

УДК 519.21

ДОВГАЙ Б.В.

ОЦІНКА РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ РОЗВ'ЯЗКУ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ОРЛІЧЕВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Довгай Б.В. *Оцінка розподілу супремуму розв'язку гіперболічного рівняння з Орлічевою правою частиною* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 231–241.

Ми розглядаємо гіперболічне рівняння з однорідними початковими і граничними умовами та Орлічевою правою частиною. За умов існування розв'язку у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду отримано оцінку розподілу супремуму розв'язку такої задачі. Наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

Ключові слова і фрази: гіперболічне рівняння, розподіл супремуму, Орлічеве випадкове поле.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна.
E-mail: bogdov@gmail.com

ВСТУП

У роботі ми розглядаємо першу задачу математичної фізики для гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною. Такі задачі розглянуто в роботах [1]–[10]. В статті [10] були одержані достатні умови існування розв'язку такої задачі у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду в термінах коваріаційної функції строго Орлічевого випадкового поля, що стоїть в правій частині рівняння. В даній роботі за цих умов знаходимо оцінку розподілу супремуму розв'язку. Крім того, тут наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

1 ОЦІНКА РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМУ

Наступна теорема є частинним випадком теореми 2.2 та леми 2.3 з роботи [11].

Теорема 1 ([11]). *Нехай (T, ρ) — метричний (псевдометричний) компактний простір, $N(u)$ — метрична масивність простору (T, ρ) , тобто мінімальне число замкнених куль радіуса u , що покривають (T, ρ) , $X = \{X(t), t \in T\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де для U виконується g -умова. Нехай існує така функція $\sigma = \left\{ \sigma(h), 0 \leq h \leq \sup_{t,s \in T} \rho(t,s) \right\}$, що $\sigma(h)$ монотонно зростає, неперервна та $\sigma(0) = 0$ і $\sup_{\rho(t,s) \leq h} \|X(t) - X(s)\|_U \leq \sigma(h)$. Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ виконується умова*

$$\int_0^\varepsilon \chi_U \left(N \left(\sigma^{-1}(u) \right) \right) du < \infty, \quad (1)$$

де

$$\chi_U = \begin{cases} n, & n < U(z_0) \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geq U(z_0), \end{cases} \quad (2)$$

$C_U = K(1 + U(z_0)) \max\{1, A\}$, z_0, K, A — константи з означення g -умови, $\sigma^{(-1)}(u)$ — функція, обернена до $\sigma(h)$, то з імовірністю одиниця випадкова величина $\sup_{t \in T} |X(t)|$ належить простору $L_U(\Omega)$ та

$$\left\| \sup_{t \in T} |X(t)| \right\|_U \leq \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{w_0\theta} \chi_U \left(N \left(\sigma^{(-1)}(u) \right) \right) du = B(t_0, \theta), \quad (3)$$

де t_0 — довільна точка з T , $w_0 = \sigma \left(\sup_{t \in T} \rho(t_0, t) \right)$, $0 < \theta < 1$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \left(U \left(\frac{\varepsilon}{B(t_0, \theta)} \right) \right)^{-1}. \quad (4)$$

Наслідок 1. Візьмемо в теоремі 1 простір $T = \{0 \leq x \leq b, c \leq t \leq d\}$ з метрикою $\rho((x, t), (y, s)) = \max\{|x - y|, |t - s|\}$. Тоді умова (1) виконується, якщо для деякого $\varepsilon > 0$ виконується умова

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du < \infty, \quad (5)$$

а

$$B(t_0, \theta) \leq \tilde{B}(t_0, \theta) = \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{w_0\theta} \chi_U \left(\left(\frac{b}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{d-c}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right) du,$$

та для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon \right\} \leq \left(U \left(\frac{\varepsilon}{\tilde{B}(t_0, \theta)} \right) \right)^{-1}. \quad (6)$$

Доведення. Наслідок випливає з того, що в цьому випадку $N(u) \leq \left(\frac{b}{2u} + 1 \right) \left(\frac{d-c}{2u} + 1 \right)$. \square

Нехай $T > 0$ — деяка стала, функція $q(x)$, $x \in [0, \pi]$, — така неперервно диференційовна функція, що $q(x) \geq 0$, $\xi(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, — вибірково неперервне з імовірністю 1 випадкове поле.

