УДК 517.977

МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ СЕЛЕКТОРЫ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

А.А. Чикрий

Институт кибернетики имени В.М.Глушкова НАН Украины (г. Киев)

Рассмотрены игровые задачи о сближении траекторий нестационарной квазилинейной системы с переменным цилиндрическим терминальным множеством. Исследуется ситуация, когда не имеет места классическое условие Понтрягина. С помощью введения верхних и нижних разрешающих функций как селекторов специальных многозначных отображений получены достаточные условия разрешимости задач, которые отличаются от уже известных .

Ключевые слова: конфликтно — управляемый процесс, многозначное отображение, условие Понтрягина, интеграл Ауманна, разрешающая функция.

Розглянуто ігрові задачі про зближення траєкторій нестаціонарної квазілінійної системи зі змінною циліндричною термінальною множиною. Досліджується ситуація, коли не виконана умова Понтрягіна. За допомогою введення верхніх та нижніх розв'язуючих функцій як селекторів спеціальних многозначних відображень отримані достатні умови розв'язності задач, які відрізняються від уже відомих.

Ключові слова: конфліктно — керований процес, многозначне відображення, умова Понтрягіна, інтеграл Ауманна, розв'язуюча функція.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена изучению нестационарных игровых задач динамики на основе первого прямого метода Понтрягина [1] и метода разрешающих функций [3, 4]. Рассматривается случай, когда условие Понтрягина не имеет места. В этой ситуации вместо селектора Понтрягина, которого не существует, рассматривается некоторая функция сдвига, а с ее помощью вводятся специальные многозначные отображения. Они порождают верхние и нижние разрешающие функции двух типов, через которые формируются достаточные условия завершения игры за некоторое гарантированное время. Дается сравнение уже упомянутых методов.

Постановка задачи, допустимые стратегии

Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве R^n задается системой квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{z} = A(t)z + \quad (t,u,v), z(t_0) = z_0,\ t \geq t_0 \geq 0\,. \tag{1}$$

Здесь $A(t)$ — матричная функция порядка n, элементы которой являются измеримыми функциями, они, к тому, же суммируемы на любом конечном интервале $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$. Управляющие параметры игроков u и v в каждый момент времени выбираются из областей управления $U(t)$ и $V(t)$ соответственно, которые являются измеримыми компактнозначными отображениями с образами в R^n при $t \in [t_0, +\infty)$. Вектор-функция $\varphi(t,u,v)$ - блок управления удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по t и непрерывна по совокупности *(u, v)* на соответствующих областях определения. Кроме того, будем предполагать, что

$$\|\varphi(t,u,v)\| \leq c(t) \text{ при } u \in U(t),\ v \in V(t),\ t \in [t_0, +\infty), \tag{2}$$

где $c(t)$ некоторая локально суммируемая функция.

Вместе с нестационарной динамической системой (1) задано цилиндрическое терминальное множество:

$$M^*(t) = M_0 + M(t),\ t \in [t_0, +\infty), \tag{3}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а $M(t)$ — измеримое компактнозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению L к M_0 в R^n.

Определим информированность обоих игроков в процессе игры. Второй игрок в качестве допустимого управления выбирает произвольные измеримые селекторы многозначного отображения $V(t)$. Поскольку это отображение измеримо и замкнутозначно, то в силу теоремы об измеримом выборе [5] такие селекторы существуют, их совокупность обозначим через Ω_E. Если первый игрок в момент $t, t \geq t_0$, имеем информацию о начальном состоянии процесса (t_0, z_0) и предыстории управления второго игрока

$$v_t(\cdot) = \{v(s):\ v(s) \in V(s)\,,\ s \in [t_0, t]\}\,,$$

т.е. $u(t) = u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot))$, то будем говорить, что его управление предписано квазистратегией [2]. При этом допустимое управление $u(t)$ обязано быть измеримым селектором отображения $U(t)$.

В случае, когда первый игрок принимает решение в момент t лишь на основе информации о начальном состоянии (t_0, z_0) и мгновенном значении управления второго игрока, т.е. $u(t) = u(t_0, z_0, t, v(t))$, то говорят о контруправлении по Н.Н. Красовскому [2], которое предписывается стробоскопической стратегией О. Хайека [6]. Конечно же и в этом случае $u(t)$ должно быть измеримым селектором отображения $U(t)$. Цель первого игрока — вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (3), второй игрок этому препятствует.

