ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 515.12+512.58

Овчар І.Є.[1], Скасків О.Б.[2]

ОДИН АНАЛОГ НЕРІВНОСТІ ВІМАНА ДЛЯ ІНТЕГРАЛІВ ЛАПЛАСА, ЗАЛЕЖНИХ ВІД МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Овчар І.Є., Скасків О.Б. *Один аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 305–309.

Встановлюються асимптотичні оцінки зверху інтегралів типу Лапласа.

Ключові слова і фрази: нерівність Вімана, інтеграл Лапласа-Стілт'єса, ряд Діріхле.

[1] Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна
[2] Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

Нехай $f(u)$ — довільна невід'ємна вимірна функція на $\mathbb{R}_+ := [0;+\infty)$, а ν — така зліченно-адитивна на $\mathbb{R}_+$ міра з необмеженим носієм, що $\nu(\{x\colon 0 \le x \le b\}) < +\infty$ для кожного $b > 0$. При цьому через $\nu(E)$ позначаємо ν-міру ν-вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_+$, тобто $\nu(E) = \int_{\mathbb{R}_+\cap E} \nu(dx)$, а $\nu(a,b] := \nu(\{u \in \mathbb{R}_+ : a < u \le b\})$. Розглянемо функції $F(x)$, визначені на $\mathbb{R}_- := (-\infty;0)$ за допомогою збіжного для всіх $x \in \mathbb{R}_-$ інтегралу

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)e^{xu}\nu(du). \tag{1}$$

Через $\mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо клас функцій F вигляду (1).

Нехай L — клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ $(0 \le t \to +\infty)$; L_1 — клас функцій $\psi \in L$ таких, що $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty$.

Для вимірної множини $E \subset \mathbb{R}_-$ її логарифмічною мірою називаємо величину

$$m_{\ln}(E) := \int_{E\cap[-1,0)} \frac{dx}{|x|}.$$

Нехай $\operatorname{supp}\nu$ — носій міри ν в $\mathbb{R}_+$, тобто така замкнена множина $E \equiv \operatorname{supp}\nu$, що $\nu(\mathbb{R}_+ \setminus E) = 0$ і $\nu(\{u \in \mathbb{R}_+ : |u-u_0| < r\}) > 0$ для кожних $u_0 \in E$ і $r > 0$.

Для $x < 0$ та $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$ позначимо

$$\mu_*(x) = \sup\{f(u)e^{xu}\colon u \in \operatorname{supp}\nu\}.$$

У статті [3] знайдено достатні умови, за яких виконується співвідношення

$$F(x) \le (d + o(1))\mu_*(x)$$

при $x \to -0$ зовні деякої виняткової множини нульової асимптотичної h-щільності у точці $x = 0$ [3]. При цьому множина $E \subset \mathbb{R}_-$, яка має скінченну логарифмічну міру, має також нульову асимптотичну h-щільність у точці $x = 0$ для $h(x) \equiv x$, тобто $\int_{E\cap[x,0)} dx = o(|x|)$ $(x \to -0)$. Метод доведення згаданого щойно твердження є близьким

2010 *Mathematics Subject Classification:* 18B30, 54B30.

до методу доведень з [5, 6], який по суті експлуатує ту ж ідею використання ймовірнісної нерівності Б'єнеме-Чебишова, що й у П. Розенблума [4]. Власне, доведення базується на використанні такої нерівності [3, нерівність (2)]:

$$F(x) \le \frac{c}{c-1} \int\limits_{|x-g'(x)|<\sqrt{cg''(x)}} e^{xu} f(u)\nu(du), \tag{2}$$

яка виконується для всіх $x<0$ і для будь-якої функції $c=c(x)>1$, де $g(x)=\ln F(x)$.

З нерівності (2) нескладно отримати таке твердження.