Розглянемо першу крайову задачу для неоднорідного гіперболічного рівняння з нульовими початковими та крайовими умовами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\xi(x, t), \quad x \in [0, \pi], \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0; \quad (8)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0. \quad (9)$$

Розглянемо задачу Штурма-Ліувілля

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - qX + \lambda X = 0, \quad (10)$$

$$X(0) = X(\pi) = 0. \quad (11)$$

Нехай $X_n(x)$ — ортонормовані з вагою ρ власні функції цієї задачі, а λ_n — відповідні власні значення. Будемо вважати, що λ_n занумеровані в порядку зростання. Завдяки обмеженням на q всі власні значення додатні і нуль не є власним значенням [12].

Позначимо $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$, $B(x, y, t, s) = E\xi(x, t)\xi(y, s)$, $(x, y, t, s) \in [0, \pi]^2 \times [0, T]^2$. Припустимо, що $B(0, y, t, s) = B(\pi, y, t, s) = 0$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$; $B(x, 0, t, s) = B(x, \pi, t, s) = 0$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$.

Для кожної фіксованої пари $(t, s) \in [0, T]^2$ продовжимо функцію $B(x, y, t, s)$ як функцію від x, y на всю площину \mathbb{R}^2 так, щоб вона була періодичною функцією з періодом 2π по x та по y і щоб виконувались тотожності $B(-x, y, t, s) = -B(x, y, t, s) = B(x, -y, t, s)$. Внаслідок нашого припущення таке продовження можливе.

Позначимо

$$B_{i,j}(x, y, t, s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} B(x, y, t, s), \quad 0 \leq i, j \leq 2;$$

$$\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B(x, y, t, s) = B(x + \delta_1, y + \delta_2, t, s) - B(x + \delta_1, y, t, s) - B(x, y + \delta_2, t, s) + B(x, y, t, s);$$

$$\Delta_{x,\delta} B(x, y, t, s) = B(x + \delta, y, t, s) - B(x, y, t, s);$$

$$\Delta_{y,\delta} B(x, y, t, s) = B(x, y + \delta, t, s) - B(x, y, t, s);$$

$$\tilde{B}(x, y, t, s) = B(x, y, t, t) - B(x, y, t, s) - B(x, y, s, t) + B(x, y, s, s).$$

Теорема 2 ([10]). Нехай у (7) $\xi(x, t)$ — центроване строго Орлічеве випадкове поле з простору $L_U(\Omega)$ вибірково неперервне з імовірністю одиниця, U задовольняє g -умову (тобто $\exists z_0 \geq 0 \exists K > 0 \exists A > 0 \forall x \geq z_0 \forall y \geq z_0: U(x)U(y) \leq AU(Kxy)$). Нехай $\varphi(\lambda)$, $\lambda > 0$, — неперервна зростаюча функція, $\varphi(\lambda) > 0$ при всіх $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$, така, що функція $\frac{\lambda}{\varphi(\lambda)}$ є зростаючою при $\lambda > v_0$, де стала $v_0 \geq 0$. Припустимо, що при всіх $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$, $t \in [0, T]$, $s \in [0, T]$ існує неперервна похідна $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} B(x, y, t, s)$ та для деяких неперервних функцій $\tau(\delta_1, \delta_2)$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$, та $\tau(\delta)$, $\delta \geq 0$, таких, що $\tau(\delta_1, \delta_2) > 0$ при $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\tau(0, \delta_2) = \tau(\delta_1, 0) = 0$, $\tau(\delta_1, \delta_2)$ монотонно зростає по δ_1 та δ_2 , $\tau(\delta) > 0$ при $\delta > 0$, $\tau(0) = 0$, $\tau(\delta)$ монотонно зростає, виконуються умови:

– збігаються ряди

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m}\right)}{km} \varphi(k^2) \varphi(m^2) < \infty, & \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2} \varphi(k^2) \varphi(m^2) < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2 m} \varphi(k^2) \varphi(m^2) < \infty, & \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 m^2} \varphi(k^2) \varphi(m^2) < \infty; \end{aligned}$$

– для довільного $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{1}{v} \right) \right)^2 \right) dv < \infty; \quad (12)$$

– для всіх $0 \leq i, j \leq 1$ існують такі константи $C_{1,i,j} > 0$, $C_{2,i,j} > 0$, $C_{3,i,j} > 0$, що