Цель работы — при сделанных предположениях необходимо найти достаточные условия завершения игры (1) – (3) в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время, указав управление первого игрока, которое обеспечивает ему этот результат.

ПЕРВЫЙ ПРЯМОЙ МЕТОД ПОНТРЯГИНА

Обозначим через π ортопроектор, который действует из R^n в L, и введем многозначное отображение:

$$(t, U(t), v) = \{ \ (t, u, v) : u \in \ U(t)\}, \ v \in V(t), \ t \geq t_0.$$

В силу предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) и теоремы о прямом образе [5] это отображение измеримо по t и непрерывно по v в метрике Хаусдорфа.

Положим

$$W(t, \tau, v) = \pi\Phi(t, \tau) \ \ (\tau, U(\tau), v),$$

$$W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t, \tau, v), \ t \geq \tau \geq t_0,$$

где $\Phi(t, \tau)$ — переходная матрица однородной системы (1) — матрица Коши или матрицант. Если выполнено условие Лаппо-Данилевского [7], то матрицант может быть выражен подобно стационарному случаю как експонента в степени интеграла от матрицы системы (1).

Многозначное отображение $W(t, \tau, v)$ является измеримым по τ и непрерывным по v, а отображение $W(t, \tau)$ измеримо по τ и замкнутозначно [4]. Измеримость по τ $W(t, \tau)$ следует из свойств пересечения счетного числа измеримых отображений, а также теоремы Кастена о существовании у измеримого отображения счетного всюду плотного апроксимирующего семейства измеримых селекторов [5].

У с л о в и е П о н т р я г и н а. Многозначное отображение $W(t, \tau)$ имеет непустые образы при $t_0 \leq \tau < t < +\infty$.

В силу условия Понтрягина и свойств многозначного отображения $W(t, \tau)$ в нем существует хотя бы один измеримый по τ селектор — селектор Понтрягина, что позволяет ввести интеграл Ауманна [5] от $W(t, \tau)$.

Положим

$$P(t_0,z_0)=\{\, t\geq t_0 : \pi\ \Phi(t,t_0)\ z_0\in M(t)\ -\int\limits_{t_0}^{t} W(t,\tau)\ d\tau\,\} \qquad (4)$$

и введем функцию:

$$p(t_0,z_0)=\inf\{t : t\in\ P(t_0,z_0)\},$$

определяющую наименьшее гарантированное время схемы первого прямого метода Понтрягина [1].

Теорема 1. *Пусть для игровой задачи (1) – (3) выполнено условие Понтрягина,* $P(t_0,z_0)\neq 0$ *и* $P\in P(t_0,z_0)$.

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на множество (3) в момент P с помощью некоторого контруправления.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположений теоремы и включения в соотношении (4) имеем

$$\pi\ \Phi(P,t_0)\ z_0\in M(P)\ -\int\limits_{t_0}^{P} W(P,\tau)\ d\tau\,.$$

Это означает, что существует такая точка $\mathrm{m}\in M(P)$ и по определению интеграла Ауманна — такой измеримый селектор Понтрягина $\gamma(P,\tau)$, $\tau\in[t_0,P]$, что

$$\pi\ \Phi(P,t_0)\ z_0=\mathrm{m}-\int\limits_{t_0}^{P}\gamma(P,\tau)\ d\tau\,. \qquad (5)$$

Рассмотрим многозначное отображение:

$$U_0(\tau,v)=\{u\in U(\tau):\pi\Phi(P,t_0)\ \ (\tau,u,v)-\gamma(P,\tau)=0\}, \qquad (6)$$

$$v\in V(\tau),\tau\in[t_0,P]\ .$$

При произвольном допустимом управлении $v(\tau),\tau\in[t_0,P]$ в силу теоремы Филиппова — Кастена [5] в нем существует измеримый селектор $u_0(\tau)=u_0(\tau,v(\tau)),\tau\in[t_0,P]$. Его и выберем в качестве управления первого игрока.

Тогда из формулы Коши для представления проекции решения уравнения (1)

$$\pi z(P)=\pi\Phi(P,t_0)z_0+\int\limits_{t_0}^{P}\pi\Phi(P,\tau)\ \ (\tau,u_0(\tau),v(\tau))d(\tau)$$

с учетом соотношения (5) и равенства в (6) получим:

$$\pi z(P)=m\in M(P),$$

что и завершает доказательство.

З а м е ч а н и е 1. Отметим отдельно, что селектор Понтрягина $\gamma(P,\tau)$ определяется в схеме доказательства и связан соотношением (5).

