

УДК 517.576

Мулява О.М.¹, Шеремета М.М.²

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ДОСТАТНІХ УМОВ НАЛЕЖНОСТІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДО КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

Мулява О.М., Шеремета М.М. *Зауваження до достатніх умов належності аналітичних функцій до класів збіжності* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 298–304.

Добре відомо, що якщо тейлорові коефіцієнти f_k цілої функції f задовольняють умови $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ і $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^{k/\varrho} < +\infty$, то f належить до валіронового класу збіжності. Доведено, що у цьому твердженні умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ можна замінити умовою $(l_{k-1}l_{k+1}/l_k^2)|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$, де додатна послідовність (l_k) така, що $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ при $k \rightarrow \infty$. Подібні результати отримано для інших класів збіжності цілих та аналітичних в одиничному крузі функцій.

Ключові слова і фрази: ціла функція, аналітична в крузі функція, клас збіжності.

¹ Національний університет харчових технологій, Київ, Україна

² Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

E-mail: info@nuft.edu.ua (Мулява О.М.), m_m_sheremeta@list.ru (Шеремета М.М.)

ВСТУП

Для степенового ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (1)$$

з радіусом збіжності $R[f] \in (0, +\infty)$ і $0 \leq r < +\infty$ нехай $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Якщо $R[f] = +\infty$, тобто f — ціла функція, то величину $\varrho = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M(r, f)}{\ln r}$ називають її порядком, а за умови $0 < \varrho < +\infty$ належність до валіронового класу збіжності означають [10] умовою

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln M(r, f)}{r^{\varrho+1}} dr < +\infty. \quad (2)$$

З доведеної П.Камсеном [4] теореми про належність цілого ряду Діріхле до класу збіжності впливає такий результат.

Теорема 1. *Для того, щоб ціла функція (1) належала до валіронового класу збіжності необхідно, а у випадку, коли $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, і достатньо, щоб $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^{k/\varrho} < +\infty$.*

Якщо функція f аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, то порядок її зростання переважно вводять за формулою $\varrho^0 = \overline{\lim}_{r \uparrow 1} \frac{\ln \ln M(r, f)}{-\ln(1-r)}$, а за умови $0 < \varrho^0 < +\infty$ належність до класу збіжності означають [2] умовою

$$\int_0^1 (1-r)^{\varrho^0-1} \ln^+ M(r, f) dr < +\infty. \quad (3)$$

З доведеної в [2] теореми випливає наступний результат.

Теорема 2. Для того, щоб аналітична в \mathbb{D} функція (1) належала до означеного умовою (3) класу збіжності необхідно, а у випадку, коли $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, і досить, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^+ |f_k|}{k} \right)^{\varrho^0+1} < +\infty.$$

У запропонованій замітці буде показано, що у теоремах 1 і 2 умову неспадання послідовності можна замінити дещо слабшою умовою. Подібну заміну можна здійснити і у випадках узагальнених класів збіжності.

1 ДОПОВНЕННЯ ТЕОРЕМ 1 І 2

Почнемо з цілих функцій.

Теорема 3. У теоремі 1 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, де додатна послідовність (l_k) така, що

$$0 < \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} < +\infty. \quad (4)$$

Доведення. Нехай $l(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$. Тоді степеневий ряд

$$D_l^{(1)} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_k}{l_{k+1}} f_{k+1} z^k$$

називається [3] похідною Гельфонда-Леонт'єва. Якщо $l(z) = e^z$, то $D_l^{(1)} f(z) = f'(z)$. Зауважимо, що не завжди радіус збіжності похідної Гельфонда-Леонт'єва ряду (1) збігається з радіусом збіжності цього ряду, а [5, 6] умова (4) є необхідною і достатньою умовою для того, щоб рівності $R[f] = +\infty$ і $R[D_l^{(1)} f] = +\infty$ були рівносильними. В [6] доведено, що за умови (4) f і $D_l^{(1)} f$ належать до валіронового класу збіжності одночасно.

За теоремою 1 для того, щоб $D_l^{(1)} f$ належала до валіронового класу збіжності досить,

щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{l_k}{l_{k+1}} |f_{k+1}| \right)^{\varrho/k} < +\infty$. З (4) випливає,

що остання умова рівносильна умові $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k+1}|^{k/\varrho} < +\infty$. Оскільки $f_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то $|f_{k+1}|^{\varrho/k} = |f_{k+1}|^{\varrho/(k+1)} |f_{k+1}|^{\varrho/k - \varrho/(k+1)} < |f_{k+1}|^{\varrho/(k+1)}$ для всіх $k \geq k_0$, тобто з умови $\sum_{n=1}^{\infty} |f_k|^{k/\varrho} < +\infty$ випливає умова $\sum_{n=1}^{\infty} |f_{k+1}|^{k/\varrho} < +\infty$. Теорему 3 доведено. \square

Для аналітичних в одиничному крузі функцій правильна наступна теорема.