Твердження 1. *Нехай $F\in\mathcal{I}_0(\nu)$ і виконується умова*

$$(\exists c_1>0)(\exists c_2>0)(\forall a>0)(\forall b\in(0,a))\colon\quad \nu(a-b,a+b]\le c_1b+c_2. \tag{3}$$

Тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує така множина $E\subset(-\infty;0)$ скінченної логарифмічної міри, тобто $m_{\ln}(E)<+\infty$, що для всіх $x\in[-1,0)\setminus E$ виконується нерівність

$$F(x)\le \frac{\mu_*(x)}{|x|^{1+\varepsilon}}\Big(\ln\Big(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big)\Big)^{1/2+\varepsilon}. \tag{4}$$

Доведення. З нерівності (2) за умовою (3) отримуємо

$$F(x)\le \frac{c}{c-1}\mu_*(x)(c_1\sqrt{cg''(x)}+c_2). \tag{5}$$

Для функцій $\psi\in L_1$, $h\in\{g(x),g'(x)\}$ означимо множину $E(h):=\{x<0\colon h'(x)\ge \psi(h(x))/|x|\}$. Тоді

$$m_{\ln}(E(h))=\int_{E(h)}\frac{dx}{|x|}\le\int_{E(h)}\frac{h'(x)dx}{\psi(h(x))}\le\int_{\mathbb{R}_+}\frac{du}{\psi(u)}<+\infty.$$

Отже, $m_{\ln}(E(g)\cup E(g'))<+\infty$ і для всіх $x\in[-1,0)$ зовні множини скінченної логарифмічної міри $g''(x)\le\frac{1}{|x|}\psi(\frac{1}{|x|}\psi(g(x)))$. Вибираючи $\psi(t)=t^{1+\delta}$, $c(x)\equiv 2$, а $\delta>0$ достатньо малим, з (5) отримуємо, що при $x\to-0$ ($x\notin E(g)\cup E(g')$)

$$F(x)\le\frac{\mu_*(x)}{|x|^{1/2+\varepsilon/2}}(g(x)/|x|)^{1/2+\varepsilon/2},$$

звідки вже елементарно отримуємо потрібне співвідношення. □

На те, що показники степенів $1+\varepsilon$ і $1/2+\varepsilon$ в нерівності (4) одночасно не можна, взагалі кажучи, замінити на числа менші, ніж 1 і $1/2$, вказує таке твердження.

Твердження 2. *Для кожної міри ν такої, що $(\forall x\in\mathbb{R}_-)\colon$ $\int_{\mathbb{R}_+}\exp\{ux\}\nu(du)<+\infty$ і виконується умова*

$$(\exists c_1>0)(\exists c_2>0)(\forall a>0)(\forall b\in(0,a))\colon\quad \nu(a-b,a+b]\ge c_1b+c_2, \tag{6}$$

існує функція $F\in\mathcal{I}_0(\nu)$, для якої

$$\varliminf_{x\to-0} F(x)\left(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big(\ln\Big(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big)\Big)^{1/2}\right)^{-1}>0. \tag{7}$$

Зауваження 1. *Умови* (3) *і* (6) *виконуються у випадку, коли ν — міра Лебега на прямій. Про умову* (3) *те ж саме можна сказати і у випадку, коли міра ν має вигляд $\nu(0,t] = \int_{(0,t]} du/l(u)$, де $l \in L$.*

Доведення. Розглянемо інтеграл вигляду (1) з $f(u) = \exp\{u^\varepsilon\}$ $(u \geq 0)$, тобто

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{h(u,x)}\nu(du),$$

де $h(u,x) = u^\varepsilon + xu$, $\varepsilon \in (0,1)$. Зрозуміло, що $F \in \mathcal{I}_0(\nu)$. Справді, при фіксованому $x < 0$ для всіх достатньо великих $u \geq u_0$ маємо $u^\varepsilon \leq u|x|/2$, тому за умовою

$$F(x) \leq \int_0^{u_0} e^{h(u,x)}\nu(du) + \int_{\mathbb{R}_+} e^{xu/2}\nu(du) < +\infty.$$

Крім цього, очевидно, що $\min\{F(x), \mu_*(x)\} \to +\infty$ $(x \to -0)$.

