

УДК 515.12+512.58

БУБНЯК М.М.

ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ 1-ПЕРІОДИЧНОГО ГІЛЛЯСТОГО ЛАНЦЮГОВОГО ДРОБУ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Бубняк М.М. Оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дроби спеціального вигляду // Карпатські математичні публікації. — 2013. — Т.5, №2. — С. 187–195.

Встановлено оцінки швидкості збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дроби спеціального вигляду при умовах: якщо один елемент дроби належить комплексній площині з розрізом $(-\infty; -1/4]$, а сума модулів інших елементів обмежена деяким числом; а також, якщо елементи належать відповідним параболічним областям чи об'єднанню цих областей, а модулі елементів, починаючи з другого, обмежені.

Ключові слова і фрази: 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду, ознака Ворпіцького, об'єднання параболічних областей.

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль, Україна
E-mail: maria.bubnyak@gmail.com

ВСТУП

Теорема Ворпіцького та параболічні теореми [10, 12, 14] належать до класичних ознак збіжності неперервного дроби

$$1 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1}, \quad (1)$$

де $a_n \in \mathbb{C}$. У монографії [12, с.151] для дроби (1) встановлена оцінка швидкості узагальненої збіжності при належному виборі послідовності параболічних областей елементів. Новий підхід до дослідження класичних ознак збіжності дроби (1) на основі дробово-лінійних відображень запропоновано в [6].

Для гіллястого ланцюгового дроби (ГЛД) вигляду

$$1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^N \frac{a_{i(k)}}{1} = 1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{a_{i(1)}}{1 + \sum_{i_2=1}^N \frac{a_{i(2)}}{1 + \dots}}, \quad a_{i(k)} \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

де $i(k) = i_1, \dots, i_k$ — мультиіндекс ($1 \leq i_j \leq N$), N — натуральне число, Д. Боднаром [7, с.93] доведено багатовимірний аналог теореми Ворпіцького, встановлено оцінку швидкості збіжності ГЛД (2) та аналоги параболічних теорем [7, с.111]. Т. Антонова [1] встановила багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів. Р. Дмитришин [9] дослідив збіжність багатовимірних g -дробів у параболічній

області та встановив оцінку швидкості збіжності цих дробів у деякій обмеженій області, яка міститься в параболі.

Х. Кучмінська одержала ряд аналогів [11, теореми 6.10-6.12, 6.15] цих ознак для двовимірних неперервних дробів вигляду

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_{i,i}}{\Phi_i}, \quad \Phi_i = 1 + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j+i,j}}{1} + \prod_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{1}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

О. Сусь встановила аналог ознаки Ворпіцького для дробу (3).

Для ГЛД спеціального вигляду

$$1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1} = 1 + \sum_{i_1=1}^{i_0} \frac{a_{i(1)}}{1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{a_{i(2)}}{1 + \dots}}, \quad a_{i(k)} \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

де $1 \leq i_k \leq i_{k-1}$, $i_0 = N$, О. Баран [5] довела збіжність та встановила оцінку швидкості збіжності дробу (4), якщо всі його елементи задовольняють умови $|a_{i(k)}| \leq \frac{t(1-t)}{i_{k-1}}$ ($t \in [0; 1/2]$). У роботах [2, 3, 4] Т. Антонова дослідила кругові та параболічні області збіжності дробу (4) та встановила оцінки швидкості збіжності при певних додаткових умовах на елементи цього дробу.

1 ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Об'єктом наших досліджень є 1-періодичний ГЛД спеціального вигляду, який отримуємо з (4), якщо покласти: $a_{i(k)} = c_{i_k}$ ($1 \leq i_k \leq i_{k-1}$, $k \geq 1$), тобто

$$\left(1 + \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1} \right)^{-1} = \left(1 + \sum_{i_1=1}^N \frac{c_{i_1}}{1 + \sum_{i_2=1}^{i_1} \frac{c_{i_2}}{1 + \dots}} \right)^{-1}, \quad (5)$$

де c_j — комплексні числа ($j = \overline{1, N}$), N — фіксоване натуральне число.

