

МЕТОД СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

С.В. Мельничук

Институт космических исследований НАН Украины и ГКА Украины

Исследована возможность применения метода структурно-параметрической идентификации систем с одним входом и одним выходом для построения аппроксимирующих моделей систем с несколькими входами и выходами. Предложен алгоритм, основанный на объединении моделей, соответствующих динамике исследуемого объекта по отдельным входам и отдельным выходам, в одну многосвязную модель.

Ключевые слова: системная идентификация, многосвязная система, частотные характеристики, аппроксимирующая модель.

Досліджено можливість застосування методу структурно-параметричної ідентифікації систем з одним входом та одним виходом для побудови апроксимуючих моделей систем з багатьма входами та виходами. Запропоновано алгоритм, заснований на об'єднанні моделей, які відповідають динаміці об'єкту дослідження за окремими входами та окремими виходами, в одну багатозв'язну модель.

Ключові слова: системна ідентифікація, багатозв'язна система, частотні характеристики, апроксимуюча модель.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из активно развиваемых направлений в теории идентификации линейных динамических систем являются частотные методы, основанные на использовании характеристик объектов в частотной области. Общим для методов этого направления являются исходные данные — частотные характеристики, получаемые в результате фильтрации экспериментальных выходных сигналов.

Теория и методы построения линейных стационарных моделей для объектов управления по частотным характеристикам имеют большую историю [1]. В ранних исследованиях по частотной идентификации разрабатываемые методы не учитывали влияния внешних возмущений либо предполагали их белозумными. Существенное продвижение в теории идентификации в условиях неопределенности было достигнуто в последние десятилетия и связано с разработкой конечно-частотного подхода [1 - 3]. В [1] был предложен метод, позволяющий находить модели линейных многосвязных систем в условиях ограниченной неопределенности, когда на внешние возмущения накладываются лишь условия их ограниченности по норме. Метод предполагал проведение параметрической идентификации: структура модели считалась априори известной.

Необходимость априорного знания структуры существенно ограничивает область возможных применений, а попытки построения моделей большой размерности в условиях неопределенности приводят к неустойчивости

получаемых решений из-за характерного для задач идентификации свойства некорректности.

В развитие конечно-частотного подхода [4, 5] был предложен метод структурно-параметрической идентификации, позволяющий строить редуцированные модели, аппроксимирующие поведение исходной системы с одним входом и одним выходом (англ.: single input single output — SISO) по выходному сигналу, а также исследован вопрос выбора размерности модели с точки зрения обеспечения корректности задачи [5].

Переход к идентификации аппроксимирующих моделей более низкого порядка, чем действительная исходная система, привел к необходимости разрешения ряда возникших проблем. Для устранения возможного попадания собственных чисел модели в область неустойчивости была предложена модификация метода [6]. Нерешенной оставалась проблема идентификации многосвязных систем, рассмотренная в данной работе.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть поведение исследуемого объекта задается линейной устойчивой стационарной динамической системой с несколькими входами и несколькими выходами (англ.: multiple input multiple output — MIMO) в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + \eta, \end{aligned} \quad t \in [0, \tau] \quad (1)$$

где $A \in R^{N \times N}$, $B \in R^{N \times M}$, $C \in R^{R \times N}$ — неизвестные матрицы системы, N — большая неизвестная размерность системы, M — количество входов, R — количество выходов, $x = x(t)$ — вектор состояния, $u = u(t) = (u_1(t) \dots u_M(t))^T$ — вектор входного сигнала, $y = y(t) = (y_1(t) \dots y_R(t))^T$ — вектор выходного сигнала, $\eta = \eta(t) = (\eta_1(t) \dots \eta_R(t))^T$ — аддитивный шум на выходе, τ — длительность интервала наблюдения. Исследователю доступны данные $u(t)$ и $y(t)$. Идентификация производится в условиях ограниченной неопределенности: $\|\eta(t)\| \leq \varepsilon$.

Искомым решением будет MIMO модель

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}x + \hat{B}u, \\ y &= \hat{C}x, \end{aligned} \quad (2)$$

с найденными матрицами $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, которая, в некотором смысле, наилучшим образом приближает исходную систему (1) по выходу $y(t)$ при любом входном $u(t)$ и для любых случайных реализаций $\eta(t)$, удовлетворяющих условию ограниченности по норме с заданным ε .

Метод идентификации многосвязной системы будет основываться на получении набора SISO подсистем для каждой пары входа и выхода с дальнейшим объединением их в одну систему.

Рассмотрим отдельную подсистему — i -ый вход, j -ый выход:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{ij}x + b_i u_i, \\ y_j &= c_j x + \eta_j, \end{aligned} \quad t \in [0, \tau] \quad (3)$$

где b_i — вектор-столбец, c_j — вектор-строка, A_{ij} — квадратная матрица размерности N_{ij} .

Алгоритм идентификации SISO системы (3) описан в [4-6]. Модель восстанавливается в Жордановой форме:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \hat{A}_{ij}x + \hat{b}_i u_i, \\ y_j &= \hat{c}_j x + \eta_j, \end{aligned} \quad t \in [0, \tau] \quad (4)$$

где \hat{b}_i и \hat{c}_j — соответствующие оценки, \hat{A}_{ij} — квадратная матрица размерности $\hat{N}_{ij} \leq N_{ij}$.

