УДК 536.12+517.958

СТАЦІОНАРНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ДВОСТОРОННІМИ БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИВАМИ

Н. О. Гембара

Українська академія друкарства,
вул. Під Голоском, 19, Львів, 79020, Україна

Розглянуто стаціонарне температурне поле в циліндричній оболонці з двосторонніми покривами. Для визначення температурного поля в довільній оболонці з двосторонніми багатошаровими покривами побудовано модель, за якою вплив багатошарових покривів на розподіл температури в оболонці зводиться до узагальнених умов теплообміну із зовнішніми середовищами на поверхні оболонки. Матеріали оболонки та покривів мають різні теплофізичні характеристики.

Ключові слова: *теплопровідність, циліндрична оболонка, багатошарові покриви.*

Постановка проблеми. Циліндричні оболонки є основним несучим та технологічним елементом конструкцій та машин у багатьох галузях сучасної промисловості. Широко застосовуються циліндричні оболонкові елементи і в сучасній поліграфії. Для захисту від впливу агресивного середовища, високотемпературної корозії, зміцнення, теплоізоляції, й інтенсифікації передачі тепла їх часто покривають тонкими шарами інших матеріалів з різними теплофізичними характеристиками.

Для оцінки несучої здатності конструкцій, до складу яких входять тонкостінні деталі, а також для забезпечення технологічного процесу необхідно мати точні та надійні методи розрахунку цих елементів під дією навантажень різного виду.

Нерівномірні температурні впливи, які викликають температурні напруження, суттєво впливають на несучу здатність конструкції загалом. Величина і закон розподілу температурних напружень залежить від характеру температурного поля. Відомий розподіл температури за товщиною та твірній циліндричної оболонки, з покривами дають змогу також забезпечити відповідну якість технологічного процесу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Дослідження з термомеханіки тонкостінних елементів опубліковані у монографіях Я. С. Підстригача та його послідовників [1–3]. З метою зміцнення таких елементів, захисту їх від дії агресивного середовища, надання їм естетичного вигляду та для інших технологічних потреб на поверхні оболонкових елементів наносять багатошарові покриви з різними теплофізичними і механічними характеристиками.

Математичні моделі теплопровідності елементів конструкцій з покривами та методи їх реалізації, необхідні для аналізу і прогнозування працездатності є актуальними практичними завданнями і мають великий практичний інтерес [4–7].

Мета статті — реалізація математичної моделі для визначення стаціонарного розподілу температури в циліндричній оболонці з двосторонніми багатошаровими покривами та дослідження впливу теплофізичних властивостей покривів на температурне поле системи оболонка-покриви.

Виклад основного матеріалу дослідження. Розглянемо температурне поле в тонкостінній циліндричній оболонці з двосторонніми покривами, яка ззовні та всередині нагрівається через конвективний теплообмін із середовищами. Температуру зовнішнього і внутрішнього середовищ, що оточують оболонку, вважаємо функцією осьової координати $x = z/h_0$ і часу $f = \frac{\lambda_0}{h_0^2 c_0} \cdot \tau$:

$$t_c = \varphi(x, f), \tag{1}$$

де h_0 — товщина оболонки, c_0 — теплоємність оболонки, λ_0 — коефіцієнт теплопровідності оболонки, τ — час.

Розв'язок рівняння теплопровідності [8]:

$$h_0^2 p_0^2 \cdot T_1 - \varepsilon_0 T_1 - \varepsilon^*{}_0 T_2 = -(\varepsilon t_c + \varepsilon^* t^*{}_c),$$

$$h_0^2 p_0^2 \cdot T_2 - 3(1+\varepsilon_0) \cdot T_2 - 3\varepsilon^*{}_0 T_1 = -3(\varepsilon t^*{}_1 + \varepsilon^* t_c),$$

де $T_1 = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} t_0 d\gamma$; $T_2 = \frac{3}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \gamma t_0 d\gamma$ — інтегральні характеристики температури, $\varepsilon_0 = \frac{h_0}{2}\left(\frac{\alpha_0}{\lambda_0} + \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}}\right), \varepsilon = \frac{h_0}{2}\left(\frac{\alpha_{0\mathrm{m}}}{\lambda_{0m}} + \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}}\right)$ — параметри, що залежать від теплофізичних характеристик оболонки та покривів, отримуємо використовуючи перетворення Фур'є.

Для нескінченно довгої циліндричної оболонки:

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^f \varphi(\zeta, \tau) e^{-(\zeta^2+\varepsilon)(f-\tau)} e^{-i\zeta x} d\tau. \tag{2}$$

Якщо поле стаціонарне, то

$$T_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \varepsilon} e^{-i\zeta x} d\zeta. \tag{3}$$

При $\varphi(x, f) = \delta(x)$ маємо $\varphi(\zeta, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta^2 + \varepsilon} (1 - e^{(\zeta^2+\varepsilon)f}) e^{-i\zeta x} d\zeta. \tag{4}$$

Тоді після підстановки формула (4) набуде вигляду:

$$T_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4} (e^{|x|\sqrt{\varepsilon}} (erfx_1 - 1) + e^{-|x|\sqrt{\varepsilon}} (erfx_2 + 1)), \tag{5}$$

де $x_1 = \sqrt{\varepsilon f}\left(1 + \frac{|x|}{2\sqrt{\varepsilon f}}\right), x_2 = \sqrt{\varepsilon f}\left(1 - \frac{|x|}{2\sqrt{\varepsilon f}}\right)$.

