ISSN 2075-9827 **http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp**
Карпатські математичні публікації, Т.5, №2 Carpathian Mathematical Publications, V.5, No.2

УДК 517.53

Фединяк С.І.

ПРОСТІР ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Фединяк С.І. *Простір цілих рядів Діріхле* // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 336–340.

Вивчається простір цілих рядів Діріхле скінченного Ф-типу з заданою топологією, відносно якої він буде простором Фреше.

Ключові слова і фрази: ціла функція, ряд Діріхле, максимум модуля, порядок, рід, простір Фреше.

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна
E-mail: fedynyak@yahoo.com

Вступ

Для цілого ряду Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \qquad s = \sigma + it, \quad \sigma \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$, покладемо

$$M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| \ :\ t \in \mathbb{R}\}, \quad \mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) :\ n \geq 0\}.$$

Різні властивості просторів рядів Діріхле, що мають скінчені порядок і тип за Ріттом, розглянуто в роботах [1], [2].

Позначимо через X простір усіх цілих рядів Діріхле (1), для яких

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty} \frac{\ln M(\sigma, F)}{e^{\sigma\varrho(\sigma)}} \leq T < \infty,$$

де $\varrho(\sigma)$ — уточнений порядок за Ріттом. Нехай для кожного ряду Діріхле $F \in X$

$$\|F\|_m = |a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \left(\frac{\varphi(\lambda_n)}{\left((T + \frac{1}{m})\varrho e\right)^{\frac{1}{\varrho}}} \right)^{\lambda_n},$$

де $m = 1, 2, 3, \ldots$, а $\varphi(t)$ — розв'язок рівняння $t = e \cdot \varrho(\ln\varphi) \cdot \ln\varphi$.

В [2], зокрема, показано, що простір X з метрикою

$$d(F, G) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F - G\|_m}{1 + \|F - G\|_m}$$

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30B50.

є простором Фреше.

Подібні дослідження для випадку рядів Діріхле, що мають уточнений логарифмічний порядок і скінчений логарифмічний тип, проведено в роботі [3].

У цій статті результати із [1]–[3] узагальнено на випадок простору рядів Діріхле довільного зростання.

1 Формулювання та доведення основних результатів

Через Ω позначимо клас додатних двічі неперервно диференційовних необмежених на $\mathbb{R}$ функцій Φ таких, що Φ' додатна і зростає до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Через φ позначимо функцію, обернену до функції Φ', а через $\Psi(x)=x-\Phi(x)/\Phi'(x)$ — функцію, асоційовану з функцією Φ за Ньютоном. Зауважимо, що функції $\Psi(x)$ і $\varphi(x)$ — зростаючі [4].

Позначимо через $\mathfrak{F}$ множину цілих рядів Діріхле (1), для яких

$$\varlimsup_{\sigma\to\infty}\frac{\ln M(\sigma,F)}{\Phi(\sigma)}\le 1 \tag{2}$$

і

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\Phi(\Psi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2})))}=0. \tag{3}$$

Для кожної функції $F\in\mathfrak{F}$ введемо

$$\|F\|_m=|a_0|+\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|\exp\Big\{\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\},\qquad m\in\mathbb{N}.$$

Покажемо, що $\|F\|_m$ існує і є нормою на множині $\mathfrak{F}$ для кожного $m\in\mathbb{N}$. Для цього нам потрібна буде наступна лема.

Лема 1 ([4])**.** *Нехай $\Phi\in\Omega$ і функція F зображена цілим рядом Діріхле* (1)*. Для того, щоб виконувалася умова $\ln\mu(\sigma,F)\le(1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma\ge\sigma_0$, необхідно і досить, щоб $\ln|a_n|\le-\lambda_n\Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right)$ для всіх $n\ge n_0$.*

Враховуючи нерівність Коші $\mu(\sigma,F)\le M(\sigma,F)$, з (2) для довільного $\varepsilon>0$ і всіх $\sigma\ge\sigma_0$ маємо $\ln\mu(\sigma,F)\le(1+\varepsilon)\Phi(\sigma)$. Отже,

$$|a_n|\le\exp\Big\{-\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big)\Big\},\quad n\ge n_0. \tag{4}$$

З (3) випливає, що для кожного $m\in\mathbb{N}$ знайдеться таке $\varepsilon>0$, що

$$\frac{1}{m}-\varepsilon\ge\frac{2\ln n}{\Phi(\varphi(\frac{\lambda_n}{2}))}=\gamma_n,\quad n\ge n_1.$$