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ТИПОВ

Далее условие Понтрягина не предполагается выполненным и, следовательно, селектор Понтрягина не существует. Его роль будет выполнять некоторая специальная функция. Обозначим как:

$$\Delta(t_0)=\{(t,\tau):t_0\le\tau\le t<+\infty\}.$$

Пусть $\gamma(t,\tau),\gamma:\Delta(t_0)\to L$, почти везде ограниченная измеримая по t функция, суммируемая по $\tau,\tau\in[t_0,t]$, для каждого $t,t\ge t_0$. Назовем ее функцией сдвига и зафиксируем в дальнейшем. Обозначим как:

$$\xi(t)=\xi(t,t_0z_0,\gamma(t,\cdot))=\pi\Phi(t,t_0)z_0+\int_{t_0}^{t}\gamma(t,\tau)d\tau$$

и рассмотрим многозначное отображение:

$$B(t,\tau,v)=\{\alpha\ge 0:[\pi\Phi(t,\tau)\ \ (\tau,U(\tau)v)-\gamma(t,\tau)]\cap\alpha[M(t)-\xi(t)]\ne 0\}, \qquad (7)$$

$$v\in V(\tau),(t,\tau)\in\Delta(t_0)$$

Поскольку условие Понтрягина не имеет места, то сдвинутое многозначное отображение $W(t,\tau,v)-\gamma(t,\tau)$ в выражении (7) при некоторых значениях переменных не содержит нуля. Если бы это было не так, то функция сдвига $\gamma(t,\tau)$ была бы селектором Понтрягина, а само условие Понтрягина было бы выполненным.

Сказанное выше означает, что для некоторых элементов $v\in V(\tau),(t,\tau)\in\Delta(t_0),0\notin B(t,\tau,v)$, в то время как в традиционной схеме метода разрешающих функций [3, 4] с условием Понтрягина автоматически $0\in B(t,\tau,v)$ для всех $(t,\tau,v),v\in V(\tau),(t,\tau)\in\Delta(t_0)$.

Взамен условия Понтрягина потребуем более слабое предположение.

У с л о в и е 1. Многозначное отображение $B(t,\tau,v)$ имеет непустые образы при $v\in V(\tau),(t,\tau)\in\Delta(t_0)$.

При этом условии многозначное отображение $B(t,\tau,v)$ порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции первого типа:

$$\alpha^*(t,\tau,v)=\sup\{\alpha:\alpha\in B(t,\tau,v)\},$$

$$\alpha_*(t,\tau,v)=\inf\{\alpha:\alpha\in B(t,\tau,v)\},$$

зависящие от мгновенного значения управления второго игрока $v,v\in V(\tau)$.

Так как образы отображения $B(t,\tau,v)$ являются числовыми множествами положительной полуоси R_+, то верхняя разрешающая функция $\alpha^*(t,\tau,v)$

является опорной функцией этого отображения в направлении +1. Учитывая свойства конфликтно-управляемого процесса (1) – (3), условие 1, теоремы о характеризации и обратном образе [5], можно показать [4], что замкнутозначное отображение $B(t,\tau,v)$ при фиксированном $t\in R_+$ является измеримым по τ при произвольном допустимом селекторе $v(\tau),\tau\in[t_0,t]$, а верхняя и нижняя разрешающая функции суперпозиционно измеримы по совокупности (τ,v) в силу теоремы об опорной функции [5], а, значит, функция $\alpha^*(t,\tau,v(\tau))$ измерима по $\tau,\tau\in[t_0,t]$, и интегрируема по Лебегу при любой измеримой функции $v(\cdot)\in\Omega_E$.

Поставим в соответствие верхней разрешающей функции множество:

$$T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\{t\ge t_0:\inf_{v(\cdot)\in\Omega_E}\int_{t_0}^{t}\alpha^*(t,\tau,v(\tau))d\tau\ge 1\} \tag{8}$$

и его наименьший элемент:

$$t(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=\inf\{t:t\in T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))\},$$

здесь

$\gamma(\cdot,\cdot)$ — зафиксированная ранее функция сдвига.

Если для некоторого $t,t>t_0,\alpha^*(t,\tau,v)\equiv+\infty$ для $v\in V(\tau),\tau\in[t_0,t]$, то значение интеграла в соотношении (8) положим равным $+\infty$, соответствующее неравенство выполнено автоматически и $t\in T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))$. В случае, когда неравенство в (8) не имеет места при всех $t>t_0$, положим $T(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=0$ соответственно, $t(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot))=+\infty$.

