой выигрыш не достанется никому. Вероятность такого события равна:

$$p_3(x)p_3(y) = \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\left(y^2 - y + \frac{1}{2}\right).$$

Данное выражение достигает минимума, равного $\frac{1}{16}$, при $x = y = \frac{1}{2}$. Значит, оба игрока должны применять пороговые стратегии со значением порога, равным $\frac{1}{2}$, тогда их суммарный выигрыш составит $\frac{15}{16} \approx 0.938$.

Таким образом, цена анархии равна $\frac{0.938}{2 \cdot 0.463} \approx 1.013$.

ВТОРОЙ ВАРИАНТ ИГРЫ — АСИММЕТРИЧНАЯ ИНФОРМИРОВАННОСТЬ

Пусть, как и в предыдущем варианте игры, игроки знают, как разделено их множество элементов, и не знают, как разделено множество элементов противника. Пусть второй игрок применяет какую-либо пороговую стратегию и исход его выбора (т. е. удачный выбор в 1-й группе, удачный выбор во 2-й группе либо неудачный выбор) становится известным первому игроку. Используя эту информацию, первый игрок выбирает пороговую стратегию, наиболее выгодную для себя. После этого исходы игроков сравниваются, и происходит выплата выигрыша согласно приведенным правилам.

Рассмотрим вспомогательный пример. Пусть принимающему решение игроку за удачный выбор в 1-й группе платят 1, а за удачный выбор во 2-й — $0 \le \alpha \le 1$. Тогда он должен выбирать значение порога, максимизирующее ожидаемую выплату:

$$p_1(u) + \alpha \cdot p_2(u) \to \max . \qquad (4)$$

Пусть исход выбора 2-го игрока — 1 (удачный выбор в 1-й группе). Тогда, узнав об этом, 1-й игрок решает задачу (4) с $\alpha = 0$ (удачный выбор во 2-й группе для него не имеет никакой ценности). В этом случае он полагает $x = 0$, и ожидаемые выигрыши игроков составляют V_2=1/4, V_1=3/4.

Пусть исход выбора 2-го игрока — 2 (удачный выбор во 2-й гр.). Тогда, узнав об этом, 1-й игрок решает задачу (4) с $\alpha = 1/2$ (при исходе 1 он заберет выигрыш целиком, а при исходе 2 — разделит поровну со 2-м игроком). В этом случае он полагает $x = 1/3$, и ожидаемые выигрыши игроков составляют $V_1 = 7/12$, $V_2 = 5/12$.

Пусть исход выбора 2-го игрока — 3 (неудача). Тогда, узнав об этом, 1-й игрок решает задачу (4) с $\alpha = 1$ (его одинаково устраивает как 1-й, так и 2-й исход). В этом случае он полагает $x = 1/2$, и ожидаемые выигрыши игроков составляют $V_1 = 3/4$, $V_2 = 0$.

Таким образом, второй игрок, полагая, что первый, узнав о его выборе, будет действовать оптимальным для себя образом, решает задачу максимизации своего ожидаемого выигрыша:

$$\frac{3}{4} p_1(y) + \frac{5}{12} p_2(y) = \frac{1}{24}\left(-14y^2 + 10y + 9\right) \to \max .$$

Данное выражение достигает максимума при $y_0 = \dfrac{5}{14}$, тогда распределение исходов 2-го игрока составляет

$$\left(p_1\left(\frac{5}{14}\right), p_2\left(\frac{5}{14}\right), p_3\left(\frac{5}{14}\right)\right) \approx (0.436,\, 0.293,\, 0.271).$$

Тогда ожидаемый выигрыш 2-го игрока составит

$$0.436 \cdot \frac{3}{4} + 0.293 \cdot \frac{5}{12} \approx 0.449\,,$$

а ожидаемый выигрыш 1-го

$$0.436 \cdot \frac{1}{4} + 0.293 \cdot \frac{7}{12} + 0.271 \cdot \frac{3}{4} \approx 0.483\,.$$

Выигрыш 1-го игрока, как и следовало ожидать, несколько больше, чем 2-го, поскольку он более информирован. При этом суммарный выигрыш игроков составляет 0.932, а цена анархии — $\dfrac{0.938}{0.932} \approx 1.006$.