Матрица \hat{A}_{ij} не имеет кратных собственных чисел и является блочно-диагональной. Каждый блок отвечает комплексно-сопряженной паре собственных значений

$$\hat{\lambda}_{ij,p} = \hat{\alpha}_{ij,p} \pm i \hat{\beta}_{ij,p}.$$

Действительным собственным числам будут соответствовать блоки $\hat{\beta}_{ij,p} = 0$. Размерность \hat{N}_{ij} равна количеству собственных значений. Количество блоков P_{ij} соответственно будет не менее $\hat{N}_{ij} / 2$ и не более \hat{N}_{ij} .

$$\hat{A}_{ij} = \text{diag}(\hat{A}_{ij,p}), \quad \hat{A}_{ij,p} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_{ij,p} & \hat{\beta}_{ij,p} \\ -\hat{\beta}_{ij,p} & \hat{\alpha}_{ij,p} \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_{ij,p} < 0, \hat{\beta}_{ij,p} > 0, \quad p = 1, P_{ij}. \quad (5)$$

Векторы \hat{b}_i и \hat{c}_j блочные

$$\begin{aligned} x &= (\dots x_p \dots)^T, & x_p &= \begin{pmatrix} x_p^{\cos} & x_p^{\sin} \end{pmatrix} \\ \hat{b}_i &= (\dots \hat{b}_{i,p} \dots)^T, & \hat{b}_{i,p} &= \begin{pmatrix} b_{i,p}^{\cos} & b_{i,p}^{\sin} \end{pmatrix} \\ \hat{c}_j &= (\dots \hat{c}_{j,p} \dots), & \hat{c}_{j,p} &= \begin{pmatrix} c_{j,p}^{\cos} & c_{j,p}^{\sin} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad p = 1, P_{ij} \quad (6)$$

Инвариантными характеристиками класса эквивалентных моделей (4) будет набор собственных значений

$$\{\hat{\lambda}_{ij}\} = \left\{ \hat{\lambda}_{ij,1} \dots \hat{\lambda}_{ij,\hat{N}_{ij}} \right\},$$

а также набор коэффициентов $\{\hat{f}_{ij}\} = \left\{ \left\{ \hat{f}_{ij,1}^{\cos}, \hat{f}_{ij,1}^{\sin} \right\} \dots \left\{ \hat{f}_{ij,\hat{N}_{ij}}^{\cos}, \hat{f}_{ij,\hat{N}_{ij}}^{\sin} \right\} \right\}$ — произведения блоков \hat{b}_i, \hat{c}_j :

$$\begin{aligned}\hat{f}_{ij,p}^{\cos} &= \hat{c}_{j,p}^{\cos} \cdot \hat{b}_{i,p}^{\cos} + \hat{c}_{j,p}^{\sin} \cdot \hat{b}_{i,p}^{\sin}, \\ \hat{f}_{ij,p}^{\sin} &= \hat{c}_{j,p}^{\cos} \cdot \hat{b}_{i,p}^{\sin} - \hat{c}_{j,p}^{\sin} \cdot \hat{b}_{i,p}^{\cos}.\end{aligned}\quad (7)$$

На вход подсистемы подается сигнал в виде суммы гармоник различных частот. Количество гармоник равно $S_{ij} \geq \hat{N}_{ij}$.

$$u_i(t) = \sum_{s=1}^{S_{ij}} a_{i,s} \cdot \sin(\omega_{i,s}t + \varphi_{i,s}) \quad (8)$$

где $a_{i,s}, \omega_{i,s}, \varphi_{i,s}$ — соответственно, известные исследователю амплитуды, частоты и фазы. Полученный выходной сигнал пропускается через фильтр Фурье на этих же частотах. Получаем оценки частотных характеристик подсистемы:

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_{ij,k}(\tau) &= \frac{2}{a_{i,k}\tau} \int_0^{\tau} y_j(t) \sin(\omega_{i,k}t) dt, \\ \hat{\Psi}_{ij,k}(\tau) &= \frac{2}{a_{i,k}\tau} \int_0^{\tau} y_j(t) \cos(\omega_{i,k}t) dt,\end{aligned}\quad k = 1, S_{ij}. \quad (9)$$

В случае отсутствия в $\eta_j(t)$ гармоник, совпадающих по частоте с частотами фильтрации $\omega_{i,k}$, при $\tau \rightarrow \infty$ оценки сходятся к точным значениям:

$$\Phi_{ij,k} = \hat{\Phi}_{ij,k}(\infty), \quad \Psi_{ij,k} = \hat{\Psi}_{ij,k}(\infty). \quad (10)$$

Значения частотных параметров связаны с передаточной функцией подсистемы:

$$\Phi_{ij,k} = \operatorname{Re} W_{ij}(i\omega_{i,k}), \quad \Psi_{ij,k} = \operatorname{Im} W_{ij}(i\omega_{i,k}),$$

т.е. каждая гармоника входного сигнала после фильтрации дает оценку точного значения передаточной функции:

$$W_{ij}(p) = \frac{V_{ij}(p)}{Q_{ij}(p)} = \frac{v_{ij,\hat{N}_{ij}-1} p^{\hat{N}_{ij}-1} + \dots + v_{ij,1} p + v_{ij,0}}{p^{\hat{N}_{ij}} + q_{ij,\hat{N}_{ij}-1} p^{\hat{N}_{ij}-1} + \dots + q_{ij,1} p + q_{ij,0}}. \quad (11)$$

Нахождение коэффициентов полиномов находится из решения СЛАУ:

$$V_{ij}(i\omega_{ij,k}) - Q_{ij}(i\omega_{ij,k}) (\Phi_{ij,k} + i\Psi_{ij,k}) = 0, \quad k = 1, S_{ij}. \quad (12)$$

Нахождение всех корней полинома $Q_{ij}(p)$ дает набор собственных значений данной подсистемы $\{\hat{\lambda}_{ij}\} = \{\hat{\lambda}_{ij,1}, \dots, \hat{\lambda}_{ij,\hat{N}_{ij}}\}$.

