ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.95

Процах Н.П.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Процах Н.П. *Асимптотична поведінка розв'язку оберненої задачі для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 326–335.

Розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомим, залежним від часу, множником правої частини цього рівняння. Знайдено умови, за яких узагальнений розв'язок задачі прямує до нуля при зростанні часової змінної.

Ключові слова і фрази: обернена задача, ультрапараболічне рівняння, узагальнений розв'язок.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: protsakh@ukr.net

Вступ

Ультрапараболічні рівняння вперше введені у праці [5] для опису неізотропних процесів. Пізніше їх застосовували до вивчення багатьох явищ механіки, біології, фізики, економіки [2, 7]. Вивченню задачі Коші, мішаних задач та властивостей їх розв'язків присвячені, зокрема, праці [2, 8, 10, 11, 12].

Обернені задачі пов'язані з пошуком причин явищ за відомими їх наслідками. З математичної точки зору це означає знаходження невідомих коефіцієнтів рівняння чи його правої частини за додаткових умов на розв'язок цього рівняння.

Існування та єдиність розв'язку обернених задач для параболічних, гіперболічних чи ультрапараболічних рівнянь встановлено, зокрема, у працях [1, 3, 4, 6, 9, 11, 14]. При цьому використовувалися: метод інтегральних рівнянь та принцип Шаудера [3, 4, 6], ітераційні методи [14], метод послідовних наближень [1, 11], метод напівгруп [9]. У праці [15] показано, що розв'язок оберненої задачі з невідомою правою частиною для параболічного рівняння спадає до нуля при зростанні часової змінної за певних умов на вихідні дані задачі.

У цій праці розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення для слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння з невідомим, залежним від часу, множником правої частини цього рівняння. Встановлено умови, за яких розв'язок спадає до нуля при зростанні часової змінної. Зауважимо, що властивості розв'язків прямих мішаних задач для нелінійних ультрапараболічних рівнянь раніше вивчалися у працях [8, 12].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35K70, 35R30.

1 Основні позначення та функціональні простори

Нехай Ω і D — обмежені області відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^l$ з межами $\partial\Omega \in C^1$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega,\ y \in D,\ t \in (0,T)$, де T — фіксоване число з інтервалу $(0,\infty)$, $Q_T = \Omega \times D \times (0,T)$, $G = \Omega \times D$.

Позначимо: $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$, $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$, $G_\xi = \{(x,y,t) : (x,y) \in G, t = \xi\}$, $\xi \in [0,T]$.

Введемо простори: $L^\infty(Q_T) := \{w : Q_T \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна та існує така стала C, що $|w(x,y,t)| \le C$ майже всюди на $Q_T\}$, $\|w; L^\infty(Q_T)\| = \inf\{C : |w(x,y,t)| \le C$ майже всюди на $Q_T\}$; $L^2(G) := \{w : G \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна, $\int_G |w(x,y)|^2\,dxdy < \infty\}$, $\|w; L^2(G)\| = \big(\int_G |w(x,y)|^2\,dxdy\big)^{\frac12}$; $L^2(0,T) := \{w : [0,T] \to \mathbb{R}; w$ — вимірна, $\int_0^T |w(t)|^2 dt < \infty\}$, $\|w; L^2(0,T)\| = \big(\int_0^T |w(t)|^2\,dt\big)^{\frac12}$; $L^2(Q_T) := \{w : Q_T \to \mathbb{R};\ w$ — вимірна, $\int_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dx\,dy\,dt < \infty\}$, $\|w; L^2(Q_T)\| = \big(\int_{Q_T} |w(x,y,t)|^2\,dxdydt\big)^{\frac12}$; $W^{1,2}(\,\cdot\,)$ — множина всіх розподілів w, які разом зі своїми похідними першого порядку за всіма змінними належать до простору $L^2(\,\cdot\,)$, $\|w; W^{1,2}(\Omega)\| = \big(\int_\Omega [|w(x)|^2 + \sum\limits_{i=1}^n |w_{x_i}(x)|^2]\,dx\big)^{\frac12}$; $\|w; W^{1,2}(0,T)\| = \big(\int_0^T [|w(t)|^2 + |w_t(t)|^2]\,dt\big)^{\frac12}$; $C^k(O)$ — простір k раз неперервно диференційовних функцій на O; $V(0,T; W(G)) := \{w : [0,T] \to W(G);\ \|w(\cdot,\cdot,t); W(G)\| \in V(0,T)\}$ (де V, W — банахові простори); $W_0^{1,2}(\Omega) := \{w : w \in W^{1,2}(\Omega),\ w|_{\partial\Omega} = 0\}$; $V_1(Q_T) := \{w :\ w,\ w_{x_i} \in L^2(Q_T), i = 1,\dots,n,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$; $V_2(G) := L^2\big(D; W_0^{1,2}(\Omega)\big) = \{w : D \to W_0^{1,2}(\Omega);\ \|w(\cdot,y); W_0^{1,2}(\Omega)\| \in L^2(D)\}$, $\|w; V_2(G)\| = \big(\int_G [|w(x,y)|^2 + \sum\limits_{i=1}^n |w_{x_i}(x,y)|^2]\,dxdy\big)^{\frac12}$; $V_3(Q_T) := \{w : w, w_{x_i}, w_{y_j} \in L^2(Q_T), i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,l,\ w|_{S_T^1} = 0,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\}$. Позначимо через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярний добуток між просторами $V_2^*(G)$ і $V_2(G)$.