Введем многозначное отображение:

$$B(t,\tau)=\bigcap_{v\in V(\tau)}B(t,\tau,v),(t,\tau)\in\Delta(t_0).$$

По аналогии с предыдущей ситуацией для $W(t,\tau)$ оно измеримо по $\tau,\tau\in[t_0,t]$.

Обозначив, следуя [8]

$$domB=\{(t,\tau)\in\Delta(t_0):B(t,\tau)\ne 0\},$$

сделаем более жестокое по сравнению с условием 1 предположение.

У с л о в и е 2. $domB=\Delta(t_0)$.

Многозначное отображение $B(t,\tau)$ порождает верхнюю и нижнюю разрешающую функции второго типа:

$$\alpha^*(t,\tau)=\sup\{\alpha:\alpha\in B(t,\tau)\},$$

$$\alpha_*(t,\tau)=\inf\{\alpha:\alpha\in B(t,\tau)\},$$

но уже не зависящие от мгновенного значения управления второго игрока.

По теореме об опорной функции [5] она измерима по $\tau, \tau \in [t_0, t]$.

Установим связь между разрешающими функциями обоих типов.

Лемма 1. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) с фиксированной функцией сдвига* $\gamma(t,\tau)$ *отображение* $B(t,\tau,v)$ *компактнозначно и выполнено условие 2.*

Тогда имеет место неравенство:

$$\inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v) \geq \alpha^*(t,\tau), (t,\tau)\in \Delta(t_0). \tag{9}$$

Если, к тому же, отображение $B(t,\tau,v)$, $v\in V(\tau), (t,\tau)\in\Delta(t_0)$, *выпуклозначно, то в (9) имеет место равенство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению рассматриваемые функции имеют вид:

$$\inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v) = \inf_{v\in V(\tau)} \sup\{\alpha : \alpha \in B(t,\tau,v)\},$$

$$\alpha^*(t,\tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \bigcap_{v\in V(\tau)} B(t,\tau,v)\}, t_0 \leq \tau \leq t < +\infty.$$

Обозначим $\alpha^* = \alpha^*(t,\tau)$. Поскольку отображение $B(t,\tau,v)$, компактнозначно, то и $B(t,\tau)$, является компактнозначным. К тому же $\alpha^* \in (t,\tau,v)$, при любом $v\in V(\tau)$. Отсюда следует, что

$$\alpha^* \leq \sup\{\alpha : \alpha\in B(t,\tau,v)\}, v\in V(\tau),$$

Следовательно,

$$\alpha^* \leq \inf_{v\in V(\tau)} \sup\{\alpha : \alpha\in B(t,\tau,v)\} = \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v).$$

Из предположений о выпуклозначности и компактнозначности отображения $B(t,\tau,v)$ вытекает, что

$$B(t,\tau,v) = [\alpha_*(t,\tau,v), \alpha^*(t,\tau,v)], v\in V(\tau), (t,\tau)\in\Delta(t_0)$$

а непустота образов отображения $B(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, при этом означает, что

$$B(t,\tau) = [\alpha_*(t,\tau), \alpha^*(t,\tau)],$$

причем

$$\alpha_*(t,\tau) = \sup_{v\in V(\tau)} \alpha_*(t,\tau,v) \leq \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v) = \alpha^*(t,\tau), (t,\tau)\in\Delta(t_0).$$

Введем в рассмотрение числовые функции:

$$\alpha^*(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha^*(t,\tau)d\tau\,,$$

$$\alpha_*(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha_*(t,\tau)d\tau\,.$$

Верхняя разрешающая функция второго типа порождает множество:

$$\Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \{t \ge t_0 : \alpha^*(t) \ge 1\}\,,$$

Его наименьший элемент:

$$\delta(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\{t : t \in \Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))\}\,.$$

З а м е ч а н и е 2. Чтобы сравнивать предложенные схемы, отметим, что из условия Понтрягина следует условие 2, а из него вытекает условие 1.