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx dy &\leq C_{1,i,j} \tau(\delta_1, \delta_2), \\ \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_0^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dx \right) dy &\leq C_{2,i,j} \tau(\delta), \\ \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_0^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| dy \right) dx &\leq C_{3,i,j} \tau(\delta); \end{aligned}$$

– для всіх $0 \leq i, j \leq 1$ існують такі константи $M_{i,j} > 0$, що

$$\left| \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s) dx dy \right| \leq \frac{M_{i,j}}{\varphi^2 \left(\frac{1}{|t-s|} + v_0 \right)}.$$

Тоді ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{1}{\mu_n} \int_0^t \sin \mu_n(t-u) \zeta_n(u) du, \quad (13)$$

де

$$\zeta_n(t) = \int_0^{\pi} \zeta(x, t) X_n(x) dx, \quad (14)$$

збігається рівномірно за ймовірністю в області $[0, \pi] \times [0, T]$ ($T > 0$ — деяка стала), рівномірно за ймовірністю збігаються ряди, отримані з (13) почленним диференціюванням один та два рази по t і один та два рази по x , та з імовірністю одиниця задача (7)–(9) має розв'язок, який можна зобразити у вигляді ряду (13).

Лема 1. Нехай виконуються умови теореми 2. Позначимо

$$V_N(x, t) = \sum_{k=N+1}^{\infty} X_k(x) \frac{1}{\mu_k} \int_0^t \sin \mu_k(t-u) \zeta_k(u) du. \quad (15)$$

Тоді для всіх $h > 0$ при $x, y \in [0, \pi]$, $t, s \in [0, T]$, $N \geq 0$ має місце нерівність

$$\sup_{\substack{|x-y| \leq h \\ |t-s| \leq h}} (E|V_N(x, t) - V_N(y, s)|^2)^{1/2} \leq D_N \frac{1}{\varphi \left(\frac{1}{h} + v_0 \right)}, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} D_N = T \max\{L, 2C_X\} &\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} C_{k,m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) \right)^{1/2} \\ + C_X &\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} C_{k,m} \frac{1}{\mu_k \mu_m} (4T^2 \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(\mu_m + v_0) + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(1 + v_0) \right. \\ &\left. + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_m + v_0) \varphi(1 + v_0) + (\max\{1, 2T\})^2 \varphi^2(1 + v_0) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

L, C_X — константи, визначені в лемі 2 роботи [8], $C_{k,m} = \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} |E\zeta_k(t)\zeta_m(s)|$.

Доведення. Для будь-яких $x, y \in [0, \pi]$, $t, s \in [0, T]$, $N \geq 1$, маємо

$$\begin{aligned} & \left(\mathbb{E} |V_N(x, t) - V_N(y, s)|^2 \right)^{1/2} = \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (X_k(x) - X_k(y)) \int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} X_k(y) \left(\int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du - \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \right) \right|^2 \right)^{1/2} \leq A_1 + A_2, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} (X_k(x) - X_k(y)) \int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \right|^2 \right)^{1/2}, \\ A_2 &= \left(\mathbb{E} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} X_k(y) \left(\int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du - \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \right) \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Позначимо $R_{k,m}(t, s) = \int_0^t \int_0^s \sin \mu_k(t-u) \sin \mu_m(s-v) \mathbb{E} \zeta_k(u) \zeta_m(v) dv du$. Тоді

$$A_1^2 \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} |X_k(x) - X_k(y)| |X_m(x) - X_m(y)| |R_{k,m}(t, t)|.$$

З лем 2, 3 роботи [8] випливає, що $|X_k(x) - X_k(y)| \leq \max\{L, 2C_X\} \frac{\varphi(\mu_k^2 + v_0)}{\varphi\left(\frac{1}{|x-y|} + v_0\right)}$. Крім того,

$$|R_{k,m}(t, s)| \leq C_{k,m} \int_0^t \int_0^s |\sin \mu_k(t-u) \sin \mu_m(s-v)| dv du \leq T^2 C_{k,m}.$$