Тоді для всіх досить великих n

$$\begin{aligned}|a_n|\exp\Big\{\lambda_n\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\}&\le\exp\Big\{-\lambda_n\Big\{\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big)-\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\}\Big\}\\ =\exp\Big\{-\lambda_n\int_{\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}}\Big(\Psi(\varphi(t))\Big)'dt\Big\}&=\exp\Big\{-\lambda_n\int_{\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}}\frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt\Big\}\\ \le\exp\Big\{-\lambda_n\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\int_{\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}}\frac{dt}{t^2}\Big\}&=\exp\Big\{-\Big(\frac{1}{m}-\varepsilon\Big)\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\}\end{aligned}$$

$$\le \exp\Big\{-\Big(\frac{1}{m}-\varepsilon\Big)\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big\} \le \exp\Big\{-\gamma_n\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big\} = \frac{1}{n^2}.$$

Отже, для кожного $m \in \mathbb{N}$ ряд $|a_0| + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| \exp\Big\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\}$ збіжний. Зауважимо також, що $\|F\|_p \le \|F\|_q$ при $p \le q$.

Легко бачити, що $\|F\|_m$ ($m \in \mathbb{N}$) є нормою. Ця норма породжує метричну топологію на $\mathfrak{F}$. Покладемо

$$d(F,G) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F-G\|_m}{1+\|F-G\|_m}.$$

Через $(\mathfrak{F}, d)$ позначимо простір $\mathfrak{F}$ з метрикою d.

Теорема 1. *Простір $(\mathfrak{F}, d)$ є простором Фреше.*

Доведення. Нам потрібно показати, що простір $(\mathfrak{F}, d)$ повний. Нехай послідовність рядів Діріхле $\{F_\alpha\}$ є d-фундаментальною в $\mathfrak{F}$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $k_0 = k_0(\varepsilon)$, що для всіх $\alpha, \beta \ge k_0$ виконується $d(F_\alpha, F_\beta) < \varepsilon$.

Для довільних $\theta \in (0;1)$ і $m \in \mathbb{N}$ виберемо $\varepsilon > 0$ так, що $2^m \cdot \varepsilon < \theta < 1$. Оскільки $d(F_\alpha, F_\beta) < \varepsilon$, то

$$\|F_\alpha - F_\beta\|_m = |a_0^{(\alpha)} - a_0^{(\beta)}| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n^{(\alpha)} - a_n^{(\beta)}| \exp\Big\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < \frac{\theta}{1-\theta}. \tag{5}$$

Отже, $|a_n^{(\alpha)} - a_n^{(\beta)}| < \frac{\theta}{1-\theta}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{a_n^{(\alpha)}\}_{\alpha=1}^{\infty}$ є фундаментальною для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$. Нехай $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} a_n^{(\alpha)} = a_n$.

Спрямувавши в (5) β до $+\infty$, для $\alpha \ge k_0$ отримаємо

$$|a_0^{(\alpha)} - a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp\Big\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Покладемо $\alpha = k_0$, тоді

$$|a_n| \exp\Big\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < |a_n^{(k_0)}| \exp\Big\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} + \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Ряд Діріхле $F_{k_0} = a_0^{(k_0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^{(k_0)} e^{s\lambda_n}$ належить $(\mathfrak{F}, d)$ і, отже, виконується (4). Тому для деякого $p > m$ і досить великих n буде виконуватись нерівність

$$|a_n^{(k_0)}| \le \exp\Big\{-\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{p}}\Big)\Big)\Big\}.$$

Тоді

$$|a_n| \exp\Big\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big\} < \exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{p}}\Big)\Big) - \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\Big)\Big\} + \frac{\theta}{1-\theta}.$$

Враховуючи довільність θ і те, що перший доданок у правій частині останньої нерівності прямує до нуля при $n \to \infty$, отримуємо, що послідовність $\{a_n\}$ задовольняє (4). Тому, за лемою 1, для ряду Діріхле $F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{s\lambda_n}$ виконується співвідношення

$$\ln \mu(\sigma, F) \le (1+\varepsilon)\Phi(\sigma), \quad \sigma \ge \sigma_1.$$

Щоб показати, що $F \in \mathfrak{F}$, нам потрібна наступна лема.

Лема 2. *Якщо* $\Phi \in \Omega$ *і виконується* (3), *то співвідношення*

$$\ln \mu(\sigma, F) \le (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \to +\infty, \tag{6}$$

рівносильне співвідношенню

$$\ln M(\sigma, F) \le (1 + o(1))\Phi(\sigma), \quad \sigma \to +\infty. \tag{7}$$

Доведення. За нерівністю Коші $\mu(\sigma, F) \le M(\sigma, F)$ з (7) випливає (6).

Доведемо, що з (6) випливає (7). З (6) для довільного $\varepsilon \in (0, 1)$ виконується умова $\ln \mu(\sigma, F) \le (1 + \varepsilon)\Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \in [\sigma_0, \infty)$, а з леми 1 випливає, що для всіх $n \ge n_0$ виконується $\ln |a_n| \le -\lambda_n \Psi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\right)\right)$.