Условия завершения игры

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для игровой задачи (1) – (3) существует такая функция сдвига* $\gamma(t,\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0)$*, что выполнено условие 2, а отображение M(t) является выпуклозначным. Кроме того,*

$$T \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing$$

Тогда при $\alpha_*(T) < 1$ *траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество (3) в момент* T *с использованием некоторой квазистратегии, а если к тому же* $\alpha_*(T) \ge 1$*, то — в классе контруправлений при любых допустимых управлениях второго игрока.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор отображения $V(\tau), \tau \in [t_0, T]$. Предположим, что $\alpha^*(T,\tau,v) \ne +\infty$ для $v \in V(\tau), \tau \in [t_0, T]$.

Рассмотрим контрольную функцию:

$$h(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \alpha^*(T,\tau,v))d\tau \text{ - } \int_{t}^{T} \alpha_*(T,\tau)d\tau, t \in [t_0, T]\,.$$

Функция $\alpha^*(T,\tau,v(\tau))$, как отмечалось ранее, измерима по $\tau, \tau \in [t_0, T]$, этим же свойством обладает и нижняя разрешающая функция второго типа $\alpha_*(T,\tau)$. Таким образом, функция $h(t)$ является абсолютно непрерывной на интервале $[t_0, T]$. Так как

$$h(t_0) = 1 - \int_{t_0}^{T} \alpha_*(T,\tau)d\tau = 1 - \alpha_*(T) > 0,$$

а по определению момента T

$$h(T) = 1 - \int_{t_0}^{T} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau \le 0,$$

то по известной теореме анализа существует такой момент времени $t_*, t_* \in [t_0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим при этом, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)$. Промежутки времени $[t_0, t_*)$ и $[t_*, T]$ будем называть “активным” и “пассивным” соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения:

$$U_1(\tau,v) = \{u \in U(t) : \pi\Phi(T,\tau)\ \ (\tau,u,v) - \\ -\gamma(T,\tau) \in \alpha^*(T,t,v)[M(T) - \xi(T)]\},\ v \in V(\tau), \tau \in [0,t_*), \tag{10}$$

$$U_2(\tau,v) = \{u \in U(\tau) : \pi\Phi(T,\tau)\ \ (\tau,u,v) - \\ -\gamma(T,\tau) \in \alpha_*(T,\tau)[M(T) - \xi(T)]\},\ v \in V(\tau), \tau \in [t_*,T].$$

Из условия 2 и выражений для многозначных отображений $B(T,\tau,v)$ и $B(T,\tau)$ при допустимых селекторах $v(\tau)$ являются измеримыми [4] для $\tau \in [t_0, T]$, а, согласно теореме Филиппова — Кастена в каждом из них существует хотя бы по одному селектору $u_1(\tau,v)$ и $u_2(\tau,v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями.

Обозначим $u_1(\tau) = u_1(\tau,v(\tau)), u_2(\tau) = u_2(\tau,v(\tau))$, где $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор отображения $V(\tau), \tau \in [t_0, T]$.

Положим управление первого на “активном” промежутке равным $u_1(\tau)$, а на “пассивном “ — $u_2(\tau)$. Таким образом, несмотря на то, что на каждом из промежутков первый игрок не использует предысторию управления второго, а лишь его мгновенное управление, для определения момента переключения t_* предыстория все же необходима.

Из формулы Коши для представления решения системы (1) получим:

$$\pi z(T) = \pi\Phi(T,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t^*} \pi\Phi(T,\tau)\ \ (\tau,u_1(\tau),v(\tau))d\tau + \\ + \int_{t_*}^{T} \pi\Phi(T,\tau)\ \ (\tau,u_2(\tau),v(\tau))d\tau. \tag{11}$$

Прибавив и вычтя в правой части (11) выражение $\int_{t_0}^{T}\gamma(T,\tau)d\tau$ и учитывая включения в (10), получим:

$$\pi z(T) = \pi\Phi(T,t_0)z_0 + \int \alpha^*(T,\tau,v(\tau))[M(T)-\xi(T)]d\tau +$$

$$+\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)[M(T)-\xi(T)]d\tau + \int_{t_0}^{T}\gamma(T,\tau)d\tau =$$

$$= \xi(T)(1-\int_{t_0}^{t^*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau - \int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau) +$$

$$+\int_{t_0}^{t^*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))M(T)d\tau + \int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)M(T)d\tau =$$

$$=[\int_{t_0}^{t^*}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau]M(T) = M(T).$$