Отже,

$$A_1^2 \leq T^2 (\max\{L, 2C_X\})^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} C_{k,m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) \left(\varphi\left(\frac{1}{|x-y|} + v_0\right) \right)^{-2}.$$

$$\begin{aligned} A_2^2 &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} |X_k(y)| |X_m(y)| \left| \mathbb{E} \left(\int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du - \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^t \zeta_m(v) \sin \mu_m(t-v) dv - \int_0^s \zeta_m(v) \sin \mu_m(s-v) dv \right) \right|. \end{aligned}$$

Нехай для визначеності $s \leq t$. Тоді

$$\begin{aligned} & \int_0^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du - \int_0^s \zeta_k(u) \sin \mu_k(s-u) du \\ &= \int_0^s \zeta_k(u) (\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)) du + \int_s^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du. \end{aligned}$$

Отже, $A_2^2 \leq C_X^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} d_{k,m}(s, t)$, де

$$\begin{aligned} d_{k,m}(s, t) &= \left| \mathbb{E} \left(\int_0^s \zeta_k(u) (\sin \mu_k(t-u) - \sin \mu_k(s-u)) du + \int_s^t \zeta_k(u) \sin \mu_k(t-u) du \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\int_0^s \zeta_m(v) (\sin \mu_m(t-v) - \sin \mu_m(s-v)) dv + \int_s^t \zeta_m(v) \sin \mu_m(t-v) dv \right) \right|. \end{aligned}$$

При доведенні леми 2 з роботи [8] було показано, що

$$d_{k,m}(s, t) \leq C_{k,m} (4T^2 \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(\mu_m + v_0) + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(1 + v_0) + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_m + v_0) \varphi(1 + v_0) + (\max\{1, 2T\})^2 \varphi^2(1 + v_0)) \frac{1}{\varphi^2 \left(\frac{1}{|t-s|} + v_0 \right)}.$$

Отже,

$$A_2^2 \leq C_X^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} C_{k,m} \frac{1}{\mu_k \mu_m} (4T^2 \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(\mu_m + v_0) + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(1 + v_0) + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_m + v_0) \varphi(1 + v_0) + (\max\{1, 2T\})^2 \varphi^2(1 + v_0)) \frac{1}{\varphi^2 \left(\frac{1}{|t-s|} + v_0 \right)}.$$

□

Зауваження 1. З леми 1 роботи [10] випливає, що за умов теореми 2 при $k \geq 1$ та $m \geq 1$ має місце нерівність

$$C_{k,m} \leq \hat{C}_{k,m} = \sum_{i,j=0}^1 \frac{C_q^{2-i-j}}{\mu_k^2 \mu_m^2} \left(\frac{C_{1,ij} \tau \left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m} \right)}{8\pi} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{LC_{2,ij} \tau \left(\frac{\pi}{k} \right)}{4m} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{LC_{3,ij} \tau \left(\frac{\pi}{m} \right)}{4k} + \frac{C_{G,ij}}{km} \right), \quad (17)$$

де $C_q = \sup_{0 \leq x \leq \pi} |q(x)|$, $C_{G,ij} = L^2 \pi^2 \max_{\substack{x,y \in [0,\pi] \\ t,s \in [0,T]}} |B_{2i,2j}(x, y, t, s)|$.

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$P \left\{ \sup_{\substack{x \in [0,\pi] \\ t \in [0,T]}} |V_N(x, t)| > \varepsilon \right\} \leq \left(U \left(\frac{\varepsilon}{\hat{B}_N(\theta)} \right) \right)^{-1}, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{B}_N(\theta) &= \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{w_{0N}\theta} \chi_U \left(\left(\frac{\pi}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{C_\Delta \hat{D}_N}{u} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{T}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{C_\Delta \hat{D}_N}{u} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \right) du, \\ w_{0N} &= \frac{C_\Delta \hat{D}_N}{\varphi \left(\frac{1}{\max\{\pi, T\}} + v_0 \right)}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \hat{D}_N &= T \max\{L, 2C_X\} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \mu_m} \hat{C}_{k,m} \varphi(\mu_k^2 + v_0) \varphi(\mu_m^2 + v_0) \right)^{1/2} \\ &+ C_X \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \hat{C}_{k,m} \frac{1}{\mu_k \mu_m} (4T^2 \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(\mu_m + v_0) + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_k + v_0) \varphi(1 + v_0) \right. \\ &\quad \left. + 2T \max\{1, 2T\} \varphi(\mu_m + v_0) \varphi(1 + v_0) + (\max\{1, 2T\})^2 \varphi^2(1 + v_0)) \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

C_Δ — константа з означення строго Орлічевої сім'ї випадкових величин.