Нахождение размерности \hat{N}_{ij} модели подсистемы производится по процедуре, описанной в [5]. Варьирование длительности наблюдения τ приводит к изменениям оценок частотных характеристик, что в свою очередь влечет изменение значений $\{\hat{\lambda}_{ij}\}$. Таким образом, каждому собственному числу соответствует некоторая область разброса значений. Размерность модели \hat{N}_{ij} выбирается такой, при которой вариация собственных значений мала, т.е. решение устойчиво.

После выбора \hat{N}_{ij} и выбора $\{\hat{\lambda}_{ij}\}$ из областей разброса для однозначной идентификации системы SISO остается найти

$$\{\hat{f}_{ij}\} = \left\{ \left\{ \hat{f}_{ij,1}^{\cos}, \hat{f}_{ij,1}^{\sin} \right\}, \dots, \left\{ \hat{f}_{ij,\hat{N}_{ij}}^{\cos}, \hat{f}_{ij,\hat{N}_{ij}}^{\sin} \right\} \right\}.$$

Это можно сделать из соотношения:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{P_{ij}} \tilde{R}_{ij,2}^{p,k} &= 2\Phi_{ij,k} = 2\hat{\Phi}_{ij,k}(\infty), \\ \sum_{p=1}^{P_{ij}} \tilde{R}_{ij,1}^{p,k} &= 2\Psi_{ij,k} = 2\hat{\Psi}_{ij,k}(\infty), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij,1}^{p,s} &= \left[f_{ij,p}^{\cos} \cdot (-\gamma_{ij,2}^{p,s}) + f_{ij,p}^{\sin} \cdot (-\gamma_{ij,3}^{p,s}) \right] \cdot \cos(\varphi_{i,s}) + \left[f_{ij,p}^{\cos} \cdot (-\gamma_{ij,1}^{p,s}) + f_{ij,p}^{\sin} \cdot (\gamma_{ij,4}^{p,s}) \right] \cdot \sin(\varphi_{i,s}), \\ \tilde{R}_{i,j,2}^{p,s} &= \left[f_{ij,p}^{\cos} \cdot (-\gamma_{ij,1}^{p,s}) + f_{ij,p}^{\sin} \cdot (\gamma_{ij,4}^{p,s}) \right] \cdot \cos(\varphi_{i,s}) + \left[f_{ij,p}^{\cos} \cdot (\gamma_{ij,2}^{p,s}) + f_{ij,p}^{\sin} \cdot (\gamma_{ij,3}^{p,s}) \right] \cdot \sin(\varphi_{i,s}), \end{aligned}$$

$$\gamma_{ij,1}^{p,s} = \frac{\alpha_{ij,p}}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} + \beta_{ij,p})^2} + \frac{\alpha_{ij,p}}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} - \beta_{ij,p})^2}.$$

$$\gamma_{ij,2}^{p,s} = \frac{(\omega_{i,s} + \beta_{ij,p})}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} + \beta_{ij,p})^2} + \frac{(\omega_{i,s} - \beta_{ij,p})}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} - \beta_{ij,p})^2}.$$

$$\gamma_{ij,3}^{p,s} = \frac{\alpha_{ij,p}}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} + \beta_{ij,p})^2} - \frac{\alpha_{ij,p}}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} - \beta_{ij,p})^2}.$$

$$\gamma_{ij,4}^{p,s} = \frac{(\omega_{i,s} + \beta_{ij,p})}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} + \beta_{ij,p})^2} - \frac{(\omega_{i,s} - \beta_{ij,p})}{(\alpha_{ij,p})^2 + (\omega_{i,s} - \beta_{ij,p})^2}.$$

Левая часть (13) зависит от коэффициентов $\{\hat{f}_{ij}\}$ линейно, т.е. для их нахождения достаточно решить СЛАУ. Поскольку коэффициенты $\{\hat{f}_{ij}\}$

являются инвариантами, реализацию коэффициентов векторов \hat{b}_i, \hat{c}_j можно найти из (7), задавая не одновременно нулевыми коэффициенты \hat{b}_i либо \hat{c}_j .

После проведения идентификации подсистем SISO по всем комбинациям входов и выходов получаем набор из $M \times R$ моделей, для каждой из которых известны:

- размерность \hat{N}_{ij} ,
- набор собственных значений $\{\hat{\lambda}_{ij}\} = \{\hat{\lambda}_{ij,1}, \dots, \hat{\lambda}_{ij,\hat{N}_{ij}}\}$, вместе с заданными областями разброса (обозначим их $\{\hat{\lambda}_{ij}^U\} = \{\hat{\lambda}_{ij,1}^U, \dots, \hat{\lambda}_{ij,\hat{N}_{ij}}^U\}$),
- набор коэффициентов $\{\hat{f}_{ij}\} = \left\{ \left\{ \hat{f}_{ij,1}^{\cos}, \hat{f}_{ij,1}^{\sin} \right\}, \dots, \left\{ \hat{f}_{ij,\hat{N}_{ij}}^{\cos}, \hat{f}_{ij,\hat{N}_{ij}}^{\sin} \right\} \right\}$.