Теорема 4. У теоремі 2 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow 1$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 1$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, де додатна послідовність (l_k) така, що

$$0 < \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{l_k}{(k+1)l_{k+1}} < +\infty. \quad (5)$$

Доведення. В [7] доведено, що за умов (5) аналітична в \mathbb{D} функція (1) та її похідна Гельфонда-Леонтьєва $D_l^{(1)}$ належить чи не належить до означеного умовою (3) класу збіжності одночасно. За теоремою 2 для того, щоб $D_l^{(1)}f$ належала до цього класу збіжності досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 1$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \ln^+ \left(\frac{l_k}{l_{k+1}} |f_{k+1}| \right) \right)^{\varrho^{0+1}} < +\infty$. Але з огляду на (5)

$$\frac{1}{k} \ln^+ \left(\frac{l_k}{l_{k+1}} |f_{k+1}| \right) \leq \frac{\ln^+ |f_k|}{k} + \frac{1}{k} \ln \frac{l_k}{l_{k+1}} + \ln 2 \leq \frac{\ln^+ |f_k|}{k} + C \frac{\ln k}{k},$$

де C — додатна стала, і оскільки $\varrho^0 > 0$, то

$$\left(\frac{1}{k} \ln^+ \left(\frac{l_k}{l_{k+1}} |f_{k+1}| \right) \right)^{\varrho^{0+1}} \leq \left(\frac{\ln^+ |f_k|}{k} \right)^{\varrho^{0+1}} + C \left(\frac{\ln k}{k} \right)^{\varrho^{0+1}}.$$

Тому остання умова випливає з умови $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^+ |f_k|}{k} \right)^{\varrho^{0+1}} < +\infty$. Теорему 4 доведено. \square

2 УЗАГАЛЬНЕНІ КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ

Через L^0 позначимо клас таких додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій α , що $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. З наведеної у [8] теоремі 1 випливає наступний результат.

Теорема 5. Нехай α — вгнута неперервно диференційовна на $[x_0, +\infty)$ функція, $\alpha(e^x) \in L^0$, $\alpha'(x+O(1)) \asymp \alpha'(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а функція $\beta \in l^0$ така, що $x \frac{\beta'(x)}{\beta(x)} \geq h > 0$ для $x \geq x_0$ і $\int_1^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx < +\infty$. Тоді для того, щоб для цілої функції (1)

$$\int_1^{\infty} \frac{\alpha(\ln M(r, f))}{r\beta(\ln r)} dr < +\infty \quad (6)$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_k|/|f_{k+1}|)$ для $k \geq k_0$ є неспадною, і досить, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha'(k) \beta_1 \left(\frac{1}{k} \ln \frac{1}{|f_k|} \right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \quad (7)$$

З іншого боку, в [6] доведено, що якщо $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$, то за умови (4) ціла функція (1) та її похідна Гельфонда-Леонт'єва належать чи не належать до означеного умовою (6) узагальненого класу збіжності одночасно. За теоремою 5 для того, щоб (1) належала до цього класу досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha'(k) \beta_1 \left(\frac{1}{k} \ln \frac{l_{k+1}}{l_k |f_{k+1}|} \right) < +\infty. \quad (8)$$

Оскільки $\beta \in L^0$, то $\beta_1((1+o(1))x) = (1+o(1))\beta_1(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, і з огляду на умову (4) при $k \rightarrow \infty$

$$\beta_1 \left(\frac{1}{k} \ln \frac{l_{k+1}}{l_k |f_{k+1}|} \right) = \beta_1 \left(\frac{1}{k} \ln \frac{1}{|f_{k+1}|} + O(1) \right) = (1+o(1)) \left(\frac{1}{k+1} \ln \frac{1}{|f_{k+1}|} \right),$$

то з (7) випливає (8), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 6. У теоремі 5 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, де послідовність (l_k) задовольняє умову (4).

Для аналітичних в одиничному крузі функцій наслідком з теореми 2 з [8] є наступний результат.