Використовуватимемо такі нерівності:
"нерівність з ε":

$$|yz| \le \frac12\varepsilon|y|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|z|^2,\ \ \varepsilon, y, z \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0, \tag{1}$$

нерівність Фрідріхса:

$$\int_\Omega |v(x)|^2\,dx \le \varkappa \int_\Omega \sum_{i=1}^n |v_{x_i}(x)|^2\,dx, \tag{2}$$

яка виконується для функцій $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, а стала $\varkappa$ залежить від Ω.

2 Формулювання задачі

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^l \lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t)f_0(t) \tag{3}$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in G, \tag{4}$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \qquad u|_{S_T^1} = 0 \tag{5}$$

та умовою перевизначення

$$\int_{G_t} K(x,y)u(x,y,t)\,dxdy = E(t), \qquad t\in[0,T], \tag{6}$$

де $u(x,y,t)$, $f_0(t)$ — невідомі функції, $S_T^1=\{(x,y,t)\in S_T : \sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)\cos(\nu,y_i)<0\}$, ν — одинична зовнішня нормаль до S_T, причому припускаємо, що виконується умова

(S): Існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1\subset\partial D\subset\mathbb{R}^{l-1}$, що $S_T^1=\Omega\times\Gamma_1\times(0,T)$.

Нехай також виконуються умови

(A): $a_{ij}\in L^\infty(Q_T)$, $i,j=1,\dots,n$, $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j\ge a_0|\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, a_0 – додатна стала;

(C): $c\in C([0,T];L^\infty(G))$, $c(x,y,t)\ge c_0$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$, c_0 — стала;

(E): $E\in W^{1,2}(0,T)$;

(F): $f\in C([0,T];L^2(G))$;

(H): $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi\in\mathbb{R}^1$ і неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$; існує така додатна стала g^0, що $|g(x,y,t,\xi)-g(x,y,t,\eta)|\le g^0|\xi-\eta|$ для майже всіх $(x,y,t)\in Q_T$ та всіх ξ, $\eta\in\mathbb{R}^1$;

(K): $K\in C^1(D;C^1(\overline{\Omega}))$, $K|_{\partial\Omega\times D}=0$, $K|_{\Omega\times\Gamma_2}=0$, де $\Gamma_2=\partial D\backslash\Gamma_1$;

(L): $\lambda_i\in C(Q_T)$, $\lambda_{iy_i}\in C([0,T];L^\infty(G))$ для всіх $i=1,\dots,l$;

(U): u_0, $u_{0,y_j}\in L^2(G)$, $j=1,\dots,l$, $u_0|_{\partial\Omega\times D}=0$, $u_0|_{\Omega\times\Gamma_1}=0$.

3 Означення узагальненого розв'язку оберненої задачі

Означення 1. *Пару функцій $(u(x,y,t),f_0(t))$ назвемо узагальненим розв'язком задачі* (3)–(6)*, якщо $u\in V_3(Q_T)\cap C([0,T];L^2(G))$, $u_t\in L^2(0,T;V_2^*(G))+L^2(Q_T)$, $f_0\in L^2(0,T)$, і ці функції для всіх $v\in V_1(Q_T)$ задовольняють інтегральну рівність*

$$\int_0^T\langle u_t,v\rangle\,dt+\int_{Q_T}\Big[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}v+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}v_{x_j}+c(x,y,t)uv$$
$$+g(x,y,t,u)v\Big]\,dx\,dy\,dt=\int_{Q_T}f(x,y,t)f_0(t)v\,dx\,dy\,dt$$

і, крім того, функція $u(x,y,t)$ задовольняє умови (4) *та* (6).