Объединение всех этих систем в одну производится по близким собственным значениям. Поскольку идентификация происходит в рамках гарантированного подхода к природе неопределенности, можно считать, что все положения собственного числа $\hat{\lambda}_{ij,k}$ внутри его области разброса $\hat{\lambda}_{ij,k}^U$ равноценны.

Таким образом, в случае пересечения областей $\hat{\lambda}_{ij,k}^U$ для различных подсистем SISO, можно считать, что собственное число для них одно и то же и принадлежит пересечению этих множеств. С помощью такого объединения при составлении общей системы MIMO возможно связать различные пары вход-выход по общим собственным значениям, снижая суммарную размерность.

ЦЕЛЬЮ работы является изучение возможности объединения подсистем SISO, соответствующих различным комбинациям входов и выходов, в одну систему MIMO, производя объединение по совпадающим собственным значениям.

Проблемы в предлагаемом методе объединения могут возникнуть лишь вследствие того, что коэффициенты матриц B и C также могут становиться общими. Рассмотрим различные случаи комбинаций входов и выходов подсистем, связываемых по общим собственным значениям.

ОБЪЕДИНЕНИЕ ПОДСИСТЕМ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОДНОМУ ВХОДУ ИЛИ ОДНОМУ ВЫХОДУ

Пусть имеется две системы SISO, имеющие одно одинаковое собственное значение. Первая соответствует первому входу и первому выходу:

$$S_1(m=1, r=1): \quad \{\lambda_{11}\} = \{\lambda_1, \lambda_{\text{gen}}\}, \quad \{f_{11}\} = \{f_{11,1}, f_{11,\text{gen}}\}.$$

Вторая соответствует второму входу и первому выходу:

$$S_2(m=2, r=1): \quad \{\lambda_{21}\} = \{\lambda_2, \lambda_{\text{gen}}\}, \quad \{f_{21}\} = \{f_{21,1}, f_{21,\text{gen}}\},$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2, \quad f_{11, \text{gen}} \neq f_{21, \text{gen}}.$$

Представим для наглядности:

$$S_1(m=1, r=1): \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_{\text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} \\ b_{1, \text{gen}} \end{pmatrix} u_1, \quad y = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1, \text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix},$$

$$S_2(m=2, r=1): \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_{\text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{2,2} \\ b_{2, \text{gen}} \end{pmatrix} u_2, \quad y = \begin{pmatrix} c_{1,2} & c_{1, \text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix},$$

Коэффициенты $b_{1, \text{gen}} = \{b_{1, \text{gen}}^{\cos}, b_{1, \text{gen}}^{\sin}\}$, $c_{1, \text{gen}} = \{c_{1, \text{gen}}^{\cos}, c_{1, \text{gen}}^{\sin}\}$ связаны с

$$f_{11, \text{gen}} = \{f_{11, \text{gen}}^{\cos}, f_{11, \text{gen}}^{\sin}\}: \quad f_{11, \text{gen}} = \begin{pmatrix} f_{11, \text{gen}}^{\cos} \\ f_{11, \text{gen}}^{\sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1, \text{gen}}^{\cos} b_{1, \text{gen}}^{\cos} + c_{1, \text{gen}}^{\sin} b_{1, \text{gen}}^{\sin} \\ c_{1, \text{gen}}^{\cos} b_{1, \text{gen}}^{\sin} - c_{1, \text{gen}}^{\sin} b_{1, \text{gen}}^{\cos} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом связаны и коэффициенты и во второй системе.

В результате объединения должна получиться система МИМО:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 \\ 0 & b_{2,2} \\ \tilde{b}_{1, \text{gen}} & \tilde{b}_{2, \text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \tilde{c}_{1, \text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix}.$$

Общим становится коэффициент $\tilde{c}_{1, \text{gen}}$. Теперь он связан и с $\tilde{b}_{1, \text{gen}}$ (по $f_{11, \text{gen}}$), и с $\tilde{b}_{2, \text{gen}}$ (по $f_{21, \text{gen}}$). Заметим, что нахождение коэффициентов b через c , и наоборот, соответствует решению линейной системы размерности 2 на 2:

$$\begin{pmatrix} c_p^{\cos} b_p^{\cos} + c_p^{\sin} b_p^{\sin} \\ c_p^{\cos} b_p^{\sin} - c_p^{\sin} b_p^{\cos} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_p^{\cos} & c_p^{\sin} \\ -c_p^{\sin} & c_p^{\cos} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_p^{\cos} \\ b_p^{\sin} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} b_p^{\cos} & b_p^{\sin} \\ b_p^{\sin} & -b_p^{\cos} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_p^{\cos} \\ c_p^{\sin} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_p^{\cos} \\ f_p^{\sin} \end{pmatrix} = f_p \quad (14)$$

причем система в левой части будет вырождаться только при одновременном равенстве нулю обоих коэффициентов b и c .

Исходя из этого, в данном случае достаточно выбрать коэффициенты

$$\tilde{c}_{1, \text{gen}} = \{ \tilde{c}_{1, \text{gen}}^{\cos}, \tilde{c}_{1, \text{gen}}^{\sin} \} \text{ т.ч. } \begin{cases} \tilde{c}_{1, \text{gen}}^{\cos} \neq 0 \\ \tilde{c}_{1, \text{gen}}^{\sin} \neq 0 \end{cases}.$$

Далее, из систем 2 на 2 будут найдены $\tilde{b}_{1, \text{gen}}$ и $\tilde{b}_{2, \text{gen}}$.