Означення 1. Підхідним дробом n -го порядку 1-періодичного ГЛД (5) називають вираз

$$F_n = \left(1 + \prod_{k=1}^n \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1} \right)^{-1}, \quad n \geq 1; F_0 = 1.$$

Означення 2. Вираз вигляду

$$R_n^{(q)} = 1 + \prod_{k=1}^n \sum_{j_k=1}^{j_{k-1}} \frac{c_{j_k}}{1} = 1 + \sum_{j_1=1}^{j_0} \frac{c_{j_1}}{1 + \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{c_{j_2}}{1 + \dots \sum_{j_{n-1}=1}^{j_{n-2}} \frac{c_{j_{n-1}}}{1 + \sum_{j_n=1}^{j_{n-1}} \frac{c_{j_n}}{1}}}}$$

назвемо n -тим залишком q -го порядку 1-періодичного ГЛД (5), $q = \overline{1, N}$, $n \geq 1$, $j_0 = q$, $R_0^{(q)} = 1$, $R_n^{(0)} = 1$.

Повторюючи схему доведення теореми 4.1 [13, с.47], в якій встановлено оцінку швидкості збіжності зворотного гранично-періодичного дробу, отримуємо для 1-періодичного неперервного дробу наступне твердження.

Твердження 1. Нехай елементи c_n неперервного дробу

$$1 + \overset{\infty}{D} \frac{c_n}{1} \quad (6)$$

однакові ($c_n = c$) і $c \in G$, де $G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(z + \frac{1}{4} \right) \right| < \pi \right\}$. Тоді справджується оцінка різниці двох підхідних дробів

$$|f_n - f_m| \leq Mp^{m+1}, \quad n > m \geq 0,$$

де $M = \frac{2|x|}{1-p}$, $p = \left| \frac{y}{x} \right|$, $x = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$, $y = \frac{1 - \sqrt{1+4c}}{2}$ — притягувальна та відповідно відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + \frac{c}{\omega}$.

Твердження 2. Нехай для залишків дробу (5) виконуються нерівності

$$|R_n^{(q)}| \geq g_n > 0, \quad n \geq 0; q = \overline{2, N}; g_{-1} = 1. \quad (7)$$

Тоді при $n > m \geq 0$ справджується оцінка

$$|F_n - F_m| \leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \left[\sum_{k=0}^m \frac{C^k}{\prod_{r=1}^k g_{n-r} \cdot g_{m-r}} |R_{n-k}^{(1)} - R_{m-k}^{(1)}| + \frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{n-r} \cdot g_{m-r}} \right], \quad (8)$$

де

$$C = \sum_{j=2}^N |c_j|. \quad (9)$$

Доведення. Враховуючи, що $F_n = \left(R_n^{(N)} \right)^{-1}$, $n \geq 0$, $R_n^{(q)} = R_n^{(1)} + \sum_{j=2}^q \frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}}$, $n \geq 1$,

$R_k^{(q)} - R_l^{(q)} = R_k^{(1)} - R_l^{(1)} + \sum_{j=2}^q \frac{c_j}{R_{k-1}^{(j)} \cdot R_{l-1}^{(j)}} \left(R_{l-1}^{(j)} - R_{k-1}^{(j)} \right)$, $n \geq k > l \geq 0$, $q = \overline{2, N}$, і умови (7), маємо

$$\begin{aligned} |F_n - F_m| &= \left| \frac{1}{R_n^{(N)} \cdot R_m^{(N)}} \left[R_m^{(1)} - R_n^{(1)} + \sum_{j_1=2}^N \frac{c_{j_1}}{R_{n-1}^{(j_1)} \cdot R_{m-1}^{(j_1)}} \left(R_{n-1}^{(j_1)} - R_{m-1}^{(j_1)} \right) \right] \right| \\ &\leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \left[\left| R_m^{(1)} - R_n^{(1)} \right| + \frac{\sum_{j_1=2}^N |c_{j_1}|}{g_{n-1} \cdot g_{m-1}} \left| R_{n-1}^{(1)} - R_{m-1}^{(1)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \left| R_{m-2}^{(j_2)} - R_{n-2}^{(j_2)} \right|}{g_{n-1} g_{n-2} \cdot g_{m-1} g_{m-2}} \right]. \end{aligned}$$