Нехай $\int_{G_t}K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy\neq0$. Із рівняння (3) та умови (6) випливає, що узагальнений розв'язок задачі (3)–(6) задовольняє рівність

$$\Big[\int_{G_t}K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy\Big]f_0(t)=E'(t)+\int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}+K(x,y)c(x,y,t)u+K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy,\quad t\in[0,T]. \tag{7}$$

4 Асимптотична поведінка узагальненого розв'язку оберненої задачі

Введемо позначення: $f_1 = \max\limits_{[0,T]}\big(\int_{G_t}(f(x,y,t))^2\,dxdy\big)^{\frac{1}{2}}$, $K_1(t) = \int_{G_t}K(x,y)f(x,y,t)\,dx\,dy$, $\lambda^1 = \max\limits_{i}\sup\limits_{Q_T}|\lambda_{iy_i}(x,y,t)|$, $c^0 = \sup\limits_{[0,T]}\big(\sup\limits_{G_t}|c(x,y,t)|^2\big)^{\frac{1}{2}}$, $\Lambda^1 = \max\Big\{\sup\limits_{[0,T]}\max\limits_{i}\big(\sup\limits_{G_t}|\lambda_i(x,y,t)|^2\big)^{\frac{1}{2}};$ $\sup\limits_{[0,T]}\sum\limits_{i=1}^{l}\big(\operatorname{ess\,sup}\limits_{G_t}|\lambda_{iy_i}(x,y,t)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big\}$, $a_1 = \max\limits_{ij}\operatorname{ess\,sup}\limits_{[0,T]}\big(\operatorname{ess\,sup}\limits_{G_t}|a_{ij}(x,y,t)|^2\big)^{\frac{1}{2}}$, k_0 — додатна стала.

Нехай $\sum\limits_{i=1}^{n}\big(\int_G(K_{x_i}(x,y))^2\,dxdy\big)^{\frac{1}{2}} + \sum\limits_{i=1}^{l}\big(\int_G(K_{y_i}(x,y))^2\,dxdy\big)^{\frac{1}{2}} + \big(\int_G(K(x,y))^2\,dxdy\big)^{\frac{1}{2}} \le K_1$, де $K_1 \in \mathbb{R}$, $\big(\int_{G_t}|g(x,y,t,0)|^2\,dxdy\big)^{\frac{1}{2}} \le g^1(t)$ для всіх $t > 0$, де $g^1 \in L^2(0,T)$. Позначимо

$$\beta = \frac{a_0}{\varkappa} + 2c_0 - \lambda^1 - 2g^0 - \frac{2f_1K_1(g^0+\Lambda_1+c^0)}{k_0} - \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{a_0k_0^2} - 1,$$

$$\delta(t) = 3\left(1 + \frac{f_1^2K_1^2}{k_0^2}\right)(g^1(t))^2 + \frac{3|E'(t)|^2f_1^2}{k_0^2}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (C), (E), (F), (H), (K), (L), (S), (U) та* $|K_1(t)| \ge k_0 > 0$ *для всіх* $t > 0$ *і* $\beta > 0$. *Нехай* $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|E'(\tau)|^2\,d\tau = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|g^1(t)|^2\,dt = 0$.

Тоді для узагальненого розв'язку $\big(u(x,y,t), f_0(t)\big)$ *задачі* (3)–(6) *виконуються такі збіжності:* $\lim\limits_{t\to+\infty}\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}\int_G\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dxdydt = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\int_k^{k+1}|f_0(t)|^2\,dt = 0$.