Доведення. Покладемо в теоремі 1 $t_0 = (0, 0)$. Тоді $\|X(t_0)\|_U = \|V_N(0, 0)\|_U = 0$. В нашому випадку $b = \pi$, $d - c = T$, $\sigma(h) = \frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{\varphi\left(\frac{1}{h} + v_0\right)}$, $h > 0$. Тому $\sigma^{(-1)}(u) = \frac{1}{\varphi^{(-1)}\left(\frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{u} - v_0\right)}$, $u > 0$.

Умова (5) набуває вигляду

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\frac{\pi}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{u} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \left(\frac{T}{2} \left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{u} \right) - v_0 \right) + 1 \right) \right) < \infty$$

і виконується, бо виконується умова (12). Зауважимо, що

$$w_0 = \sigma(\max\{\pi, T\}) = \frac{C_\Delta \widehat{D}_N}{\varphi\left(\frac{1}{\max\{\pi, T\}} + v_0\right)} = w_{0N}.$$

Крім того, за лемою 1 та зауваженням 1 для всіх $h > 0$

$$\begin{aligned} \sup_{\max\{|x-y|, |t-s|\} \leq h} \|V_N(x, t) - V_N(y, s)\|_U \\ \leq C_\Delta \sup_{\max\{|x-y|, |t-s|\} \leq h} \left(E(V_N(x, t) - V_N(y, s))^2 \right)^{1/2} \leq \sigma(h). \end{aligned}$$

Тому твердження теореми випливає з теореми 1 та наслідку 1. \square

2 ПРИКЛАДИ

Наведемо приклад випадкового поля $\xi(x, t)$, для якого виконуються умови теореми 2, а, отже, і оцінка теореми 3.

Приклад 1. Нехай $U(x) = |x|^p$, тобто $L_U(\Omega) = L_p(\Omega)$, при $p > 4$. Розглянемо випадкове поле $\xi(x, t) \in L_p(\Omega)$, $p > 4$, що можна представити у вигляді

$$\xi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k a_k f_k(x) \varphi_k(t),$$

де η_k , $k \geq 1$, — однаково розподілені незалежні центровані строго Орлічеві випадкові величини, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t \leq T$, $f_k(x)$ — двічі неперервно диференційовні, $\varphi_k(t)$ — неперервні функції, a_k — деякі сталі, $f_k(0) = f_k(\pi) = 0$, $E\eta_k^2 = m^2$, $E\eta_k = 0$.

Тоді коваріаційна функція має вигляд

$$B(x, y, t, s) = E\xi(x, t)\xi(y, s) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 f_k(x) f_k(y) \varphi_k(t) \varphi_k(s).$$

Нехай $\forall 0 \leq i \leq 1, \forall k \geq 1$ мають місце нерівності

$$\begin{aligned} |\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| &\leq d_{\varphi k} |t - s|^\beta, \quad \frac{2}{p} < \beta < \frac{1}{2}; & |\varphi_k(t)| &\leq D_{\varphi k}; \\ |f_k^{(2i)}(x + \delta) - f_k^{(2i)}(x)| &\leq d_{f_{ik}} \delta^\alpha, \quad \alpha > 2\beta; & |f_k^{(2i)}(x)| &\leq D_{f_{ik}} \end{aligned}$$

та для всіх $0 \leq i, j \leq 1$ збігаються ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{f_{ik}} \max\{d_{f_{jk}}, D_{f_{jk}}\} < \infty; \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{f_{ik}} D_{f_{jk}} < \infty.$$

Візьмемо $v_0 = 0$; $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta$, $\lambda > 0$, $\frac{2}{p} < \beta < \frac{1}{2}$ ($p > 4$); $\tau(\delta_1, \delta_2) = (\delta_1 \delta_2)^\alpha$, $\tau(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha > 2\beta$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{m}\right)}{km} \varphi(k^2) \varphi(m^2) &= \pi^{2\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(km)^{1+\alpha-2\beta}} < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{k}\right)}{km^2} \varphi(k^2) \varphi(m^2) &= \pi^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\alpha-2\beta} m^{2-2\beta}} < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau\left(\frac{\pi}{m}\right)}{k^2 m} \varphi(k^2) \varphi(m^2) &= \pi^\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-2\beta} m^{1+\alpha-2\beta}} < \infty, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 m^2} \varphi(k^2) \varphi(m^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-2\beta} m^{2-2\beta}} < \infty. \end{aligned}$$