Через m кроків одержимо оцінку

$$|F_n - F_m| \leq \frac{1}{g_n \cdot g_m} \left[|R_m^{(1)} - R_n^{(1)}| + \frac{\sum_{j_1=2}^N |c_{j_1}|}{g_{n-1} \cdot g_{m-1}} |R_{n-1}^{(1)} - R_{m-1}^{(1)}| \right. \\ \left. + \dots + \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_m=2}^{j_{m-1}} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_m}|}{\prod_{r=1}^m g_{m-r} g_{n-r}} |R_{n-m}^{(1)} - R_0^{(1)}| \right. \\ \left. + \frac{\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_m=2}^{j_{m-1}} \sum_{j_{m+1}=2}^{j_m} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_m}| |c_{j_{m+1}}|}{\prod_{r=1}^{m+1} g_{m-r} \cdot g_{n-r}} \right].$$

Враховуючи рівність (9), при $s = \overline{1, m+1}$ одержимо

$$\sum_{j_1=2}^N \sum_{j_2=2}^{j_1} \dots \sum_{j_s=2}^{j_{s-1}} |c_{j_1}| |c_{j_2}| \dots |c_{j_s}| = \sum_{k_2+\dots+k_N=s} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N} \leq \left(\sum_{j=2}^N |c_j| \right)^s = C^s$$

і оцінку (8). □

Теорема 1. Нехай елементи c_j дробу (5) задовольняють умови

$$c_1 \in G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(z + \frac{1}{4} \right) \right| < \pi \right\}, \quad \sum_{j=2}^N |c_j| = C \leq \frac{\mu^2}{4},$$

де $\mu = \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{1+4c_1}| - |1 - \sqrt{1+4c_1}|)$.

Тоді справджуються такі оцінки швидкості збіжності:

1) якщо $C < \frac{\mu^2}{4}$, то

$$|F - F_m| \leq L_1 \frac{p_1^{m+1} - p_2^{m+1}}{p_1 - p_2}, \quad m > 0, p_1 \neq p_2; \\ |F - F_m| \leq L_1 (m+1) p^{m+1}, \quad m > 0, p_1 = p_2 = p;$$

2) якщо $C = \frac{\mu^2}{4}$, то

$$|F - F_m| \leq L_2 \frac{1}{m+1}, \quad m > 0,$$

$$\text{де } L_1 = \frac{4|1 + \sqrt{1+4c_1}|}{\mu(1-p_1)(1-p_2)}, \quad L_2 = \frac{4|1 + \sqrt{1+4c_1}|(p_1 + (1-p_1)^2)}{\mu^2(1-p_1)^3}, \quad p_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1+4c_1}}{1 + \sqrt{1+4c_1}} \right|, \\ p_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4C/\mu^2}}{1 + \sqrt{1-4C/\mu^2}}, \quad F \text{ — значення дробу (5).}$$

Доведення. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(q)}|$, $n \geq 0$, $q = \overline{1, N}$. Враховуючи, що $c_1 \in G$, при $n \geq 0$ маємо

$$|R_n^{(1)}| = \left| \frac{x_1^{n+2} - y_1^{n+2}}{x_1^{n+1} - y_1^{n+1}} \right| \geq |x_1| (1-p_1) = \frac{1}{2} (|1 + \sqrt{1+4c_1}| - |1 - \sqrt{1+4c_1}|) = \mu,$$

де p_1, x_1, y_1 визначені аналогічно, як p, x, y у твердженні 1. Зауважимо, що $\mu = 0$ лише тоді, коли числа $1 + \sqrt{1 + 4c_1}$ та $1 - \sqrt{1 + 4c_1}$ є комплексно-спряженими. Цей випадок виключений умовою теореми.

Методом математичної індукції по n доведемо, що для будь-якого фіксованого q , $2 \leq q \leq N$, справджуються оцінки

$$|R_n^{(q)}| \geq g_n, \quad n \geq 0, \quad (10)$$

$$\text{де } g_n = \mu + \prod_{k=1}^n \frac{-C}{\mu}, n \geq 0.$$

При $n = 0$ одержимо $R_0^{(q)} = 1 \geq \mu = g_0$.