Дослідили температурне поле в циліндричній оболонці для випадку, коли температура зовнішнього середовища задана у вигляді

$$\varphi(x, f) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Цей розв'язок отримано у вигляді:

$$T_1(x,f)=\frac{\varepsilon}{2}\Big(\frac{1-e^{-\varepsilon f}}{\varepsilon}+\frac{1}{4}e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|}erfc\Big(\frac{1}{2}\frac{|x|}{\sqrt{f}}-\sqrt{\varepsilon f}\Big)+\frac{1}{4}e^{\sqrt{\varepsilon}|x|}erfc\Big(\frac{1}{2}\frac{|x|}{\sqrt{f}}+\sqrt{\varepsilon f}\Big)\Big),\ x<0,$$

$$T_1(x,f)=\frac{\varepsilon}{2}\Big(\frac{1-e^{-\varepsilon f}}{\varepsilon}-\frac{1}{4}e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|}erfc\Big(\frac{1}{2}\frac{|x|}{\sqrt{f}}-\sqrt{\varepsilon f}\Big)-\frac{1}{4}e^{\sqrt{\varepsilon}|x|}erfc\Big(\frac{1}{2}\frac{|x|}{\sqrt{f}}+\sqrt{\varepsilon f}\Big)\Big),\ x>0. \quad (6)$$

Для стаціонарного режиму, тобто при $f\to\infty$ рівняння спрощується ще більше:

$$T_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|} & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|}, & x>0.\end{cases} \quad (7)$$

На рис. 1 подано зміну в часі температури в різних місцях уздовж поверхні циліндричної оболонки.

Ці графіки дають можливість оцінити величину максимально можливої температури циліндричної оболонки під час високотемпературного нагріву зовнішнім середовищем її частини.

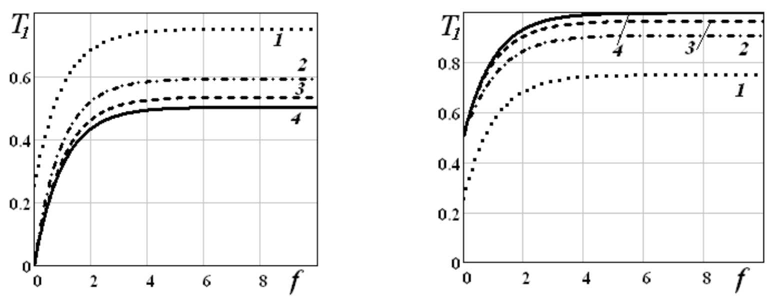

Рис. 1. Зміна температури з часом в різних точках вздовж циліндричної оболонки
(1 – |x|*=0; 2 –* |x|*=1; 3 –* |x|*=2; 4 –* |x|*=5).*

На рис. 2 показано графік стаціонарного розподілу температури згідно з (7).

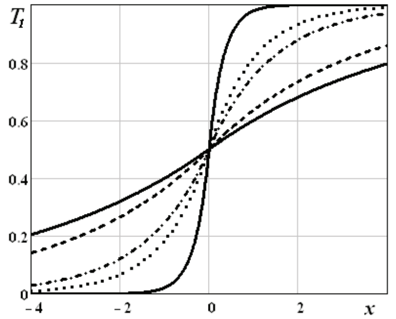

Рис. 2. Стаціонарний розподіл температури вздовж циліндричної оболонки
(1 – f = 0,1; 2 – f = 0,5; 3 – f = 0,8;4 – f = 1; 5 – f = 10).

Висновки. Отже, у цій роботі на основі побудованих вихідних співвідношень сформульовано крайову задачу теплопровідності для нескінченної циліндричної оболонки з двосторонніми покривами.

Застосовуючи інтегральні перетворення Фур'є, одержано у замкненому вигляді точний розв'язок модельної задачі стаціонарного процесу теплопровідності.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. Київ : АН УРСР, 1961. 212 с.
2. Підстригач Я. С. Вибрані праці. Київ : Наукова думка, 1995. 460 с.
3. Шевчук В. А. Обобщенные граничне условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие. Математичні методи і фізико-механічні поля. 1995. Вип. 38. С. 116–120.
4. Шевчук В. А. Нестаціонарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям. Математичні методи та фізико-механічні поля. 2011. 54. № 2. С. 179–185.
5. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття. Доповіді НАН України. 2011. № 7. С. 34–37.
6. Гембара В. М., Гембара Н. О. Моделювання теплопровідності та термопружності тонких оболонок з багатошаровим покриттям. 7-й міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доповідей. 2005. С. 52.
7. Лучко Й. Й., Гембара Н. О., Гембара В. М. Оптимізація теплопередачі тонких оболонок з одностороннім багатошаровим покриттям. Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. 2012. Вип. 9. С. 43–49.
8. Гембара Н. О., Лучко Й. Й. Моделювання теплопровідності оболонок з двостороннім багатошаровим покриттям. Вісник Тернопільського національного технічного університету: науковий журнал. 2013. № 1. С. 222–230.

STATIONARY TEMPERATURE PROBLEM OF CYLINDCAL SHELL WITH BILATERAL MULTILAYER COVERS

N. O. Hembara

Ukrainian Academy of Printing,
19 Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine

The stationary temperature field in a cylindrical shell with bilateral covers has been considered. The model for finding the temperature field in an arbitrary shell with two-sided multilayer covers has been constructed. The effect of multilayer covers on temperature distribution in the shell has been regulated by the generalized conditions of heat exchange with the environment on the surface of the shell. Materials of the shell and covers have different thermal properties.

Keywords: *heat transfer, cylindrical shell, multilayer covers.*

Стаття надійшла до редакції 00.00.2018.