Покладемо $\gamma(\sigma) = 2\Phi'(\Psi^{-1}(\sigma))$. Тоді для всіх $\sigma \ge \sigma_0$ виконується

$$M(\sigma, F) \le \Big(\sum_{\lambda_n \le \gamma(\sigma)} + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)}\Big)|a_n|e^{\sigma\lambda_n}$$
$$\le \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big) - \sigma\Big)\Big\},$$

де $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \le t} 1$.

Для всіх $\lambda_n > \gamma(\sigma)$ виконується

$$\exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big) - \sigma\Big)\Big\} < \exp\Big\{-\lambda_n\Big(\Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}\Big)\Big) - \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big)\Big\}$$
$$= \exp\Big\{-\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \Big(\Psi\Big(\varphi(x)\Big)\Big)' dx\Big\} = \exp\Big\{-\lambda_n \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \frac{\Phi(\varphi(x))}{x^2} dx\Big\}$$
$$\le \exp\Big\{-\lambda_n \Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big) \int_{\frac{\lambda_n}{2}}^{\frac{\lambda_n}{1+\varepsilon}} \frac{dx}{x^2}\Big\} = \exp\Big\{-(1-\varepsilon)\Phi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{2}\Big)\Big)\Big\}.$$

Враховуючи сказане вище, а також те, що з (3) випливає нерівність $\frac{\ln n}{\Phi\left(\varphi\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)\right)} < \frac{1-\varepsilon}{2}$, отримуємо

$$M(\sigma, F) < \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \sum_{\lambda_n > \gamma(\sigma)} \frac{1}{n^2} < \mu(\sigma, F)n(\gamma(\sigma)) + \frac{1}{n(\gamma(\sigma))}.$$

Тобто,

$$\ln M(\sigma, F) < \ln \mu(\sigma, F) + \ln n(\gamma(\sigma)) + o(1), \quad \sigma \to +\infty.$$

Зіславшись знову на (3), отримуємо, що

$$\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{\ln n(\gamma(\sigma))}{\Phi(\sigma)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln n(x)}{\Phi(\Psi(\varphi(x/2)))} = 0.$$

Отже, виконується (7). Лему 2 доведено. □

Щоб довести теорему, залишилось показати, що $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} d(F_\alpha, F) = 0$. Зауважимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $M > 0$, що

$$\sum_{m=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F^{(\alpha)} - F\|_m}{1 + \|F^{(\alpha)} - F\|_m} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Оскільки $F^{(\alpha)}, F \in \mathfrak{F}$, то існує таке $N_1 \in \mathbb{N}$, що для всіх $m \in \{1,2,3,\dots,M\}$ виконується

$$\sum_{n=N_1+1}^{+\infty} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp\left\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{9}$$

Оскільки $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} a_n^{(\alpha)} = a_n$, то існує таке K^*, що для всіх $\alpha > K^*$ та $m \in \{1,2,3,\dots,M\}$ буде виконуватись співвідношення

$$\sum_{n=0}^{N_1} |a_n^{(\alpha)} - a_n| \exp\left\{\lambda_n \Psi\Big(\varphi\Big(\frac{\lambda_n}{1+\frac{1}{m}}\Big)\Big)\right\} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

Тоді з (9) і (10) випливає, що $\|F_\alpha - F\|_m < \frac{\varepsilon}{2}$, звідки маємо, що

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{\|F^{(\alpha)} - F\|_m}{1+\|F^{(\alpha)} - F\|_m} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1+\frac{\varepsilon}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому, зважаючи на (8), отримуємо, що $d(F_\alpha, F) < \varepsilon$. Отже, простір $(\mathfrak{F}, d)$ є повним. Теорему доведено. □

REFERENCES

[1] Kamthan P.K. *FK-Space for entire Dirichlet functions.* Collec. Math. 1969, **20** (3), 272–280.

[2] Kamthan P.K., Hussain T. *Spaces of entire functions represented by Dirichlet series.* Collec. Math. 1968, **19** (3), 203–216.

[3] Kumar A., Srivastava G.S. *Spaces of entire functions of slow growth represented by Dirichlet series.* Portugal. Math. 1994, **51** (1), 3–11.

[4] Sheremeta M.M. *Derivative of an entire function.* Ukrainian Math. J. 1988, **40** (2), 188–192.

Надійшло 01.06.2013

Fedynyak S.I. *Space of entire Dirichlet series*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 336–340.

We consider the space of entire Dirichlet series of finite Φ-type, endowed with a certain topology under which it is a Frechet space.

Key words and phrases: entire function, Dirichlet series, maximum modulus, order, genus, Frechet space.

Федыняк С.И. *Пространство целых рядов Дирихле* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 336–340.

Изучается пространство целых рядов Дирихле конечного Ф-типа, наделенное некоторой топологией, относительно которой оно будет пространством Фреше.

Ключевые слова и фразы: целая функция, ряд Дирихле, максимум модуля, порядок, род, пространство Фреше.