Доведення. У праці [13] доведено, що за умов теореми існує єдина функція $u \in V_3(Q_T) \cap C\big([0,T];L^2(G)\big)$, $u_t \in L^2\big(0,T;V_2^*(G)\big) + L^2(Q_T)$, яка є узагальненим розв'язком задачі (3)–(6). З рівності (7) та рівняння (3) випливає рівність

$$\begin{aligned} u_t &+ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) \\ &= \frac{f(x,y,t)}{K_1(t)}\Big(E'(t) + \int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n}K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t)u + K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

Домножимо (8) на u та проінтегруємо по G_t:

$$\begin{aligned} &\int_{G_t}\Big[u_tu + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i}u + \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)u_{x_i}u_{x_j} + c(x,y,t)|u|^2 + g(x,y,t,u)u\Big]\,dx\,dy \\ &= \frac{1}{K_1(t)}\Big(\int_{G_t}E'(t)f(x,y,t)u\,dx\,dy + \int_{G_t}f(x,y,t)u\,dx\,dy\int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n}K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t)u_{x_i} + K(x,y)c(x,y,t)u + K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dx\,dy\Big),\ t > 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Оцінимо окремо доданки рівності (9), використавши умови (A)–(L).

$$\mathcal{I}_1 := \int_{G_t} u_t u \, dx\, dy = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big);$$

$$\mathcal{I}_2 := \int_{G_t} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t) u_{y_i} u \, dx\, dy \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|u|^2 \cos(\nu, y_i)\, d\sigma\, dx - \frac{\lambda^1}{2}\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy;$$

$$\mathcal{I}_3 := \int_{G_t} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} u_{x_j} \, dx\, dy \geq a_0 \int_{G_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy;$$

$$\mathcal{I}_4 := \int_{G_t} c(x,y,t)|u|^2 \, dx\, dy \geq c_0 \int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy;$$

$$\mathcal{I}_5 := \int_{G_t} g(x,y,t,u) u \, dx\, dy \leq g^0 \int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy + g^1(t)\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big)^{\frac{1}{2}};$$

$$\mathcal{I}_6 := \frac{E'(t)}{K_1(t)}\int_{G_t} f(x,y,t) u \, dx\, dy \leq \frac{|E'(t)|}{k_0} f_1 \Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big)^{1/2};$$

$$\mathcal{I}_7 := -\frac{1}{K_1(t)}\int_{G_t} f(x,y,t) u \, dx\, dy \int_{G_t} \sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i} u \, dx\, dy \leq \frac{f_1 \Lambda_1 K_1}{k_0}\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy;$$

$$\mathcal{I}_8 := \frac{1}{K_1(t)}\int_{G_t} f(x,y,t) u \, dx\, dy \int_{G_t} \sum_{i,j=1}^{n} K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} \, dx\, dy$$
$$\leq \frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0}\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big)^{1/2}\Big(\int_{G_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\Big)^{1/2};$$

$$\mathcal{I}_9 := \frac{1}{K_1(t)}\int_{G_t} f(x,y,t) u \, dx\, dy \int_{G_t} K(x,y) c(x,y,t) u \, dx\, dy \leq \frac{f_1 c^0 K_1}{k_0}\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy;$$

$$\mathcal{I}_{10} := \frac{1}{K_1(t)}\int_{G_t} f(x,y,t) u \, dx\, dy \int_{G_t} K(x,y) g(x,y,t,u) \, dx\, dy$$
$$\leq \frac{f_1 g^0 K_1}{k_0}\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy + \frac{f_1 g^1(t) K_1}{k_0}\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big)^{1/2}.$$

Врахувавши оцінки доданків $\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_{10}$, з (9) отримуємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big) + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|u|^2 \cos(y_i, \nu_i)\, d\sigma\, dx + \int_{G_t}\Big(a_0 \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2$$
$$+(c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0)|u|^2\Big)\, dx\, dy \leq \frac{|E'(t)| f_1 + g^1(t)(k_0 + f_1 K_1)}{k_0}\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big)^{1/2} \tag{10}$$
$$+\frac{f_1 K_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1)}{k_0}\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy + \frac{f_1 \sqrt{n} a_1 K_1}{k_0}\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big)^{1/2}\Big(\int_{G_t} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\Big)^{1/2},$$

$t > 0$. Використавши в (10) нерівність (1), отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy\Big) + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{l} \lambda_i(x,y,t)|u|^2 \cos(y_i, \nu_i)\, d\sigma\, dx + \int_{G_t}\Big[\frac{a_0}{2}\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2$$
$$+\Big(c_0 - \frac{\lambda^1}{2} - g^0 - \frac{f_1 K_1 (c^0 + g^0 + \Lambda_1)}{k_0} - \frac{f_1^2 n a_1^2 K_1^2}{2 a_0 k_0^2} - \frac{1}{2}\Big)|u|^2\Big]\, dx\, dy \leq \frac{\delta(t)}{2}, \quad t > 0. \tag{11}$$