Оскільки $U(x) = |x|^p$, $x \in \mathbb{R}$, $p > 4$; $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta$, $\lambda > 0$, $\frac{2}{p} < \beta < \frac{1}{2}$; то $U^{(-1)}(x) = x^{\frac{1}{p}}$, $x \geq 0$; $\varphi^{(-1)}(x) = \lambda^{\frac{1}{\beta}}$, $\lambda > 0$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$ при $\beta > \frac{2}{p}$

$$\int_0^\varepsilon U^{(-1)} \left(\left(\varphi^{(-1)} \left(\frac{1}{v} \right) \right)^2 \right) dv = \int_0^\varepsilon \left(\left(\frac{1}{v^{1/\beta}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{p}} dv = \int_0^\varepsilon \frac{1}{v^{\frac{2}{\beta p}}} dv = \frac{\varepsilon^{1-\frac{2}{\beta p}}}{1-\frac{2}{\beta p}} < \infty.$$

Розглянемо $B_{2i,2j}(x, y, t, s) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 f_k^{(2i)}(x) f_k^{(2j)}(y) \varphi_k(t) \varphi_k(s)$. Тоді

$$\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x, y, t, s) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \varphi_k(t) \varphi_k(s) \left(f_k^{(2i)}(x + \delta_1) - f_k^{(2i)}(x) \right) \left(f_k^{(2j)}(y + \delta_2) - f_k^{(2j)}(y) \right),$$

$$\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \varphi_k(t) \varphi_k(s) \left(f_k^{(2i)}(x + \delta) - f_k^{(2i)}(x) \right) f_k^{(2j)}(y),$$

$$\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \varphi_k(t) \varphi_k(s) f_k^{(2i)}(x) \left(f_k^{(2j)}(y + \delta) - f_k^{(2j)}(y) \right),$$

$$\tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s) = m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 f_k^{(2i)}(x) f_k^{(2j)}(y) (\varphi_k(t) - \varphi_k(s))^2.$$

За наших умов $\forall 0 \leq i, j \leq 1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi_k}^2 d_{fik} \max\{d_{fjk}, D_{fjk}\} < \infty$; $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi_k}^2 D_{fik} D_{fjk} < \infty$.

Тоді

$$|\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| \leq (\delta_1 \delta_2)^\alpha m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi_k}^2 d_{fik} d_{fjk},$$

$$|\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| \leq \delta^\alpha m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi_k}^2 d_{fik} D_{fjk},$$

$$|\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x, y, t, s)| \leq \delta^\alpha m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi_k}^2 D_{fik} d_{fjk},$$

$$|\tilde{B}_{2i,2j}(x, y, t, s)| \leq |t - s|^{2\beta} m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi_k}^2 D_{fik} D_{fjk}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{2,\delta_1,\delta_2} B_{2i,2j}(x,y,t,s)| dx dy &\leq 4\pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik} d_{fjk} \cdot (\delta_1 \delta_2)^\alpha, \\ \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{x,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)| dx \right) dy &\leq 2\pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik} D_{fjk} \cdot \delta^\alpha, \\ \sup_{\substack{0 \leq t \leq T \\ 0 \leq s \leq T}} \int_0^\pi \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_{y,\delta} B_{2i,2j}(x,y,t,s)| dy \right) dx &\leq 2\pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 D_{fik} d_{fjk} \cdot \delta^\alpha, \\ \left| \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{B}_{2i,2j}(x,y,t,s) dx dy \right| &\leq \pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik} D_{fjk} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{|t-s|}\right)^{2\beta}}. \end{aligned}$$

Таким чином, умови теореми 2 виконуються для $v_0 = 0$; $\varphi(\lambda) = \lambda^\beta$, $\frac{2}{p} < \beta < \frac{1}{2}$; $\tau(\delta_1, \delta_2) = (\delta_1 \delta_2)^\alpha$, $\tau(\delta) = \delta^\alpha$, $\alpha > 2\beta$;

$$\begin{aligned} C_{1,i,j} &= 4\pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik} d_{fjk}, & C_{2,i,j} &= 2\pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik} D_{fjk}, \\ C_{3,i,j} &= 2\pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 D_{fik} d_{fjk}, & M_{i,j} &= \pi^2 m^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik} D_{fjk}. \end{aligned}$$

Виберемо тепер конкретний процес $\zeta(x, t)$, для якого виконуються умови прикладу 1.