Третий вариант игры — полная симметричная информированность

Пусть теперь каждый из игроков знает, как разделено на группы множество его элементов и множество элементов противника. Сложившуюся ситуацию будем описывать парой (x, y), где x и y — доли элементов первой группы для 1-го и 2-го игроков, соответственно. Проанализировав данную информацию, они независимо (и в тайне друг от друга) принимают решение о стратегии выбора. В данном случае стратегия каждого из игроков состоит из двух возможных альтернатив — из какой из двух групп выбирать максимальный элемент. Поэтому профиль стратегий игроков можно описать в виде $\mathrm{str}(i, j)$, где $(i, j) \in \{0;1\}$, а игра сводится к биматричной с такими матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} x\left(1 - \dfrac{y}{2}\right) & x \\ (1-x)(1-y) & \dfrac{(1-x)(1+y)}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} y\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) & (1-y)(1-x) \\ y & \dfrac{(1-y)(1+x)}{2} \end{pmatrix}.$$

Профиль стратегий str(1,1) является равновесным по Нэшу, если выполнены условия $A_{11}(x,y) \ge A_{21}(x,y)$, $B_{11}(x,y) \ge B_{21}(x,y)$, которые сводятся к системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x - \dfrac{2}{3}\right)\left(y - \dfrac{4}{3}\right) \le \dfrac{2}{9}, \\ \left(x - \dfrac{4}{3}\right)\left(y - \dfrac{2}{3}\right) \le \dfrac{2}{9}. \end{cases}$$

Профиль стратегий str(2,2) является равновесным по Нэшу, если выполнены условия, $A_{22}(x,y) \ge A_{12}(x,y)$, $B_{22}(x,y) \ge B_{21}(x,y)$, которые сводятся к системе неравенств

$$\begin{cases} y \le 1 - \dfrac{2}{x+3}, \\ x \le 1 - \dfrac{2}{y+3}. \end{cases}$$

Области равновесий по Нэшу, соответствующие профилям стратегий str(1,1) и str(2,2), показаны на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

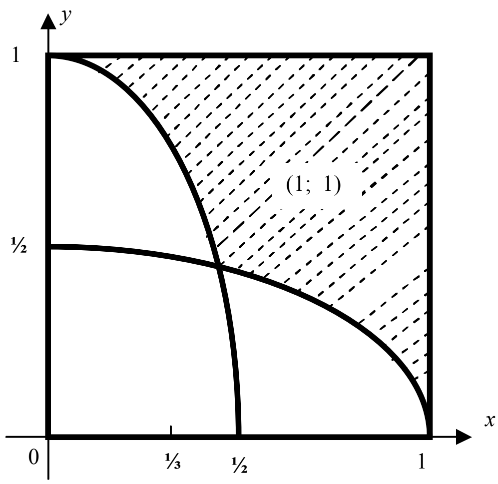

Рис. 2. Область равновесия для профиля str(1,1)

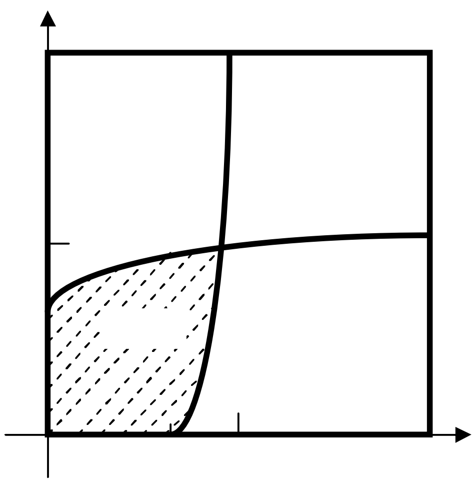

Рис. 3. Область равновесия для профиля str(2,2)

Ситуация (1, 2) является равновесной по Нэшу, если выполнены условия, $A_{12}(x,y) \ge A_{22}(x,y)$, $B_{12}(x,y) \ge B_{11}(x,y)$, которые сводятся к системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{4}{3}\right)\left(y-\dfrac{2}{3}\right) \ge \dfrac{2}{9}, \\ x \ge 1-\dfrac{2}{y+3}. \end{cases}$$

Поскольку игра симметричная, то область, в которой ситуация (2, 1) является равновесной по Нэшу, имеет вид

$$\begin{cases} \left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(y-\dfrac{4}{3}\right) \ge \dfrac{2}{9}, \\ y \ge 1-\dfrac{2}{x+3}. \end{cases}$$

Области равновесий по Нэшу, соответствующие профилям стратегий str(1,2) и str(2,1), показаны на рис. 4 и рис. 5 соответственно.