Застосувавши в (11) нерівність (2), отримаємо

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)+\beta\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\le\delta(t),\quad t>0. \tag{12}$$

Проінтегрувавши нерівність (12), знайдемо

$$\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\le e^{-\beta t}\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy+\int_0^t e^{-\beta(t-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau,\quad t>0. \tag{13}$$

Проінтегруємо (10) по t від k до $k+1$, де $k\in\mathbb{N}$. Врахувавши, що

$$\frac12\int_{G_{k+1}}|u|^2\,dx\,dy+\frac12\int_k^{k+1}\int_\Omega\int_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx\,dt>0,$$

отримаємо

$$\begin{gathered}a_0\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt+(c_0-\frac{\lambda^1}{2}-g^0)\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\le\frac12\int_{G_k}|u|^2\,dx\,dy\\+\Big(\frac{f_1}{k_0}\Big(\int_k^{k+1}|E'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}+\Big(1+\frac{f_1K_1}{k_0}\Big)\Big(\int_k^{k+1}|g^1(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big)\Big(\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2}\\+\frac{f_1(c^0+g^0+\Lambda_1)K_1}{k_0}\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\\+\frac{f_1\sqrt{n}a_1K_1}{k_0}\Big(\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2},\end{gathered} \tag{14}$$

де $Q_{k,k+1}=G\times(k,k+1)$. Оскільки

$$\begin{aligned}&\frac{f_1\sqrt{n}a_1K_1}{k_0}\Big(\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2}\Big(\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2}\\&\qquad\le\frac{a_0}{2}\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt+\frac{f_1^2na_1^2K_1^2}{2a_0k_0^2}\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt,\end{aligned}$$

то з (14) випливає нерівність

$$\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt\le\frac{1}{a_0}\int_{G_k}|u|^2\,dx\,dy+\beta_1\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt+\mu(k),\qquad k\in\mathbb{N}, \tag{15}$$

де $\beta_1=\frac{1}{a_0}\big(\frac{2f_1(c^0+g^0+\Lambda_1)K_1}{k_0}+\frac{f_1^2na_1^2K_1^2}{a_0k_0^2}+3+\lambda^1+2g^0+2|c^0|\big)$, $\mu(k)=\frac{2}{a_0}\Big((1+\frac{f_1^2K_1^2}{k_0^2})\int_k^{k+1}|g^1(t)|^2\,dt+\frac{f_1^2}{k_0^2}\int_k^{k+1}|E'(t)|^2\,dt\Big)$. Проінтегрувавши (13) по t від k до $k+1$, де $k\in\mathbb{N}$, отримуємо

$$\begin{aligned}\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\le{}&\frac{1}{\beta}e^{-\beta k}(1-e^{-\beta})\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy\\&+\frac{1}{\beta}(1-e^{-\beta})\int_0^k e^{\beta(t-k)}\delta(t)\,dt-\frac{1}{\beta}\int_k^{k+1}e^{-\beta(k+1-t)}\delta(t)\,dt+\frac{1}{\beta}\int_k^{k+1}\delta(t)\,dt.\end{aligned}$$

Тоді з (15) випливає оцінка

$$\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt\le\mu_1(k)+\mu(k),\ k\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

де

$$\mu_1(k) = \left(\tfrac{1}{a_0} + \tfrac{\beta_1}{\beta}(1-e^{-\beta})\right)\left[e^{-\beta k}\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy + \int_0^k e^{-\beta(k-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau\right] + \tfrac{\beta_1}{\beta}\int_k^{k+1}(1-e^{-\beta(k+1-t)})\delta(t)\,dt.$$

Із формули (7) випливає оцінка

$$\int_k^{k+1}|f_0(t)|^2\,dt \le \frac{2}{k_0^2}\int_k^{k+1}|E'(t)|^2\,dt + 6\max_{t\in[k,k+1]}\int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i} + K(x,y)c(x,y,t) + K(x,y)g^0\Big)^2 dxdy\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dxdydt + \frac{6a_1^2K_1^2n}{k_0^2}\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dxdydt + \frac{6K_1^2}{k_0^2}\int_{Q_{k,k+1}}|g^1(t)|^2\,dt, \qquad k\in\mathbb{N}. \tag{17}$$

Із (13) отримуємо нерівність

$$\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy \le e^{-\beta t}\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy + \sum_{0\le k\le[t]}e^{-\beta(t-k-1)}\int_k^{k+1}\delta(\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