Приклад 2. Розглянемо $\zeta(x, t) \in L_5(\Omega)$ та однаково розподілені незалежні строго Орлічеві випадкові величини η_k , для яких $E\eta_k^2 = 1$, $E\eta_k = 0$. Припустимо, що випадковий процес $\zeta(x, t)$ записується у вигляді $\zeta(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{1}{k^4} \sin kx \cos kt$, де $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq t \leq T$.

Тобто $p = 5$, $a_k = \frac{1}{k^4}$, $m = 1$, $\varphi_k(t) = \cos kt$, $f_k(x) = \sin kx$, $f_k^{(2)}(x) = (\sin kx)'' = (k \cos kx)' = -k^2 \sin kx$.

Зауважимо, що оскільки $\forall x \in \mathbb{R}: |\sin x| \leq |x|$, то при $\frac{2}{5} < \beta < \frac{1}{2}$ для $|x| \leq 1$: $|\sin x| \leq |x| \leq |x|^\beta$; для $|x| > 1$: $|\sin x| \leq 1 \leq |x|^\beta$; тобто $|\sin x| \leq |x|^\beta$ при $x \in \mathbb{R}$.

Покладемо $\beta = \frac{3}{7}$, $\alpha = 1$. Тоді $\frac{2}{5} < \beta < \frac{1}{2}$, $\alpha > 2\beta$.

$$\begin{aligned} f_k^{(2i)}(x) &= (-1)^i k^{2i} \sin kx, \quad 0 \leq i \leq 1; \\ \left| f_k^{(2i)}(x + \delta) - f_k^{(2i)}(x) \right| &= \left| (-1)^i k^{2i} \sin k(x + \delta) - (-1)^i k^{2i} \sin kx \right| \\ &= k^{2i} |\sin kx(x + \delta) - \sin kx| = 2k^{2i} \left| \sin \frac{k\delta}{2} \cos \frac{k(2x + \delta)}{2} \right| \\ &\leq 2k^{2i} \left| \sin \frac{k\delta}{2} \right| \leq 2k^{2i} \frac{k\delta}{2} = k^{1+2i} \delta; \\ \left| f_k^{(2i)}(x) \right| &= k^{2i} |\sin kx| \leq k^{2i}; \\ |\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| &= |\cos kt - \cos ks| = 2 \left| \sin \frac{k(t-s)}{2} \sin \frac{k(t+s)}{2} \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{k(t-s)}{2} \right| \leq 2 \left(\frac{k|t-s|}{2} \right)^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{4}{7}} k^{\frac{3}{7}} |t-s|^{\frac{3}{7}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_k(t) - \varphi_k(s)| &= |\cos kt - \cos ks| = 2 \left| \sin \frac{k(t-s)}{2} \sin \frac{k(t+s)}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{k(t-s)}{2} \right| \\
&\leq 2 \left(\frac{k|t-s|}{2} \right)^{\frac{3}{7}} = 2^{\frac{4}{7}} k^{\frac{3}{7}} |t-s|^{\frac{3}{7}}; \\
|\varphi_k(t)| &= |\cos kt| \leq 1.
\end{aligned}$$

Отже,

$$d_{fik} = k^{1+2i}; \quad d_{\varphi k} = 2^{\frac{4}{7}} k^{\frac{3}{7}}; \quad D_{fik} = k^{2i}; \quad D_{\varphi k} = 1.$$

Оскільки $a_k = \frac{1}{k^4}$, то при $0 \leq i, j \leq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 D_{\varphi k}^2 d_{fik} \max\{d_{fjk}, D_{fjk}\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1+2i} k^{1+2j}}{k^8} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty; \\
\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 d_{\varphi k}^2 D_{fik} D_{fjk} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{4}{7}} k^{\frac{3}{7}} k^{2i} k^{2j}}{k^8} \leq 2^{\frac{4}{7}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3+\frac{4}{7}}} < \infty
\end{aligned}$$

i умови теореми 2 виконуються для $\varphi(\lambda) = \lambda^{\frac{3}{7}}$; $\tau(\delta_1, \delta_2) = \delta_1 \delta_2$; $\tau(\delta) = \delta$.