Зауважимо тепер, що для кожного $x < 0$ точку $u(x)$ максимуму підінтегральної функції знаходять з рівняння $h'_u(u,x) = \varepsilon \cdot u^{\varepsilon-1} - |x| = 0$ і, отже,

$$u(x) = (\varepsilon/|x|)^{1/(1-\varepsilon)}, \quad \ln\mu_*(x) = h(u(x),x) = (1-\varepsilon)(u(x))^\varepsilon = (1-\varepsilon)(\varepsilon/|x|)^{\varepsilon/(1-\varepsilon)}. \tag{8}$$

Оскільки $h''_u(u,x) = \varepsilon(\varepsilon-1) \cdot u^{\varepsilon-2}$, то за формулою Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа

$$h(u,x) = h(u(x),x) - \frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\frac{(u-u(x))^2}{(u(x)+\theta(u-u(x)))^{2-\varepsilon}}, \quad \theta \in (0,1).$$

Тому, якщо вибрати $v = v(x) = (u(x))^{1-\varepsilon/2}$ $(x < 0)$, то $v(x) = o(u(x))$ $(x \to -0)$ і, отже, з умови (6) при $x \to -0$ отримаємо

$$\begin{aligned} F(x) \geq& \mu_*(x) \int_{(u(x)-v,u(x)+v]} \exp\left\{-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2}\frac{(u-u(x))^2}{(u(x)+\theta(u-u(x)))^{2-\varepsilon}}\right\}\nu(du) \\ \geq& \mu_*(x)\nu(u(x)-v(x),u(x)+v(x)] \exp\left\{-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)(1+o(1))}{2}\right\} \\ \geq& c_3\mu_*(x)(c_1 v(x) + c_2) \qquad (x \to -0), \end{aligned} \tag{9}$$

де $c_3 = \exp\{-\varepsilon(1-\varepsilon)/3\}$. З рівностей (8) випливає, що

$$v(x) = (\varepsilon/|x|)^{(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon)} = \varepsilon^{(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon)}\frac{1}{|x|}\left(\frac{1}{|x|}\right)^{\varepsilon/(2(1-\varepsilon))} = \frac{C_\varepsilon}{|x|}(\ln\mu_*(x))^{1/2}$$

позаяк $(1-\varepsilon/2)/(1-\varepsilon) - 1 = \varepsilon/(2(1-\varepsilon))$, де $C_\varepsilon = \varepsilon/\sqrt{1-\varepsilon}$. Залишається зауважити, що

$$\ln\mu_*(x) = (1+o(1))\ln(\mu_*(x)/|x|) \qquad (x \to -0),$$

тому з (9) остаточно отримуємо, що

$$\varliminf_{x\to-0} F(x)\left(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big(\ln\Big(\frac{\mu_*(x)}{|x|}\Big)\Big)^{1/2}\right)^{-1} \geq C_\varepsilon c_1 c_3 > 0.$$

□

Зауваження 2. *Нескладно помітити, що якщо міра* ν *задовольняє умову* $(\exists \varepsilon \in (0,1))$: $\underline{\lim}_{t\to+\infty} \nu(t - t^{1-\varepsilon/2}, t + t^{1-\varepsilon/2}]/t = +\infty$, *то для функції* F *з доведення Твердження 1 нижня границя в* (7) *дорівнює* $+\infty$.

З твердження 1 отримаємо наслідок для абсолютно збіжних у півплощині $\Pi_0 := \{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{z\lambda_n}, \tag{10}$$

де (λ_n) — така послідовність, що $0 = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$ $(1 \le n \to +\infty)$. Для цього досить, як і в [3], вибрати таку міру ν, що $\nu(E) = \sum_{\lambda_n \in E} \delta_{\lambda_n}(E)$, для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}_+$, де δ_λ — одинична міра Дірака, зосереджена в точці λ, і застосувати Твердження 1 до ряду Діріхле

$$\mathfrak{M}(\sigma, F) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} |F_n| e^{\sigma\lambda_n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) e^{x\sigma} d\nu(x) \stackrel{def}{=} I(\sigma),$$

де f — невід'ємна функція така, що $f(\lambda_n) = |F_n|$ і $f(x) = 0$ для всіх $x \notin \{\lambda_n\colon n \ge 0\}$. Тоді $\mu_*(\sigma, I) = \mu(\sigma, F) \stackrel{def}{=} \{|F_n| e^{\sigma\lambda_n}\colon n \ge 0\}$. Звідси негайно за допомогою нерівностей $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F) \le \mathfrak{M}(\sigma, F)$ отримаємо, що

$$M(x, F) \le \frac{\mu(x, F)}{|x|^{1+\varepsilon}} \Big(\ln \Big(\frac{\mu(x, F)}{|x|} \Big) \Big)^{1/2+\varepsilon} \tag{11}$$

при $x \to -0$ $(x \notin E,\ m_{\ln}(E) < +\infty)$, за умов Твердження 1. Залишається зауважити, що умови Твердження 1 для функції $I(x)$ виконуються як тільки

$$(\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\forall a > 0)(\forall b \in (0, a))\colon \quad n(a+b) - n(a+b) \le c_1 b + c_2, \tag{12}$$

де $n(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$ — лічильна функція послідовності (λ_n). Отже, отримали такий наслідок.