Теорема 7. Нехай функція α така, як у теоремі 5, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови $x \frac{\beta'(x)}{\beta(x)} - 2 \geq h > 0$ для $x \geq x_0$ і $\int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx < +\infty$. Тоді для того, щоб для аналітичної в одиничному крузі функції (1)

$$\int_{r_0}^1 \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{(1-r)^2 \beta(1/(1-r))} dr < +\infty \quad (9)$$

необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_{k-1}/f_k|)$ для $k \geq k_0$ є неспадною, і досить, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha'(k) \beta_1 \left(\frac{k}{\ln^+ |f_k|} \right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{d\sigma}{\beta(\sigma)}. \quad (10)$$

З іншого боку, з доведеної в [6] теореми 5 неважко отримати, що якщо функції α і β задовольняють умови теореми 7, а

$$0 < p_1 \leq \frac{l_{k+1}}{l_k} \leq p_2 < +\infty, \quad (11)$$

то аналітична в \mathbb{D} функція f та її похідна Гельфонда-Леонт'єва $D_i^{(1)}(f)$ належать чи не належать до означеного умовою (9) узагальненого $\alpha\beta$ -класу збіжності. За теоремою 7 для того, щоб $D_i^{(1)}f$ належала до цього класу досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ для $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha'(k) \beta_1 \left(\frac{k}{\ln^+ ((l_k/l_{k+1})|f_{k+1}|)} \right) < +\infty. \quad (12)$$

Але з огляду на (11) маємо $\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1}|) = \ln^+ |f_{k+1}| + O(1)$ при $k \rightarrow \infty$ і, оскільки $\beta_1((1+o(1))x) = (1+o(1))\beta_1(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то

$$\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+((l_k/l_{k+1})|f_{k+1}|)}\right) = (1+o(1))\beta_1\left(\frac{k}{\ln^+ |f_{k+1}|}\right)$$

при $k \rightarrow \infty$. Тому з (10) випливає (12), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 8. У теоремі 7 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, де додатна послідовність (l_k) задовольняє умову (11).

3 Ф-КЛАС ЗБІЖНОСТІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Через Ω позначимо клас таких додатних необмежених на $(-\infty, +\infty)$ функцій Φ , що похідна $\Phi' \in$ додатною, неперервною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Як в [1] будемо говорити, що ціла функція (1) належить до Ф-класу збіжності, якщо

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\Phi'(\ln r) \ln M(r, f)}{r\Phi(\ln r)} dr < +\infty. \quad (13)$$

З доведеної в [9] теореми 1 випливає наступний результат.

Теорема 9. Нехай $\Phi \in \Omega$ і

$$0 < h \leq \frac{\Phi''(x)\Phi(x)}{(\Phi'(x))^2} \leq H < +\infty, \quad x \geq x_0. \quad (14)$$

Тоді для того, щоб ціла функція (1) належала до Ф-збіжності, необхідно, а у випадку, коли послідовність $(|f_{k-1}/f_k|)$ є неспадною для $k_0 \leq k \leq k_1$, і досить, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi'\left(\frac{1}{k} \ln \frac{1}{|f_k|}\right)} < +\infty. \quad (15)$$

З іншого боку, в [6] доведено, що якщо

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x) \ln \Phi'(x)}{\Phi^2(x)} dx < +\infty, \quad (16)$$

а послідовність (l_k) задовольняє умову (11), то ціла функція f та її похідна Гельфонда-Леонт'єва $D^{(1)}$ належать чи не належать до Ф-класу одночасно.

Зауважимо, що з (14) випливає (16), бо, інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x) \ln \Phi'(x)}{\Phi^2(x)} dx &= \int_{x_0}^{\infty} \ln \Phi'(x) d\left(-\frac{1}{\Phi(x)}\right) \\ &\leq \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)\Phi(x)} dx + \text{const} \leq \int_{x_0}^{\infty} \frac{\Phi'(x)}{\Phi^2(x)} dx + \text{const}. \end{aligned}$$

Тому за теоремою 9 для того, щоб $D_l^{(1)}f$ належала до Φ -класу збіжності, досить, щоб $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow 0$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Phi' \left(\frac{1}{k} \ln \frac{l_{k+1}}{l_k |f_{k+1}|} \right)} < +\infty. \quad (17)$$

Але з огляду на (11) маємо $\frac{1}{k} \ln \frac{l_{k+1}}{l_k |f_{k+1}|} = \frac{1}{k} \left(\ln \frac{1}{|f_{k+1}|} + O(1) \right) = \frac{1+o(1)}{k+1} \ln \frac{1}{|f_{k+1}|}$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$. Тому, якщо $\Phi' \in L^0$, то з (5) випливає (17), і, отже, доведено наступну теорему.

Теорема 10. Якщо $\Phi' \in L^0$, то у теоремі 9 умову $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ можна замінити умовою $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, де додатна послідовність (l_k) задовольняє умову (11).

4 ЗАУВАЖЕННЯ

Покажемо, що існують такі послідовності (f_k) і (l_k) , що умова $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ не виконується, але $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} \frac{|f_k|}{|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ і f належить, наприклад, до валіронового класу збіжності.