Нехай нерівності (10) виконуються для кожного $n = k$. Тоді при $n = k + 1$ маємо

$$|R_{k+1}^{(q)}| = \left| R_{k+1}^{(1)} + \sum_{j=2}^q \frac{c_j}{R_k^{(j)}} \right| \geq \mu - \sum_{j=2}^q \frac{|c_j|}{|R_k^{(j)}|} \geq \mu - \frac{\sum_{j=2}^q |c_j|}{g_k} \geq \mu - \frac{C}{g_k} = g_{k+1}.$$

Для оцінки швидкості збіжності ГЛД (5) використаємо нерівність (8). Оскільки $c_1 \in G$, то згідно з твердженням 1 маємо $|R_{n-r}^{(1)} - R_{m-r}^{(1)}| \leq M_1 p_1^{m-r+1}$, $n > m \geq 0$, $r \geq 0$, де $M_1 = 2|x_1|/(1 - p_1)$.

Позначимо \hat{f}_n — n -тий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу (6) при $c = -C/\mu^2$; $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4C/\mu^2}}{2}$, $y_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C/\mu^2}}{2}$ — притягувальна та відштовхувальна точки дробово-лінійного відображення $t(\omega) = 1 + \frac{-C/\mu^2}{\omega}$. Тоді маємо $\hat{f}_n = \frac{x_2^{n+2} - y_2^{n+2}}{x_2^{n+1} - y_2^{n+1}}$, $g_n = \mu \cdot \hat{f}_n$, $n \geq 0$, та $x_2 \cdot y_2 = C/\mu^2$.

1. Оцінимо вирази $\frac{C^k}{\prod_{r=1}^k g_{n-r} \cdot g_{m-r}}$ зверху при $k = \overline{1, m+1}$. Нехай $1 \leq k \leq m$, тоді

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} = \frac{(C/\mu^2)^k}{\prod_{r=1}^k (\hat{f}_{n-r} \cdot \hat{f}_{m-r})} \leq \frac{1}{1 - p_2} \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^k = M_2^{(1)} p_2^k,$$

де $M_2^{(1)} = \frac{1}{1 - p_2}$, $p_2 = y_2/x_2$. Аналогічну оцінку отримаємо при $k = m + 1$, де $M_2^{(2)} = \frac{\mu x_2}{1 - p_2}$. Оскільки $\mu \leq 1$ і $x_2 \leq 1$, то $M_2 = \max\{M_2^{(1)}, M_2^{(2)}\} = \frac{1}{1 - p_2}$.

Якщо $p_1 \neq p_2$, то

$$|F_n - F_m| \leq \frac{4}{\mu^2} \left(\sum_{k=0}^m M_1 p_1^{m-k+1} \cdot M_2 p_2^k + M_2 p_2^{m+1} \right) \leq L_1 \frac{p_1^{m+1} - p_2^{m+1}}{p_1 - p_2},$$

$$\text{де } L_1 = \frac{4M_1 M_2}{\mu^2}.$$

Якщо $p_1 = p_2 = p$, то

$$|F_n - F_m| \leq \frac{4}{\mu^2} \left(\sum_{k=0}^m M_1 p_1^{m-k+1} \cdot M_2 p_2^k + M_2 p_2^{m+1} \right) \leq L_1 (m + 1) p^{m+1}.$$

2. Нехай $\frac{C}{\mu^2} = \frac{1}{4}$. Враховуючи, що $\tilde{f}_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ — n -тий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дроби (6), де $c = -1/4$, при $1 \leq k \leq m$ маємо

$$\frac{C^k}{\prod_{r=1}^k (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} = \frac{(C/\mu^2)^k}{\prod_{r=1}^k (\tilde{f}_{n-r} \cdot \tilde{f}_{m-r})} = \frac{(n-k+1)(m-k+1)}{(n+1)(m+1)}.$$

Аналогічно при $k = m+1$ одержимо

$$\frac{C^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} (g_{n-r} \cdot g_{m-r})} = \frac{\mu(C/\mu^2)^{m+1}}{\prod_{r=1}^{m+1} \tilde{f}_{n-r} \cdot \prod_{r=1}^m \tilde{f}_{m-r}} = M_2 \frac{n-m}{(n+1)(m+1)},$$

де $M_2 = \frac{\mu}{2} \leq \frac{1}{2}$.

Отже, $|F_n - F_m| \leq \frac{4M_1 M_2}{\mu^2} \cdot \frac{\sum_{k=0}^m p_1^{m-k+1} (n-k+1)(m-k+1) + (n-m)}{(n+1)(m+1)}$.