Наслідок. *Нехай для абсолютно збіжного у півплощині* Π_0 *ряду Діріхле вигляду* (10) *виконується умова* (12). *Тоді для кожного* $\varepsilon > 0$ *нерівність* (11) *виконується при* $x \to -0$ $(x \notin E,\ m_{\ln}(E) < +\infty)$.

Якщо цей наслідок застосувати до функції $F(s) = f(e^s)$, де $f(z)$ — аналітична в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ функція, задана степеневим рядом вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ з радіусом збіжності $R(f) = 1$, то отримаємо таке твердження (див., наприклад, [1, 7]): *для кожного* $\varepsilon > 0$ *існує така множина* $E \subset (0,1)$ *скінченної логарифмічної міри, тобто* $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$, *що для всіх* $r \in (0,1) \setminus E$ *виконується такий аналог класичної нерівності Вімана:*

$$M_f(r) \le \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\varepsilon}} \ln^{1/2+\varepsilon} \frac{\mu_f(r)}{1-r},$$

де $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n| r^n\colon n \ge 0\}$.

Варто також зауважити, що для абсолютно збіжних у півплощині Π_0 рядів вигляду (10), невід'ємна послідовність показників яких задовольняє лише умову

$$\sup\{\lambda_n\colon n \ge 0\} = +\infty$$

(тобто, зокрема, може мати будь-яку кількість скінченних точок скупчення), у статті [2] знайдено умови на послідовність $(|F_n|)$, за яких нерівність вигляду

$$M(x,F) \le \mu(x,F)(\ln \mu(x,F))^q$$

виконується для всіх $x < 0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри і є непокращуваною. Повні аналоги останньої нерівності нескладно отримуються для інтегралів вигляду (1), що є скінченними для всіх $x \in \mathbb{R}$, з тверджень, які доведено в [5, 6].

References

[1] Kövari T. *On the maximum modulus and maximum term of functions analytic in the unit disc*. J. London Math. Soc. 1966, **41**, 129–137. doi:10.1112/jlms/s1-41.1.129

[2] Kuryliak A.O., Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *Wiman type inequalities for entire Dirichlet series with arbitrary exponents*. Mat. Stud. 2013, **40** (1), 108–112.

[3] Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *On the estimates of the Laplace integrals on the small parameter.* Carpathian Math. Publ. 2011, **3** (1), 106—111. (in Ukrainian)

[4] Rosenbloom P.C. Probability and entire functions. In: Szegö G., Loewner Ch. (Eds.) Studies Math. Anal. and Related Topics. Calif. Univ. Press, Stanford, 1962, 325–330.

[5] Skaskiv O.B. *On certain relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series.* Math. Notes 1999, **66** (2), 223–232. doi:10.1007/BF02674881 (translation of Mat. Zametki, 1999, **66** (2), 282–292 (in Russian))

[6] Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *Asymptotic estimations for Laplace type integrals.* Mat. Stud. 2002, **18** (2), 125–146. (in Ukrainian)

[7] Suleimanov N.M. *Wiman-Valiron type estimates for power series with finite radius of convergence and their accuracy.* Dokl. Akad. Nauk USSR 1980, **253** (4), 822–824. (in Russian)

Надійшло 26.09.2013

Ovchar I.Ye., Skaskiv O.B. *Some analogue of the Wiman inequality for the Laplace integrals on a small parameter*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 305–309.

Asymptotic estimates from below for the Laplace integrals are established.

Key words and phrases: Wiman's inequality, Laplace-Stieltjes integral, Dirichlet series.

Овчар И.Е., Скаскив О.Б. *Один аналог неравенства Вимана для интегралов Лапласа, зависящих от малого параметра* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 305–309.

Устанавливаются асимптотические оценки сверху интегралов типа Лапласа.

Ключевые слова и фразы: неравенство Вимана, интеграл Лапласа-Стильтьеса, ряд Дирихле.