Аналогичным образом решается объединение произвольного числа систем, соответствующих одному входу и различным выходам либо одному выходу и различным входам. Объединение такого типа показано схематически на рис. 1.

Если задать ненулевыми любую пару коэффициентов ($b_{ij, \lambda_{gen}}$ или $c_{ij, \lambda_{gen}}$) для любой из связываемых подсистем, соответствующих общему собственному значению, то все остальные соответствующие коэффициенты матриц B и C можно найти по цепочке, решая системы (14).

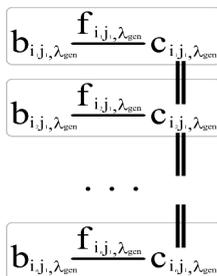


Рис. 1 Схема связей между коэффициентами матриц при объединении систем SISO, соответствующих различным входам и одному выходу

ОБЪЕДИНЕНИЕ ПОДСИСТЕМ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ РАЗЛИЧНЫМ ВХОДАМ И ВЫХОДАМ ОДНОВРЕМЕННО

Пусть имеем четыре системы SISO, две из них имеют одинаковое собственное значение λ_{gen} .

$$S_1(m=1, r=1): \{\lambda_{11}\} = \{\lambda_{gen}\}, \{f_{11}\} = \{f_{11,gen}\},$$

$$S_2(m=1, r=2): \{\lambda_{12}\} = \{\lambda_1\}, \{f_{12}\} = \{f_{12,1}\},$$

$$S_3(m=2, r=1): \{\lambda_{21}\} = \{\lambda_2\}, \{f_{21}\} = \{f_{21,2}\},$$

$$S_4(m=2, r=2): \{\lambda_{22}\} = \{\lambda_{gen}\}, \{f_{22}\} = \{f_{22,gen}\}.$$

Связываемые подсистемы соответствуют одновременно и различным входам, и различным выходам. В таком случае при объединении систем в одну общих коэффициентов матриц B и C не возникает:

$$S_1(m=1, r=1): \dot{x}_{gen} = (\lambda_{gen})(x_{gen}) + (b_{11,gen})u_1, y_1 = (c_{11,gen})(x_{gen}),$$

$$S_2(m=1, r=2): \dot{x}_1 = (\lambda_1)(x_1) + (b_{12,1})u_1, y_2 = (c_{12,1})(x_1),$$

$$S_3(m=2, r=1): \dot{x}_1 = (\lambda_2)(x_2) + (b_{21,2})u_2, y_1 = (c_{21,2})(x_2),$$

$$S_4(m=2, r=2): \dot{x}_{gen} = (\lambda_{gen})(x_{gen}) + (b_{22,gen})u_2, y_2 = (c_{22,gen})(x_{gen}).$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{gen} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{gen} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{12,1} & 0 \\ 0 & b_{21,2} \\ b_{11,gen} & b_{22,gen} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 & c_{21,2} & c_{11,gen} \\ c_{12,1} & 0 & c_{22,gen} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_{gen} \end{pmatrix}.$$

ОБЪЕДИНЕНИЕ ПОДСИСТЕМ, ПОЗВОЛЯЮЩЕЕ ПОЛУЧИТЬ НЕЗАМКНУТую ЦЕПОЧКУ СВЯЗЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ МАТРИЦ

Рассмотрим снова объединение 4-х систем SISO в одну систему MIMO с 2-мя входами и 2-мя выходами. Три из них имеют одинаковое собственное значение λ_{gen} .

$$\begin{aligned} S_1(m=1, r=1), \{\lambda_{11}\} &= \{\lambda_{\text{gen}}\}, \{f_{11}\} = \{f_{11,\text{gen}}\}, \\ S_2(m=1, r=2), \{\lambda_{12}\} &= \{\lambda_{\text{gen}}\}, \{f_{12}\} = \{f_{12,\text{gen}}\}, \\ S_3(m=2, r=1), \{\lambda_{21}\} &= \{\lambda_{\text{gen}}\}, \{f_{21}\} = \{f_{21,\text{gen}}\}, \\ S_4(m=2, r=2), \{\lambda_{22}\} &= \{\lambda_1\}, \{f_{22}\} = \{f_{22,1}\}. \end{aligned}$$

Запишем следующие системы:

$$\begin{aligned} S_1(m=1, r=1): \dot{x}_{\text{gen}} &= (\lambda_{\text{gen}})x_{\text{gen}} + (b_{11,\text{gen}})u_1, \quad y_1 = (c_{11,\text{gen}})x_{\text{gen}}, \\ S_2(m=1, r=2): \dot{x}_{\text{gen}} &= (\lambda_{\text{gen}})x_{\text{gen}} + (b_{12,\text{gen}})u_1, \quad y_2 = (c_{12,\text{gen}})x_{\text{gen}}, \\ S_3(m=2, r=1): \dot{x}_{\text{gen}} &= (\lambda_{\text{gen}})x_{\text{gen}} + (b_{21,\text{gen}})u_2, \quad y_1 = (c_{21,\text{gen}})x_{\text{gen}}, \\ S_4(m=2, r=2): \dot{x}_1 &= (\lambda_1)x_1 + (b_{22,1})u_2, \quad y_2 = (c_{22,1})x_1. \end{aligned}$$

Подсистемы S_1 и S_2 соответствуют одному и тому же входу, S_1 и S_3 — одному выходу. После объединения должна получиться система

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_{\text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b_{22,1} \\ \tilde{b}_{1*,\text{gen}} & \tilde{b}_{21,\text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{c}_{*1,\text{gen}} \\ c_{22,1} & \tilde{c}_{12,\text{gen}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_{\text{gen}} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты $\tilde{b}_{1*,\text{gen}}$ и $\tilde{c}_{*1,\text{gen}}$ связаны между собой по коэффициенту $f_{11,\text{gen}}$.