При этом учтено равенство $h(t_*)=0$, а соотношения при интегрировании многозначных отображений с множеством $M(T)$ могут быть подтверждены применением аппарата опорных функций [8]. Случай $\alpha^*(T,\tau,v)=+\infty$ для некоторых $v\in V(\tau), \tau\in[t_0,T]$, как следует из выражения (4), возможен лишь при условиях

$$0\in M(T)-\xi(T), 0\in\pi\Phi(T,\tau)\ \ (\tau,U(\tau),v)-\gamma(T,t),$$

для этих переменных, а в этом случае для них, очевидно,

$$B(T,\tau,v)=[0,+\infty), B(T,\tau)=[0,+\infty).$$

Это дает возможность выбирать в качестве разрешающей функции в тех точках $\tau\in[t_0,T]$, где $\alpha^*(T,\tau,v(\tau))=+\infty$, произвольную конечную суперпозиционно измеримую функцию, принимающую значения на полубесконечном интервале с одним лишь условием, чтобы итоговая разрешающая функция обеспечивала равенство $h(t_*)=0$ для некоторого момента переключения $t_*, t_*\in[t_0,t]$. Тем самым построение управления сведено к предыдущему случаю.

Если же $\alpha^*(T,\tau,v)=+\infty$ для всех $v\in V(\tau), \tau\in[t_{0,}T]$, то этот случай соответствует первому методу Понтрягина [1]. Действительно, включение

$$0\in\pi\Phi(T,\tau)\ \ (\tau,U(\tau),v)-\gamma(T,\tau)\forall v\in V(\tau), \tau\in[t_0,T],$$

обеспечивает выполнение условия Понтрягина на $[t_0, T]$, а функция сдвига $\gamma(T,\tau)$ является селектором Понтрягина. Из другого включения $0 \in M(T) - \xi(T)$ вытекает соотношение:

$$\pi\Phi(T,t_0)z_0 \in M(T) - \int\limits_{t_0} W(T,\tau)d\tau ,$$

из которого в силу теоремы 1 следует возможность закончить игру (1) – (3) в момент T в классе стробоскопических стратегий.

Отдельно рассмотрим лишь случай $\alpha_*(T) < 1$, а $\alpha_*(T) < 1$. Введем контрольную функцию:

$$h_1(t) = 1 - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha^*(T,\tau)d\tau .$$

Естественно рассмотрим лишь случай $\alpha_*(T,\tau) \neq +\infty, \tau \in [t_0, T]$. Тогда

$$h_1(t_0) = 1 - \alpha_*(T) > 0, h_1(T) = 1 - \alpha^*(T) \leq 0 ,$$

и в силу непрерывности функции $h_1(t)$ существует такой момент $t_*^1, t_*^1 \in [t_0, T]$, что $h_1(t_*^1) = 0$. Заметим, что момент t_*^1 уже не зависит от $v(\cdot)$. На обоих участках $[t_0, t_*^1)$ и $[t_*^1, T]$ рассмотрим многозначные отображения (10), причем в выражении для $U_1^1(\tau, v)$ вместо $\alpha^*(T,\tau,v)$ фигурирует функция $\alpha^*(T,\tau)$. Используя свойство компактнозначности отображений $U_1^1(\tau,v), U_2(\tau,v)$ при допустимых селекторах $v(\tau), \tau \in [t_0, T]$, выберем в них измеримые селекторы на основании теоремы Филиппова-Кастена, которые и определяют допустимые управления на обоих участках. Заключительные рассуждения аналогичны выводам в предыдущей ситуации.

З а м е ч а н и е 3. Из утверждения леммы вытекает включение:

$$\Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \subset T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$$

При этом вторая часть теоремы 2, соответствующая случаю $\alpha_*(T) < 1$, $\alpha^*(T) \geq 1$, по существу, используя лишь разрешающие функции второго типа и характеризует те начальные состояния, из которых игра может быть закончена в классе контруправлений в момент T, причем

$$T \in \Theta(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) .$$

Приведем еще один тип достаточных условий завершения игры в классе контруправлений, основанный на выпуклозначности отображения $\mathrm{B}(t,\tau,v), v \in V(\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0)$.

Введем в рассмотрение функции:

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v) d\tau ,$$

$$\alpha(t, \tau) = 1 / \alpha(t) \bullet \inf_{v \in v(t)} \alpha^*(t, \tau, v) .$$

При этом предполагается выполненным следующее требование.