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, отримаємо оцінку з пункту 2 для $|F - F_m|$. \square

Теорема 2. Нехай елементи $c_j, j = \overline{1, N}$, дроби (5) задовольняють умову $c_j \in P_j(\gamma)$, де

$$P_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-\gamma i}) \leq 2l_j \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad -\pi < \gamma < \pi, \quad l_j = \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{j}{2N} \right).$$

Тоді

1. Дріб (5) збігається.

2. Областю значень дроби (5) є круг $K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{e^{-i\gamma/2}}{\cos \gamma/2} \right| \leq \frac{1}{\cos \gamma/2} \right\}$.

3. Крім цього, якщо $|c_j| < \left(1 - \frac{j}{2N} \right)^2 \cos^2 \gamma/2, j = \overline{2, N}$, то справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_m| \leq L \cdot C_{m+N-1}^{N-1} \cdot p^{m+1}, \quad m \geq 0, \quad (11)$$

де $L = \frac{4M_1}{\cos^2 \gamma/2}; M_1 = \frac{|1 + \sqrt{1+4c_1}|(1+p_1)}{(1-p_1)^2}; p = \max_{j=\overline{1, N}} \{p_j\}; p_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1+4c_1}}{1 + \sqrt{1+4c_1}} \right|;$

$p_j = \frac{|c_j|}{\left(1 - \frac{j}{2N} \right)^2 \cos^2 \gamma/2}, j = \overline{2, N}; F$ — значення дроби (5).

Доведення. Пункти 1 та 2 доведені у теоремі 2 [8]. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(j)}|, n \geq 0; j = \overline{1, N}$. Оскільки $c_j \in P_j(\gamma), j = \overline{1, N}$, то $R_n^{(j)} \in V_j(\gamma)$, де

$$V_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(ze^{-i\gamma/2}) \geq \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos \gamma/2 \right\}.$$

Отже, $|R_n^{(j)}| \geq \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos \gamma/2$.

Оскільки $R_n^{(j)} \neq 0, n \geq 0; j = \overline{1, N}$, то для оцінки швидкості збіжності дробу (5) використаємо нерівність

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{|R_{n+m}^{(N)}| \cdot |R_n^{(N)}|} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_N = n+1 \\ k_j \geq 0 (j=\overline{1, N})}} \frac{|c_1|^{k_1} |c_2|^{k_2} \dots |c_N|^{k_N}}{\prod_{j=1}^N \prod_{r=1}^{k_j} \left(|R_{m+s_j-r}^{(j)}| \cdot |\hat{R}_{s_j-r}^{(j)}| \right)}, \quad (12)$$

де $s_j = n - \sum_{l=j+1}^N k_l; \hat{R}_n^{(q)} = \begin{cases} R_n^{(q)}, & \text{якщо } n \geq 0 \\ 1, & \text{якщо } n = -1 \end{cases}$, яка випливає з формули різниці підхідних дробів F_{n+m} та $F_n, n > 0, m > 0$.

Враховуючи твердження 1 і $c_1 \in P_1(\gamma) \subset G$, де $G = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(\frac{1}{4} + z \right) \right| < \pi \right\}$, маємо

$$\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} |R_{s_1+m-r}^{(1)}| \cdot |\hat{R}_{s_1-r}^{(1)}|} \leq M_1 p_1^{k_1}, 1 \leq k_1 \leq n+1.$$

Позначимо $\Psi_j = \frac{|c_j|}{|R_{s_j+m-r}^{(j)}| \cdot |\hat{R}_{s_j-r}^{(j)}|}$, тоді $\Psi_j \leq \frac{|c_j|}{\left(1 - \frac{j}{2N}\right)^2 \cos^2 \gamma/2} = p_j < 1, j = \overline{2, N}$,

$\prod_{j=1}^{k_j} \Psi_j \leq p_j^{k_j}, 1 \leq k_j \leq m$, і $\prod_{j=1}^{m+1} \Psi_j = \left(1 - \frac{j}{2N}\right) \cos(\gamma/2) \cdot p_j^{m+1}, k_j = m+1$. Враховуючи, що $M_2 = \max \{1; (1 - j/(2N)) \cos \gamma/2\} = 1$, маємо оцінку

$$|F_{n+m} - F_n| \leq \frac{1}{|R_{n+m}^{(N)}| \cdot |R_n^{(N)}|} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_N=n+1} M_1 p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_N^{k_N} \leq L \cdot C_{n+N-1}^{N-1} \cdot p^{n+1},$$