Коэффициенты $\tilde{b}_{1*,\text{gen}}$ и $\tilde{c}_{12,\text{gen}}$ связаны между собой по коэффициенту $f_{12,\text{gen}}$.

Коэффициенты $\tilde{b}_{21,\text{gen}}$ и $\tilde{c}_{*1,\text{gen}}$ связаны между собой по коэффициенту $f_{21,\text{gen}}$.

В этом случае связи образуют незамкнутую цепочку. Аналогично случаю, когда объединялись подсистемы только по одному входу либо выходу, выбор ненулевой пары коэффициентов ($b_{ij,\lambda_{\text{gen}}}$ или $c_{ij,\lambda_{\text{gen}}}$) с последовательным решением систем (14) позволяет найти соответствующие коэффициенты матриц B и C объединенной системы MIMO.

В общем виде, схема связей для этого случая показана на рис. 2.

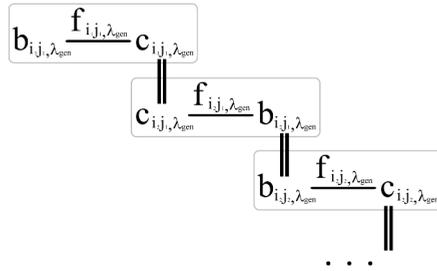


Рис. 2 Схема связей между коэффициентами матриц при объединении SISO систем, образующих незамкнутую цепочку.

СЛУЧАЙ С ЗАМКНУТОЙ ЦЕПОЧКОЙ СВЯЗЕЙ

Рассмотрим объединение 4-х подсистем SISO в одну систему MIMO с 2-мя входами и 2-мя выходами, когда все подсистемы имеют одинаковое собственное значение λ_{gen} .

$$S_1(m=1, r=1): \{\lambda_{11}\} = \{\lambda_{gen}\}, \{f_{11}\} = \{f_{11,gen}\},$$

$$S_2(m=1, r=2): \{\lambda_{12}\} = \{\lambda_{gen}\}, \{f_{12}\} = \{f_{12,gen}\},$$

$$S_3(m=2, r=1): \{\lambda_{21}\} = \{\lambda_{gen}\}, \{f_{21}\} = \{f_{21,gen}\},$$

$$S_4(m=2, r=2): \{\lambda_{22}\} = \{\lambda_{gen}\}, \{f_{22}\} = \{f_{22,gen}\}.$$

$$S_1(m=1, r=1): \dot{x}_{gen} = (\lambda_{gen})(x_{gen}) + (b_{11,gen})u_1, y_1 = (c_{11,gen})(x_{gen}),$$

$$S_2(m=1, r=2): \dot{x}_{gen} = (\lambda_{gen})(x_{gen}) + (b_{12,gen})u_1, y_2 = (c_{12,gen})(x_{gen}),$$

$$S_3(m=2, r=1): \dot{x}_{gen} = (\lambda_{gen})(x_{gen}) + (b_{21,gen})u_2, y_1 = (c_{21,gen})(x_{gen}),$$

$$S_4(m=2, r=2): \dot{x}_{gen} = (\lambda_{gen})(x_{gen}) + (b_{22,gen})u_2, y_2 = (c_{22,gen})(x_{gen}).$$

Если удастся объединить все подсистемы, то результирующая MIMO система будет иметь вид

$$\dot{x} = (\lambda_{gen})(x_{gen}) + \begin{pmatrix} \tilde{b}_{1*,gen} & \tilde{b}_{2*,gen} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{*1,gen} \\ \tilde{c}_{*2,gen} \end{pmatrix} (x_{gen}).$$

Представить связи в виде разомкнутой цепочки уже не удастся. На рис. 3 приведена схема связей.

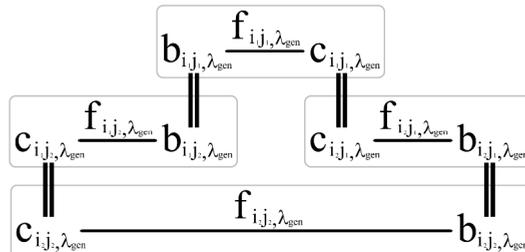


Рис. 3 Замкнутая цепочка связей коэффициентов

Для нахождения коэффициентов матриц B и C приходится решать нелинейную систему уравнений. В случае одного цикла число уравнений связи равно числу искомых коэффициентов. Если в цепочке имеется более одного цикла — нелинейная система получается переопределенной. Следовательно, в общем случае она является несовместной, что приводит к невозможности объединения подсистем SISO без изменения их инвариантных характеристик $\{\hat{f}_{ij}\}$.