У с л о в и е 3. Для выбранной функции сдвига $\gamma(t,\tau),(t,\tau) \in \Delta(t_0)$, функция $\inf\limits_{v \in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v)$ измерима по $\tau, \tau \in [t_0, t]$ и

$$\inf_{v(\cdot) \in \Omega_e} \int_{t_0}^{t} \alpha^*(t, \tau, v(\tau)) d\tau = \int_{t_0}^{t} \inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v) d\tau , \, t > t_0 .$$

Теорема 3. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1) – (3) с некоторой функцией сдвига* $\gamma(t,\tau), t, \tau \in \Delta(t_0)$, *выполнены условия 2 и 3, отображения* $B(t,\tau,v)$ *и* $M(t), v \in V(\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0)$ *выпуклозначны, для* $T \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) \neq \emptyset$ *имеет место неравенство*

$$\alpha(T, \tau) \geq \sup_{v \in V(\tau)} \alpha_*(T, \tau, v), \tau \in [t_0, T] . \tag{12}$$

Тогда траектория процесса (1) может быть приведена на терминальное множество в момент T с помощью подходящего контруправления.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $\alpha^*(T,\tau,v) < +\infty, v \in V(\tau), \tau \in [t_0, T]$. Поскольку в силу неравенства в (8) $\alpha(T) \geq 1$, то

$$\alpha(T, \tau) = 1 / \alpha(T) \bullet \inf_{v \in v(t)} \alpha^*(T, \tau, v) . \leq \inf_{v \in v(t)} \alpha^*(T, \tau, v), \tau \in [t_0, T] .$$

Учитывая неравенство (12), можно сделать вывод, что $\alpha(T,\tau) \in B(t,\tau,v)$ для $v \in V(\tau), \tau \in [t_0, T]$, а, значит, $\alpha(T,\tau) \in B(T,\tau), \tau \in [t_0, T]$.

Рассмотрим многозначное отображение:

$$\begin{gathered} U(\tau, v) = \{ u \in U(\tau) : \pi\Phi(T,t) \ \ (\tau, u, v) - \\ \gamma(T,t) \in \alpha(T,\tau)[M(T) - \xi(T)] \}, v \in V(\tau), \tau \in [t_0, T] . \end{gathered} \tag{13}$$

Отображение $U(\tau,v)$ компактнозначно и, поэтому при $v(\cdot) \in \Omega_E$ согласно теореме Филиппова–Кастена в нем существует измеримый селектор $u(\tau) = u(\tau, v(\tau)), \tau \in [t_0, T]$. Положим управление первого игрока равным $u(\tau), \tau \in [t_0, T]$. Из формулы Коши с учетом включения в (13) получим

$$\pi z(T) \in \xi(T)[1 - \int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)d\tau] + \int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)M(T)d\tau .$$

Так как *M*(*T*) выпуклый компакт, а $\alpha(T,\tau), \tau \in [t_0, T]$, — неотрицательная функция, причем $\int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)d\tau = 1$, то $\int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)M(T)d\tau = M$, а, следовательно, $\pi z(T) \in M(T)$.

Сравнение гарантированных времен

Установим некоторые связи между уже упомянутыми методами.

Утверждение 1. *Пусть задан конфликтно – управляемый процесс (1) — (3). Тогда для выполнения условия Понтрягина необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция сдвига* $\gamma(t,\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0)$, *что*

$$0 \in B(t,\tau,v) \forall v \in V(\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0) . \tag{14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W(t,\tau) \neq 0, (t,\tau) \in \Delta(t_0)$. Тогда в силу замкнутозначности и измеримости по τ отображения $W(t,\tau)$ в нем существует измеримый по τселектор $\gamma(t,\tau)$. Отсюда следует, что

$$0 \in W(t,\tau) - \gamma(t,\tau) \forall (t,\tau) \in \Delta(t_0)$$

или

$$0 \in W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau) \forall v \in V(\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0) .$$

Тем самым нулевое значение α в выражении (7) обеспечивает непустоту пересечения, а, значит, справедливо включение (14).

Рассуждая в обратном порядке, придем к нужному выводу.

Таким образом, в условиях утверждения 1 функция сдвига $\gamma(t,\tau)$ является селектором Понтрягина. При этом $0 \in B(t,\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0)$, а соответствующие нижние разрешающие функции:

$$\alpha_*(t,\tau,v) = \alpha_*(t,\tau) = 0 \quad \forall v \in V(\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0) .$$

Утверждение 2. *Пусть для некоторого* $t, t > t_0, W(t,\tau) \neq 0, \tau \in [t_0, t]$. *Тогда включение*

$$\pi \Phi(t,t_0) z_0 \in M(t) - \int_{t_0}^{t} W(t,\tau)d\tau . \tag{15}$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такой измеримый по τ *селектор Понтрягина, что* $\xi(t,t_0,z_0,\gamma(t,\cdot)) \in M(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено включение (15). Тогда по определению интеграла Ауманна существует такой селектор Понтрягина, что

$$\pi\Phi(t,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t}\gamma(t,\tau)d\tau = \xi(t,t_0,z_0,\gamma(t,\cdot)) \in M(t). \tag{16}$$

Обратно, если для некоторого селектора Понтрягина имеет место включение (16), то перенеся интеграл от селектора в правую часть, тем более получим включение (15).