З умов теореми випливає, що $\sum\limits_{0\le k\le[t]} e^{-\beta(t-k)}\int_k^{k+1}\delta(\tau)\,d\tau \to 0$ при $t\to+\infty$. Тоді з (18) знайдемо, що $\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy \to 0$ при $t\to\infty$. Оскільки $\mu(k)\to 0$, $\mu_1(k)\to 0$ при $k\to\infty$, то з (16) та з (17) випливає, що $\int_{Q_{k,k+1}}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt \to 0$ і $\int_k^{k+1}|f_0(t)|^2\,dt \to 0$ при $k\to\infty$. $\square$

Нехай $a_2 = \max\limits_{ij}\sup\limits_{[0,T]}(\operatorname{ess\,sup}\limits_{G_t}|a_{ijx_i}|^2)^{1/2}$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n}|\int_G(K_{x_ix_i}(x,y))^2\,dxdy|^{1/2} \le K_1$, $\beta_2 = \frac{2a_0}{\varkappa} + 2c_0 - \lambda^1 - 2g^0 - \frac{2f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0} - 1$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (A), (C), (E), (F), (H), (K), (L), (S), (U) та* a_{ij}, $a_{ijx_i}\in C\big([0,T];L^\infty(G)\big)$, $i,j=1,\dots,n$, $E'\in C\big([0,T]\big)$, $K\in C^1\big(D;C^2(\Omega)\big)$, $g^1\in C\big([0,T]\big)$ *і, крім того,* $|K_1(t)|\ge k_0>0$ *для всіх* $t>0$ *та* $\beta_2>0$. *Нехай* $\lim\limits_{t\to\infty}|E'(t)|=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}|g^1(t)|=0$.

Тоді $f_0\in C\big([0,T]\big)$ *та для узагальненого розв'язку задачі* (3)–(6) *виконуються такі збіжності*

$$\lim_{t\to+\infty}\|u(\cdot,\cdot,t);L^2(G)\|=0, \qquad \lim_{k\to\infty}\int_k^{k+1}\int_G\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dxdydt=0, \qquad \lim_{t\to+\infty}|f_0(t)|=0.$$

Доведення. Використаємо доведення теореми 1. Для розв'язку задачі (3)–(6) так само, як у випадку теореми 1, використаємо рівності (7) та (8), записавши їх у вигляді

$$f_0(t) = (K_1(t))^{-1}\Big(E'(t) + \int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u - \sum_{i,j=1}^{n}(K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t))_{x_i}u + K(x,y)c(x,y,t)u + K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy\Big), \quad t\in[0,T] \tag{19}$$

та

$$u_t + \sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) = f(x,y,t)(K_1(t))^{-1}\Big(E'(t) + \int_{G_t}\Big(-\sum_{i=1}^{l}(\lambda_i(x,y,t)K(x,y))_{y_i}u - \sum_{i,j=1}^{n}(K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t))_{x_i}u + K(x,y)c(x,y,t)u + K(x,y)g(x,y,t,u)\Big)\,dxdy\Big). \tag{20}$$

За умов теореми всі функції правої частини рівності (19) неперервні за змінною t на $[0,T]$, тому $f_0 \in C\big([0,T]\big)$. Домножимо рівність (20) на u та поінтегруємо її по G_t. Оскільки

$$-\frac{1}{K_1(t)}\int_{G_t} f(x,y,t)u\,dx\,dy\int_{G_t}\sum_{i,j=1}^{n}(K_{x_j}(x,y)a_{ij}(x,y,t))_{x_i}u\,dx\,dy \le \frac{f_1(na_2+a_1)K_1}{k_0}\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy,$$

а оцінки інших доданків з (20) повторюють оцінки $\mathcal{I}_1-\mathcal{I}_7$, $\mathcal{I}_9$, $\mathcal{I}_{10}$, то з (20) випливає

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx+\int_{G_t}\big[a_0\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\\&\quad+(c_0-\frac{\lambda^1}{2}-g^0)|u|^2\big]\,dx\,dy\le\Big(g^1(t)+\frac{f_1(|E'(t)|+g^1(t)K_1)}{k_0}\Big)\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\quad+\frac{f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0}\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy,\quad t>0.\end{aligned}\tag{21}$$

Використавши в (21) нерівність (1), отримаємо

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Gamma_2}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx+\int_{G_t}\Big(a_0\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\\&\quad+\Big(c_0-\frac{\lambda^1}{2}-g^0-\frac{f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0}-\frac{1}{2}\Big)|u|^2\Big)\,dx\,dy\le\frac{\delta(t)}{2},\quad t>0.\end{aligned}\tag{22}$$