АЛГОРИТМ ОБЪЕДИНЕНИЯ ПОДСИСТЕМ SISO

Первым этапом алгоритма объединения является процедура нахождения близких по значению собственных чисел по всему набору подсистем. Для этого воспользуемся областями значений собственных чисел $\hat{\lambda}_{ij,k}^U$, полученными ранее на этапе проведения структурной идентификации подсистем. В случае пересечения этих областей для различных подсистем, соответствующие им собственные значения будем считать близкими. Пример приведен на рисунке 4.

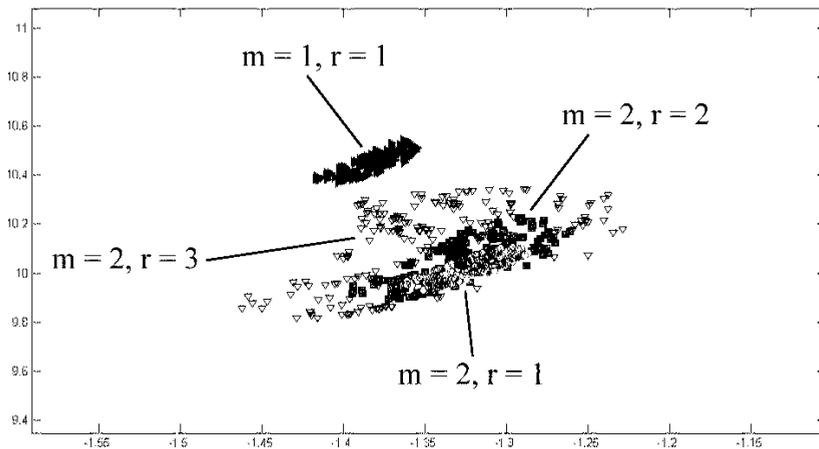


Рис. 4 Близкие собственные значения по разным подсистемам

Следующим этапом будет поочередное объединение близких собственных значений с построением цепочек объединения и проверкой их замкнутости. В случае, если объединение близких собственных значений приводит к возникновению цикла в цепочке зависимости, объединение не производим и оставляем их различными. Таким образом, в результате выполнения этого этапа получаем конечный вид матрицы \hat{A} объединенной системы в виде (5). На последнем этапе для каждого собственного значения матрицы \hat{A} производится построение цепочек зависимостей. Одну пару коэффициентов из нее выбираем в виде $b^{\cos} = 1, b^{\sin} = 0$ (соответственно канонической управляемой реализации) или $c^{\cos} = 1, c^{\sin} = 0$ (соответственно канонической наблюдаемой реализации), а затем, решая

последовательность линейных систем уравнений (14), находим все остальные коэффициенты, зависящие от выбранных.

ПРИМЕР МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ИДЕНТИФИКАЦИИ МНОГОСВЯЗНОЙ СИСТЕМЫ

Имеем исходную систему десятого порядка с собственными значениями $\{\lambda_i\} = \{-1 \pm 10i, -1.8 \pm 9i, -2.6 \pm 8i, -3.4 \pm 7i, -4.2 \pm 6i\}$. Количество входов $M = 2$, количество выходов $R = 3$. Матрицы B и C равны:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

На каждый вход подавался сигнал из 10 гармоник различной частоты. Длительность эксперимента равна $\tau = 10^5$. В качестве шума на выходы системы накладывались суммы шумовых гармоник с амплитудами равными

$$\text{по выходу 1: } a^1 = (1 \ 0.9 \ 0.8 \ 0.7 \ 0.6 \ 0.5 \ 0.4 \ 0.3 \ 0 \ 0 \ 0.08 \ 0.04),$$

$$\text{по выходу 2: } a^2 = (2 \ 1.8 \ 1.6 \ 1.4 \ 1.2 \ 1.0 \ 0.8 \ 0.6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0),$$

$$\text{по выходу 3: } a^3 = (4 \ 3.6 \ 3.2 \ 2.8 \ 2.4 \ 2.0 \ 1.6 \ 1.2 \ 0.2 \ 0.1 \ 0.32 \ 0.16).$$

Для всех комбинаций входов и выходов были построены аппроксимирующие модели SISO, размерности которых указаны в табл. 1.

Таблица 1

Размерности аппроксимирующих моделей SISO для всех комбинаций входа и выхода

Номер выхода	Номер входа	
	M = 1	M = 2
R = 1	4	4
R = 2	4	3
R = 3	4	3

После выполнения процедур поиска близких собственных значений, а также их объединения, число различных собственных значений сократилось до 6-ти блоков: 5 комплексно-сопряженных пар и одного действительного собственного числа. Коэффициенты матрицы \hat{B} и \hat{C} модели были найдены согласно описанному алгоритму последовательным решением системы (14):

$$\hat{A} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} -7.029 & 0 \\ 0 & -7.029 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3.651 & 7.999 \\ -7.999 & -3.651 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.346 & 10.115 \\ -10.115 & -1.346 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} -5.751 & 8.434 \\ -8.434 & -5.751 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2.314 & 10.124 \\ -10.124 & -2.314 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1.382 & 10.451 \\ -10.451 & -1.382 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T,$$

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.74 & 3.50 & 2.21 & 0.70 & 5.88 & 4.52 & 0 & 0 & 2.71 & -3.16 \\ -0.56 & -0.56 & 1.74 & 3.50 & 2.21 & 0.70 & 0 & 0 & 5.42 & 2.26 & 0 & 0 \\ -1.11 & 0 & 5.24 & 1.76 & 2.91 & -1.51 & 0 & 0 & 7.68 & -3.16 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выводы

Исследование возможности объединения различных систем с одним входом и одним выходом в одну большую многосвязную систему путем объединения близких собственных значений позволило расширить область применения метода идентификации по частотным характеристикам, разработанного для односвязных систем.