ВИСНОВКИ

За умов існування розв'язку гіперболічного рівняння з нульовими початковими та граничними умовами та строго Орлічевою випадковою правою частиною у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду знайдено оцінку розподілу супремуму розв'язку рівняння. Наведено приклади строго Орлічевих випадкових полів, що задовольняють ці умови.

REFERENCES

- [1] Dovhai B.V. *Justification of the Fourier method for an inhomogeneous hyperbolic equation with random right-hand side*. Ukrainian Math. J. 2004, **56** (5), 616–624. (in Ukrainian)
- [2] Dovhai B.V. *Properties of a Solution of an Inhomogeneous Hyperbolic Equation with Random Right-Hand Side*. Ukrainian Math. J. 2005, **57** (4), 474–482. (in Ukrainian)
- [3] Dovhai B.V. *Solving hyperbolic equations with Gaussian right-hand side of a special form by Fourier method*. Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2005, **3**, 31–36. (in Ukrainian)
- [4] Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. *The condition for application of Fourier method to the solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ -subgaussian right hand side*. Random operators and stochastic equations 2005, **13** (3), 281–296. doi:10.1515/156939705774286074
- [5] Dovgay B.V., Kozachenko Yu.V. *Properties of solution of nonhomogeneous string oscillation equation with φ -subgaussian right side*. Random operators and stochastic equations 2009, **17** (3), 221–241. doi:10.1515/ROSE.2009.016
- [6] Dovhai B.V. *Generalized solutions of hyperbolic equations with φ -subgaussian right-hand side*. Theory of Probability and Mathematical Statistics 2009, **81**, 25–30. (in Ukrainian)
- [7] Dovhai B.V. *Simulation of solution of hyperbolic equations*. Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2011, **3**, 18–23. (in Ukrainian)
- [8] Dovhai B.V. *Hyperbolic equations with Orlicz right-hand side*. Sci. Bull. Uzhgorod Univ., Math. Inform. Series 2011, **22** (2), 64–78. (in Ukrainian)

- [9] Dovhai B.V. *Generalized solutions of the hyperbolic equation with Orlicz right part*. Bull. Kyiv Univ., Phys. Math. Series 2012, **1**, 13–17. (in Ukrainian)
- [10] Dovhai B.V. *The equations of string oscillation with Orlicz right part*. Sci. Bull. Uzhgorod Univ., Math. Inform. Series 2013, **24** (1), 34–45. (in Ukrainian)
- [11] Kozachenko Yu.V., Perestyuk M.M. *On the uniform convergence of wavelet expansions of random processes from Orlicz spaces of random variables. I*. Ukrainian Math. J. 2007, **59** (12), 1850–1869. doi:10.1007/s11253-008-0030-y (translation of Ukrainian Math. Zhurn. 2007, **59** (12), 1647–1659 (in Ukrainian))
- [12] Polozhii G.N. *Equations of mathematical physics*. Vysshaya Shkola, Moscow, 1964. (in Russian)

Надійшло 25.08.2013

Dovhai B.V. *The estimation of supremum distribution of solution of hyperbolic equations with Orlicz right side*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 231–241.

We consider the hyperbolic equation with homogeneous initial and boundary conditions and Orlicz right side. An estimate of supremum distribution of the problem solution is obtained in case of existence of a solution in the form of uniformly convergent in probability series. Examples of strictly Orlicz random fields that satisfy these conditions are showed.

Key words and phrases: hyperbolic equation, supremum distribution, Orlicz random field.

Довгай Б.В. *Оценка распределения супремума решения гиперболического уравнения с Орличевой правой частью* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 231–241.

Рассматривается гиперболическое уравнение с однородными начальными и граничными условиями и Орличевой правой частью. В условиях существования решения в виде равномерно сходящегося по вероятности ряда получена оценка распределения супремума решения такой задачи. Приведены примеры строго Орличевых случайных полей удовлетворяют этим условиям.

Ключевые слова и фразы: гиперболическое уравнение, распределение супремума, Орличевое случайное поле.