Із (22) та нерівності Фрідріхса випливає оцінка

$$\frac{d}{dt}\Big(\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\Big)+\beta_2\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\le\delta(t),\quad t>0.\tag{23}$$

Проінтегрувавши (23), отримуємо нерівності

$$\int_{G_t}|u|^2\,dx\,dy\le e^{-\beta_2 t}\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy+\int_0^t e^{-\beta_2(t-\tau)}\delta(\tau)\,d\tau,\quad t>0,\tag{24}$$

та

$$\begin{aligned}\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt&\le\frac{1}{\beta_2}e^{-\beta_2 k}(1-e^{-\beta_2})\int_{G_0}|u_0|^2\,dx\,dy+\frac{1}{\beta_2}(1-e^{-\beta_2})\int_0^k e^{\beta_2(t-k)}\delta(t)\,dt\\&\quad-\frac{1}{\beta_2}\int_k^{k+1}e^{-\beta_2(k+1-t)}\delta(t)\,dt+\frac{1}{\beta_2}\int_k^{k+1}\delta(t)\,dt,\quad k\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Проінтегрувавши (21) по t від k до $k+1$, $k\in\mathbb{N}$, та врахувавши, що $\frac{1}{2}\int_{G_{k+1}}|u|^2\,dx\,dy+\frac{1}{2}\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i(x,y,t)|u|^2\cos(y_i,\nu_i)\,d\sigma\,dx\,dt>0$, отримаємо

$$\begin{aligned}&a_0\int_{Q_{k,k+1}}\sum_{i=1}^{n}|u_{x_i}|^2\,dx\,dy\,dt+(c_0-\frac{\lambda^1}{2}-g^0)\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\le\frac{1}{2}\int_{G_k}|u|^2\,dx\,dy\\&+\Big(\Big(1+\frac{f_1K_1}{k_0}\Big)\Big(\int_k^{k+1}|g^1(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}+\frac{f_1}{k_0}\Big(\int_k^{k+1}|E'(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big)\Big(\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt\Big)^{1/2}\\&+\frac{f_1(c^0+g^0+\Lambda_1+a_2n+a_1)K_1}{k_0}\int_{Q_{k,k+1}}|u|^2\,dx\,dy\,dt.\end{aligned}\tag{25}$$

Тоді з (25) випливає

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\, dt \le \frac{1}{2a_0} \int_{G_k} |u|^2 \, dx\, dy + \beta_3 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx\, dy\, dt + \mu_2(k), \tag{26}$$

де

$$\beta_3 = \frac{1}{a_0} \left(\frac{f_1(c^0 + g^0 + \Lambda_1 + a_2 n + a_1) K_1}{k_0} + \frac{3}{2} + |c_0| + \frac{\lambda^1}{2} + g^0 \right), \quad \mu_2(k) = \frac{\mu(k)}{2}.$$

Зауважимо, що $\frac{1}{2a_0} \int_{G_k} |u|^2 \, dx\, dy + \beta_3 \int_{Q_{k,k+1}} |u|^2 \, dx\, dy\, dt \le \mu_3(k)$, де

$$\mu_3(k) = \left(\frac{1}{2a_0} + \frac{\beta_3}{\beta_2}(1 - e^{-\beta_2}) \right) \left[e^{-\beta_2 k} \int_{G_0} |u_0|^2 dx\, dy + \int_0^k e^{-\beta_2(k-\tau)} \delta(\tau)\, d\tau \right] + \frac{\beta_3}{\beta_2} \int_k^{k+1} (1 - e^{-\beta_2(k+1-t)}) \delta(t)\, dt.$$

Тоді з (26) випливає оцінка

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\, dt \le \mu_2(k) + \mu_3(k), \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Із (19) також випливає, що

$$|f_0(t)| \le \frac{1}{k_0} |E'(t)| + \frac{K_1}{k_0} |g^1(t)| + \frac{1}{k_0} \max_{t>0} \Bigg(\int_{G_t} \Big(-\sum_{i=1}^{l} (\lambda_i(x,y,t) K(x,y))_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (K_{x_j}(x,y) a_{ij}(x,y,t))_{x_i} + K(x,y) c(x,y,t) + K(x,y) g^0 \Big)^2 dx dy \Bigg)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G_t} |u|^2 dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t > 0. \tag{28}$$