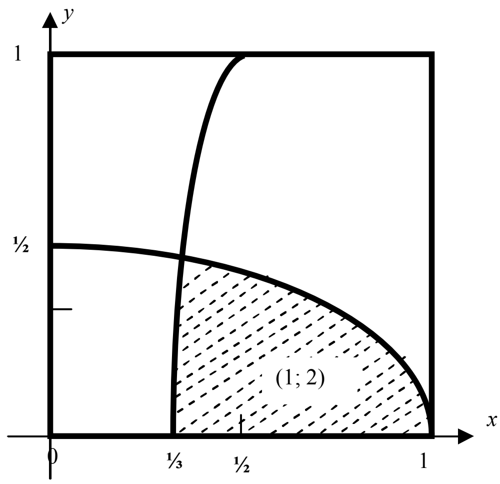

Рис. 4. Область равновесий для профиля str(1,2)

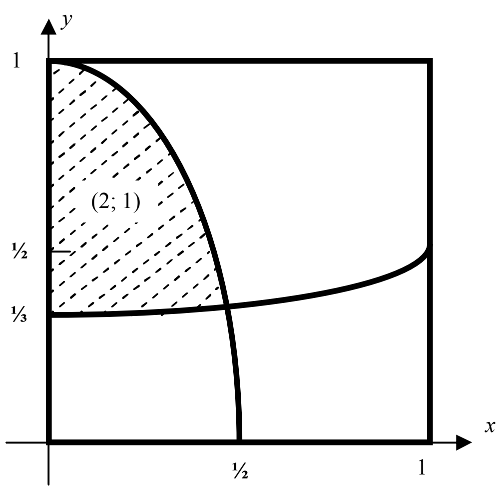

Рис. 5. Область равновесий для профиля str(2,1)

Области равновесия для профилей стратегий str(1,2) и str(2,1) имеют общую часть. Например, при x = 0.416, y = 0.416 имеет место биматричная игра с такими платежными матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} 0.329 & 0.416 \\ 0.341 & 0.413 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.329 & 0.321 \\ 0.416 & 0.413 \end{pmatrix}.$$

Данная игра имеет две точки равновесия (1, 2) и (2, 1), в чем легко убедиться непосредственно.

Выводы

Найденные ситуации равновесия Байеса-Нэша в задаче поиска наилучшего элемента с возможностью группового просмотра показывают, что в зависимости от постановки задачи вид равновесия может принимать различные формы — как точечное равновесие (примеры 1 и 2), так и семейство равновесий, описываемых замкнутой геометрической областью (пример 3), причем в первых двух случаях имеет место незначительный эффект анархии.

1. Bruss T. Sum the odds to one and stop / T. Bruss // The annals of probability. — 2000. — Vol. 28, No. 3. — P 1384–1391.
2. Мазалов В. Математическая теория игр и ее приложения / В. Мазалов. — СПб.: Изд-во «Лань», 2010. — 446 с.

UDC 519.83

SOLUTION OF THE PROBLEM OF OPTIMAL CHOICES WITH A GROUP BROWSING BY A GAME-THEORETIC APPROACH

S.I. Dotsenko

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Introduction. The problem of optimal choice in the case when the objects are divided into groups and carried out the simultaneous viewing of candidates in each group was considered by Bruss T. If watching the group of candidates is similar to the classical problem and the group is presented by the best candidate among all previously viewed items (such an element is called a maximum) to make a decision — choose this candidate and finish viewing or reject it and continue — the returning to the previously rejected candidates prohibited.

In this case, the optimal rule for selecting the best candidate based on the so-called «choice theorem» (or «Bruss theorem»).

For the particular case of two groups the search strategy is trivial — namely to ignore the smaller group and to view the bigger one. However, if this case is considered as two person game, the problem appeared to be intriguing.

The purpose of the article is to find Nash equilibrium for two persons game, associated to group search secretary problem at the following set of rules.

1) Each player makes his choice at his own set of elements.

2) At the beginning the set of searched elements are divided at random into two subsets according to uniform distribution.

3) Each of two players searches the best element (i.e. solve the secretary problem for two groups). After that, the prize is paid to one or two players according to the following rules. If one of the players made his lucky choice and the other one not, then the first one got 1. If the both players made their lucky choice at the same group then they share the price and got 1/2 each. If one of the players got his lucky choice at the first group, and another one at the second group, then the first one got 1, and the second one got nothing.

Results. For the considered game the Bayes-Nash equilibrium is obtained for three different cases. Equilibrium points are shown at two-dimensional diagram. Depending on the problem statement, Nash equilibrium area may take different shapes — either single point (cases 1 and 2) or family of points inside the closed curve (case 3). In first two cases, the slight effect of anarchy is observed.

Conclusion. The results confirm the general principle, that the game situation solutions, based on even trivial optimization problems, makes this solutions to be complicated. Based on the concept of a complex rational behavior for each of the cases found equilibrium situations of the game.

Keywords: problem of optimal choice,threshold strategy, group search, Bayes-Nash equilibrium, the price of anarchy.

1. Thomas Bruss. Sum the odds to one and stop. *The annals of probability*, 2000, vol. 28, no. 3, pp. 1384–1391.
2. V. Mazalov. *Mathematical theory of games and it's applications*. Saint Peterburg: Lan, 2010, 446 p. (in Russian).

Получено 30.03.2015