В результате рассмотрения возможных случаев связи систем по общим собственным значениям в зависимости от того, каким входам и выходам соответствуют эти системы, показано, что объединение возможно, если при формировании матриц системы \hat{B} и \hat{C} не возникает циклических зависимостей между их коэффициентами.

На основе проведенных исследований предложен алгоритм объединения моделей отдельных подсистем, соответствующих описанию динамики исследуемой многосвязной системы по отдельным входам и выходам, в общую многосвязную модель. Предложенный алгоритм сохраняет в результирующей многосвязной модели все инвариантные характеристики исходных моделей с одним входом и выходом, так что точность аппроксимации по выходу сохраняется.

1. Орлов Ю.Ф. Идентификация по частотным параметрам при параллельных испытаниях / Ю.Ф. Орлов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — 68, № 1. — С. 20–40.
2. Александров А.Г. Метод частотных параметров / А.Г. Александров // Автоматика и телемеханика. — 1989. — 50, № 12. — С. 3–5.
3. Александров А.Г. Конечно-частотная идентификация многомерных объектов / А.Г. Александров, Ю.Ф. Орлов // Тр. 2-й Российско-шведской конференции по автоматическому управлению. RSCC'95. — СПб., 1995. — С. 65–69.
4. Губарев В.Ф. Идентификация многомерных систем по параметрам установившегося режима / В.Ф. Губарев, С.В. Мельничук // Проблемы управления и информатики. — 2012. — № 5. — С. 26–42.
5. Мельничук С.В. Исследование корректности задач идентификации многомерных систем частотным методом / С.В. Мельничук // Кибернетика и вычислительная техника. — 2014. — № 176. — С. 19–33.
6. Мельничук С.В. Модифицированный частотный метод структурно-параметрической идентификации систем / С.В. Мельничук // Проблемы управления и информатики. — 2015. — № 4. — С. 27–36.

METHOD OF STRUCTURAL PARAMETRIC MULTIVARIABLE SYSTEM IDENTIFICATION USING FREQUENCY CHARACTERISTICS

Melnychuk S.V.

Space Research Institute National Academy of Sciences of Ukraine and State Space Agency of Ukraine

Introduction. One of the important directions in the identification of linear systems are frequency domain methods. In recent decades a finite-frequency approach, focused on the use under bounded uncertainty has been developed. Within finite-frequency approach a method, that allows to construct models with reduced dimensionality has been proposed. The method includes a step of structural identification with regularization by model dimension. This method was used to identify single-input single-output (SISO) systems, so it could not be applied to systems with multiple input and multiple output (MIMO).

Purpose. In order to generalize the method it is proposed to identify SISO models of subsystems, that describes individual inputs and outputs, and then combine them. The main purpose of research is to develop an algorithm, that combine separate SISO models into one general MIMO model.

Results. Separate SISO models determined by their invariant properties. As simple combination of SISO models leads to a MIMO model of large dimension, and some invariant properties in different models may be similar, it makes sense to carry out unification by equating this invariants.

Possibility of association for different combinations of SISO models, that have the same eigenvalues were investigated. It is shown that by combining models additional dependencies between coefficients may be imposed. It is shown that if the dependency graph contains no cycles, then the union is possible. On the basis of this fact the synthesizing algorithm was proposed.

Conclusions. The proposed identification algorithm builds the general MIMO model from separate SISO models so that the dimension of resulting model may be significantly less, than sum of dimensions of original SISO models. The proposed algorithm saves all invariant characteristics of the original models, so approximation accuracy by the each input-output relation is stored.

Keywords: System identification, frequency domain, structural identification, reduced dimensionality.

1. Orlov Y.F. Frequency Parameter-Based Identification at Parallel Testing. Automation and Remote Control, 2007, vol.68, no. 1. pp. 18–37.
2. Orlov Y.F. Frequency Parameter-Based Identification at Parallel Testing. Avtomatika i Telemekhanika, 2007, vol.68, no. 1. pp. 20–40 (in Russian).
3. Alexandrov A.G. Method of Frequency Parameters. Avtomatika i Telemekhanika, 1989, vol 50, no. 12. pp. 3–15 (in Russian).
4. Alexandrov A.G., Orlov Y.F. Finite-frequency identification of multidimensional objects. 2-nd Russian-Swedish Control Conference. St. Petersburg, 1995, pp. 65–69 (in Russian).
5. Gubarev V.F., Melnychuk S.V. Identification of Multivariable Systems Using Steady-State Parameters. Journal of Automation and Information Sciences, 2012, vol. 44. i. 9. pp. 24–42.

6. Gubarev V.F., Melnychuk S.V. Identification of Multivariable Systems Using Steady-State Parameters. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2012, no 5. pp. 26–42 (in Russian).
7. Melnychuk S.V. Regularity Investigation For Multidimensional System Identification Problem by the Frequency Method. *Cybernetics and Computer Engineering*, 2014, no 176. pp. 19–33 (in Russian).
8. Melnychuk S.V. Modified Frequency Method of Structural-Parametric System Identification. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2015, no 4. pp. 27–36 (in Russian).

Получено 05.06.2015