де $L = \frac{4M_1}{\cos^2 \gamma/2}$. Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо (11). □

Встановимо оцінку швидкості збіжності в об'єднанні параболічних областей, які побудовані за схемою запропонованою в роботі [8], тобто

$$G_1 = \{\omega \in \mathbb{C} : |\arg(\omega + l_1)| < \pi\} \quad (13)$$

та

$$G_s = G_s(c_1, c_2, \dots, c_{s-1}) = \bigcup_{\gamma \in [\Gamma_1^{s-1}, \Gamma_2^{s-1}]} P_s(\gamma), \quad (14)$$

$$P_s(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| - \operatorname{Re}(ze^{-\gamma i}) \leq 2l_s \cos^2 \frac{\gamma}{2} \right\}, \quad -\pi < \gamma < \pi, \quad l_s = \frac{1}{2N} \left(1 - \frac{s}{2N} \right),$$

де $[\Gamma_1^{s-1}, \Gamma_2^{s-1}] = \bigcap_{j=1}^{s-1} [\gamma_1^j, \gamma_2^j], s = \overline{2, N}$, і $\gamma_1^j = \arccos \left(\frac{A_j+B_j}{C_j} \right)$, якщо виконується умова $\cos \alpha_j \leq 1 - \frac{2l_j}{|c_j|}$, і $\gamma_1^j = -\arccos \left(\frac{A_j+B_j}{C_j} \right)$, якщо ця умова не виконується; $\gamma_2^j = \arccos \left(\frac{A_j-B_j}{C_j} \right)$, $\alpha_j = \arg c_j, A_j = (|c_j| - l_j)(l_j + |c_j| \cos \alpha_j), B_j = |c_j| |\sin \alpha_j| \sqrt{2|c_j|l_j(1 + \cos \alpha_j)}, C_j = l_j^2 + |c_j|^2 + 2|c_j|l_j \cos \alpha_j$.

Теорема 3. Нехай елементи c_j , $j = \overline{1, N}$, дробу (5) задовольняють умову $c_j \in G_j$, де G_j визначаються згідно з формулами (13)–(14). Тоді

1. Дріб (5) збігається.
2. Областю значень дробу (5) є об'єднання кругів $K(\Gamma_1^N) \cup K(\Gamma_2^N)$.
3. Крім цього, якщо $|c_j| < v_j$, $j = \overline{2, N}$, де $v_j = \left(1 - \frac{j}{2N}\right)^2 \min^2\{\cos(\Gamma_1^N/2); \cos(\Gamma_2^N/2)\}$, то справджується оцінка швидкості збіжності

$$|F - F_m| \leq L \cdot C_{m+N-1}^{N-1} \cdot p^{m+1}, \quad m \geq 0, \quad (15)$$

$$\text{де } L = M_1/v_N; M_1 = \frac{|1 + \sqrt{1 + 4c_1}|(1 + p_1)}{(1 - p_1)^2}; p = \max_{j=1, N}\{p_j\}; p_1 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4c_1}}{1 + \sqrt{1 + 4c_1}} \right|;$$

$$p_j = |c_j|/v_j \quad (j = \overline{2, N}); F — \text{значення дробу (5)}.$$

Доведення. Пункти 1 та 2 доведені в теоремі 3 [8]. Встановимо оцінки знизу для $|R_n^{(j)}|$, $n \geq 0$; $j = \overline{1, N}$. Оскільки $c_j \in G_j$, $j = \overline{1, N}$, то $R_n^{(j)} \in \bigcup_{\gamma \in [\Gamma_1^N, \Gamma_2^N]} V_j(\gamma)$, де

$$V_j(\gamma) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \left(z e^{-\gamma i/2} \right) \geq \left(1 - \frac{j}{2N} \right) \cos \frac{\gamma}{2} \right\}.$$

Отже, справджуються оцінки $|R_n^{(j)}| \geq \sqrt{v_j}$.

Аналогічно як у попередній теоремі використаємо нерівність (12) для оцінки швидкості збіжності дробу (5). Враховуючи, що $\frac{|c_1|^{k_1}}{\prod_{r=1}^{k_1} |R_{s_1+m-r}^{(1)}| \cdot |\widehat{R}_{s_1-r}^{(1)}|} \leq M_1 p_1^{k_1}$, $1 \leq k_1 \leq m+1$, та $\Psi_j \leq \frac{|c_j|}{v_j} = p_j < 1$, $j = \overline{2, N}$, одержимо оцінку (15). □

Отримані умови збіжності відрізняються від раніше встановлених тим, що маємо значно ширшу область для вибору елемента c_1 , яка у випадку неперервного дробу є максимально можливою. Встановлено оцінки швидкості збіжності при додаткових умовах на елементи 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду.