Таким образом, если для некоторого $t, t \geq t_0$, и некоторого селектора Понтрягина выполнено включение (16), то

$$B(t,\tau,v) = [0,+\infty)\forall v \in V(\tau),(t,\tau) \in \Delta(t_0).$$

Тем самым

$$B(t,\tau) = [0,+\infty)(t,\tau) \in \Delta(t_0).$$

Следовательно, в этом случае верхние разрешающие функции обоих типов

$$\alpha^*(t,\tau,v) = \alpha^*(t,\tau) = +\infty, v \in V(\tau),(t,\tau) \in \Delta(t_0),$$

а соответствующие нижние разрешающие функции нулевые.

Из приведенных схем сближения вытекают неравенства для соответствующих гарантированных времен:

$$\inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} t(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)) \leq \inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} \delta(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)) \leq p(t_0,z_0).$$

Случаи равенства изучены в работе [4] .

Выводы

Для нестационарных квазилинейных конфликтно-управляемых процессов с цилиндрическим терминальным множеством получены достаточные условия сближения в классе стробоскопических и квазистратегий. Дается сравнение метода разрешающих функций с прямым методом Л.С.Понтрягина. При этом демонстрируется эффективность введенных в работе верхних и нижних разрешающих функций, позволяющих реализовать процесс сближения.

1. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т.2. 576 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. —420 с.
3. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p.
4. Чикрий А.А. Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения. Тр. МИРАН им. В.А.Стеклова, 2010. № 271. С.76–92.
5. Aubin J.-P., Frankowska H. Set — valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
6. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Т. 12. 266 p.

7. Лаппо-Данилевский И.А. Применение функций от матриц к теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1957. 235 с.
8. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

UDC 517.977

SET-VALUED MAPPINGS AND ITS SELECTIONS IN GAME DYNAMIC PROBLEMS

A.A. Chikrii

Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

Introduction. Mathematical theory of control under conflict and uncertainty provides a wide range of fundamental methods to study controlled evolutionary processes of various nature.

These are, first of all, the classic methods of L.S. Pontryagin and N.N. Krasovskii.

This paper is closely related to the mentioned investigations. It is devoted to research of non-stationary game dynamic problems on the basis of the L.S. Pontryagin first direct method and the method of resolving functions.

The purpose of the paper is to derive sufficient conditions for the game termination for some guaranteed time in favor of the first player and to provide the control realizing this result.

Results. Here, in the development of the method of resolving functions general scheme, the upper and the lower resolving functions of two types are introduced in the form of selections of special set-valued mappings. This made it possible to deduce conditions for the game termination in the class of quasi- and stroboscopic strategies.

Conclusions. The in-depth analysis of properties of the set-valued mappings and their selections, around which measurable controls are chosen by virtue of the Filippov-Castaing theorem, is provided. A comparison of the guaranteed times of the above-mentioned methods is given.

Keywords: Conflict controlled processes, set — valued map, Pontryagin's condition, Aumann's integral, resolving function.

1. Pontryagin L.S. Selected scientific papers, M.: Nauka, 1988. 576p. (in Russian)
2. Krasovskii N.N. Game Problems on the Encounter of Motions, M.: Nauka, 1970. 420 p. (in Russian)
3. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p.
4. Chikrii A.A. An analytic method in dynamic games, Trudy Mat. Inst. RAN im. V.A. Steklova, 2010. Vol.271. pp. 76–92. (in Russian)
5. Aubin J.-P., Frankowska H. Set — valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
6. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. T. 12. 266 p.
7. Lappo — Danilevsky I.A. Application of the matrix functions to the theory of systems of ordinary differential equations. M.: SPHTTL, 1957. 235 p. (in Russian)
8. Pschenichnyi B.N Convex analysis and extremal problems. M.: Nauka, 1980. 320 p. (in Russian)

Получено 13.09.16