Запишемо (24) у вигляді

$$\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy \le e^{-\beta_2 t} \int_{G_0} |u_0|^2 \, dx\, dy + \sum_{0 \le k \le [t]} e^{-\beta_2(t-k-1)} \int_k^{k+1} \delta(\tau)\, d\tau. \tag{29}$$

З умов теореми випливає, що $\sum\limits_{0 \le k \le [t]} e^{-\beta_2(t-k-1)} \int_k^{k+1} \delta(\tau)\, d\tau \to 0, \quad t \to +\infty$. Тоді з (29) отримуємо

$$\int_{G_t} |u|^2 \, dx\, dy \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

Зауважимо, що $\mu_2(k) \to 0$, $\mu_3(k) \to 0$ при $k \to \infty$. Тому з (27) і (28) випливає, що

$$\int_{Q_{k,k+1}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2 \, dx\, dy\, dt \to 0 \text{ при } k \to \infty, \ \ |f_0(t)| \to 0 \text{ при } t \to \infty.$$

□

REFERENCES

[1] Beilina N.V. *On solvability of a inverse problem for hyperbolic equation with an integral overdetermination condition*. Vestnik Samara Univ. 2011, **23** (2), 34–39. (in Russian)

[2] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004. doi:10.1007/978-3-0348-7844-9

[3] Ivanchov M.I. Inverse problems for equations of parabolic type. In: Mathematical Studies, Monograph Series, **10**. VNTL Publishers, L'viv, 2003.

[4] Kamynin V.L. *On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition*. Math. Notes 2005, **77** (4), 482–493. doi:10.1007/s11006-005-0047-6

[5] Kolmogoroff A.N. *Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung)*. Ann. Math. 1934, **35**, 116–117. doi:10.2307/1968123

[6] Kozhanov A.I. *An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation II*, J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003, **11** (5), 505–522. doi: 10.1163/156939403770888246

[7] Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S. Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance. In: Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, II. International Mathematical Series, **2**, 243–265. Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.

[8] Lavrenyuk S., Protsakh N. *Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain*. Tatra Mt. Math. Publ. 2007, **38**, 131–146.

[9] Lorenzi A., Prilepko A.I. *Global existence results for first-order integrodifferential Identification problems*. Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova 1996, **96**, 51–84.

[10] Malyts'ka H.P. *Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations*. Differential Equations 2010, **46** (5), 753–757. doi:10.1134/S0012266110050150

[11] Protsakh N. *Inverse problem for an ultraparabolic equation*. Tatra Mt. Math. Publ. 2013, **54**, 133–151. doi:10.2478/tmmp-2013-0011

[12] Protsakh N. *Properties of a solution of the mixed problem for an ultraparabolic equation with the memory term*. J. Math. Sci. 2012, **183** (6), 823–834. doi:10.1007/s10958-012-0843-y

[13] Protsakh N.P. *Inverse problem for semilinear ultraparabolic equation with unknown right-hand side function*. Ukr. Math. J. (in print).

[14] Vabishchevich P.N. *Numerical solution of the problem of the identification of the right-hand side of a parabolic equation*. Russian Math. (Iz. VUZ) 2003, **47** (1), 27–35.

[15] Vasin A.I., Kamynin V.L. *On the asymptotic behavior of solutions of inverse problems for parabolic equations*. Siberian Math. J. 1997, **38** (4), 647–662. doi: 10.1007/BF02674572

Надійшло 03.07.2013

Protsakh N.P. *Asymptotic behavior of solution of the inverse problem for weakly nonlinear ultraparabolic equation*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 326–335.

The inverse problem with the integral overdetermination condition for a weakly nonlinear ultraparabolic equation with unknown time-dependent multiplier of the right-hand side of the equation is considered. The conditions when a weak solution decreases to zero as the time variable increases are found.

Key words and phrases: inverse problem, ultraparabolic equation, generalized solution.

Процах Н.П. *Асимптотическое поведение решения обратной задачи для слабо нелинейного ультрапараболического уравнения* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 326–335.

Рассмотрена обратная задача с интегральным условием переопределения для слабо нелинейного ультрапараболического уравнения с неизвестным множителем правой части уравнения, который зависит от времени. Найдены условия, при которых обобщенное решение задачи стремится к нулю при возростании временной переменной.

Ключевые слова и фразы: обратная задача, ультрапараболическое уравнение, обобщенное решение.