REFERENCES

- [1] Antonova T.M. *Multidimensional generalization of multiply parabola convergence theorem for continued fractions.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1999, **42** (4), 7–12. (in Ukrainian)
- [2] Antonova T.M. *Speed of convergence for branched continued fractions of special form.* Volyn Math. Bull. 1999, **6**, 3–8. (in Ukrainian)
- [3] Antonova T.M., Bodnar D.I. *The convergence regions for branched continued fractions of special form.* In: Proc. of the Intern. Conf. on Approximation Theory and its Appl. dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk 2000, **31**, 19–32. (in Ukrainian)
- [4] Antonova T.M. *On simple circular sets of absolute convergence for branched continued fractions of the special form.* Carpathian Math. Publ. 2012, **4** (2), 165–174. (in Ukrainian)
- [5] Baran O. *Analogue of the Worpitzky convergence criterion for branched continued fractions of a special form.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 1996, **39** (2), 35–38. (in Ukrainian)

- [6] Beardon A.F. *Worpitzky's Theorem on continued fractions*. J. Comput. Appl. Math. 2001, **131** (1–2), 143–148. doi:10.1016/S0377-0427(00)00318-6
- [7] Bodnar D.I. *Branched continued fractions*. Naukova dumka, Kyiv, 1986. (in Russian)
- [8] Bodnar D.I., Bubniak M.M. *Some parabolic regions of convergence for 1-periodic branched continued fraction of special form*. Computer-integration technology: education, science, industry 2012, **9**, 4–8. (in Ukrainian)
- [9] Dmytryshyn R.I. *The multidimensional generalization of g-fractions and their application*. J. Comput. Appl. Math. 2004, **164–165**, 265–284. doi: 10.1016/S0377-0427(03)00642-3
- [10] Jones W.B., Thron W.J. *Continued Fractions: Analytic Theory and Applications*, Encyclopedia Math. Appl. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1980.
- [11] Kuchmins'ka Kh.Yo. *Two-dimensional continued fractions*. Pidstryhach Institute Appl. Probl. Mech. Math., L'viv, 2010. (in Ukrainian)
- [12] Lorentzen L., Waadeland H. *Continued Fractions*. Atlantis Press/World Scientific, Amsterdam-Paris, 2008.
- [13] Thron W.J., Waadeland H. *Modifications of continued fractions*. Lecture Notes in Mathematics. Analytic Theory of Continued fractions. 1981, **932**, 38–66.
- [14] Wall H.S. *Analytic Theory of Continued Fractions*. Van Nostrand, New York, 1948.

Надійшло 29.04.2013

Bubniak M.M. *Truncation-error bounds for the 1-periodic branched continued fraction of special form*. Carpathian Mathematical Publications 2013, **5** (2), 187–195.

Truncation-error bounds for the 1-periodic continued fraction of special form are established at the following conditions: if first element of the fraction belongs to complex plain with the cut $(-\infty; -1/4]$ and the sum of modules of other elements is limited by a certain number; if elements belong to their respective parabolic regions or union of that parabolic regions and all their modules, except of the first one, are limited.

Key words and phrases: 1-periodic branched continued fraction of special form, Worpitsky's criterion, union of parabolic regions.

Бубняк М.М. *Оценки скорости сходимости 1-периодической ветвящейся цепной дроби специального вида* // Карпатские математические публикации. — 2013. — Т.5, №2. — С. 187–195.

Установлены оценки сходимости 1-периодической ветвящейся непрерывной дроби специального вида при условиях: если первый элемент дроби принадлежит комплексной плоскости с разрезом $(-\infty; -1/4]$ и сумма модулей остальных элементов ограничена некоторым числом; если элементы принадлежат соответствующим параболическим областям или объединению параболических областей и модули элементов, начиная со второго, ограничены.

Ключевые слова и фразы: 1-периодическая ветвящаяся цепная дробь специального вида, критерий Ворпицкого, объединение параболических областей.