Нехай (k_n) — досить швидко зростаюча послідовність натуральних чисел, наприклад, $k_{n+1} - k_n \geq 5$, а $f_k = \left(\frac{1}{k \ln^2 k} \right)^k$ для $2 \leq k \neq k_n$ і $f_{k_n} = \sqrt{\frac{k_n^2 - 1}{k_n^2}} f_{k_{n-1}} f_{k_{n+1}}$. За формулою Адамара ціла функція f з такими коефіцієнтами має порядок $\rho = 1$. Незавжди перевірити, що $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{1/k} < +\infty$. Оскільки $\frac{f_{k_n}}{f_{k_{n+1}}} = \frac{k_n^2 - 1}{k_n^2} \frac{f_{k_{n-1}}}{f_{k_n}}$, то умова $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$ не виконується і використати теорему 1 для того, щоб показати, що f належить до валіронового класу збіжності з $\rho = 1$ неможливо. Проте, якщо виберемо $l_k = 1/k!$, то умова (4) виконується, $\frac{l_{k-1}l_{k+1}}{l_k^2} = \frac{k}{k+1}$, і неважко перевірити, що $\frac{k|f_k|}{(k+1)|f_{k+1}|} \nearrow +\infty$ при $k_0 \leq k \rightarrow \infty$, тобто за теоремою 3 f належить до валіронового класу збіжності з $\rho = 1$.

REFERENCES

- [1] Filevych P.V., Sheremeta M.M. *On a convergence class for entire functions*. Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz 53 Ser. Rech. Deform. 2003, 40, 5–16.
- [2] Gal' Yu.M., Sheremeta M.M. *Belonging of analytic functions to a convergence class*. Dokl. AN Ukr. SSR, Ser. A 1985, 7, 11–14. (in Russian)
- [3] Gelfond A.O., Leont'ev A.F. *On a generalisation of Fourier series*. Matem. Sbornik 1957, 23 (3), 477–500. (in Russian)
- [4] Kamthan P.K. *A theorem of step functions*. Istanbul Univ. Fen. Fac. Mecm. 1963, 28, 65–69.

- [5] Luhova L.L., Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Properties of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions*. Ufa Math. J. 2010, **2** (32), 90–101. (in Russian)
- [6] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *On belonging of Gelfond-Leont'ev derivative to a convergence class*. Sci. Bull. Chernivtsi Univ. 2009, **485**, 71–77. (in Ukrainian)
- [7] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Belonging to convergence classes of Hadamard's compositions of Gelfond-Leont'ev derivatives for analytic functions*. Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (1), 11–115. (in Ukrainian)
- [8] Mulyava O.M. *Convergence classes in the theory of Dirichlet series*. Dopovidi NAN Ukraine, ser. A 1999, **2**, 35–39. (in Ukrainian)
- [9] Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *On a convergence class for Dirichlet series*. Bull. Soc. Sci. Lettres Lodz **50** Ser. Rech. Deform. 2000, **30**, 23–30.
- [10] Valiron G. *General theory of integral functions*. Toulouse, 1923.

Надійшло 29.08.2013

Mulyava O.M., Sheremeta M.M. *Remarks on sufficient conditions of belonging of analytic functions to convergence classes*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 298–304.

It is well known that if Taylor's coefficients f_n of an entire functions f satisfy the conditions $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ as $k \rightarrow \infty$ and $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{q/k} < +\infty$ then f belongs to Valiron convergence class. It is proved that in the statement the condition $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ one can replace on the condition $l_{k-1}l_{k+1}l_k^{-2}|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$, where (l_k) is a positive sequence such that $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ as $k \rightarrow \infty$. Analogous problems are solved for another convergence classes of entire and analytic functions in the unit disk.

Key words and phrases: entire function, analytic function in a disk, convergence class.

Мулява О.М., Шеремета М.М. *Замечания о достаточных условиях принадлежности аналитических функций классам сходимости* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 298–304.

Хорошо известно, что если тейлоровские коэффициенты f_n целой функции f удовлетворяют условиям $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^{q/k} < +\infty$, то f принадлежит валироновскому классу сходимости. Доказано, что в этом утверждении условие $|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$ можно заменить условием $l_{k-1}l_{k+1}l_k^{-2}|f_k|/|f_{k+1}| \nearrow +\infty$, где положительная последовательность (l_k) такая, что $\sqrt[k]{l_k/l_{k+1}} \asymp 1$ при $k \rightarrow \infty$. Аналогичные задачи решены для других классов сходимости целых аналитических в единичном круге функций.

Ключевые слова и фразы: целая функция, аналитическая в круге функция, класс сходимости.