ISSN 2075-9827 `http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp`
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 68–72 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.68–72
doi:10.15330/cmp.6.1.68-72

Ластівка І.О.

ВАРІАЦІЙНЕ ВИВЕДЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ МЕРИДІОНАЛЬНІЙ ПОЛЯРИЗАЦІЇ

Запропоновано побудову одного з варіантів уточненої теорії п'єзокерамічної оболонки при її меридіональній поляризації, отримано систему диференціальних рівнянь коливань оболонки та граничні умови з використанням варіаційного принципу Рейсснера.

Ключові слова і фрази: п'єзокерамічна оболонка, меридіональна поляризація, диференціальні рівняння коливань, граничні умови, варіаційний принцип.

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
E-mail: `iola@nau.edu.ua`

Вступ

Коливання п'єзокерамічних тіл, як механічний процес, описується рівняннями механіки деформівного твердого тіла, а з точки зору електричних явищ — рівняннями електродинаміки. Обидві групи рівнянь є взаємозв'язаними, вони розв'язуються сумісно і складають рівняння теорії електропружності.

Розвиток сучасної техніки, експлуатація якої відбувається у складних умовах навантаження при взаємодії різних фізичних факторів, стимулює створення та розвиток теорії спряжених полів у пружних тілах.

Анізотропія фізико-математичних властивостей п'єзоелектриків і взаємозв'язок електромагнітного поля з механічним рухом суттєво ускладнюють опис процесів деформування і міцності. У зв'язку з цим значну увагу приділено розвитку і створенню математичних методів кількісного аналізу. Для моделювання коливних процесів електромеханічних систем, а також для розв'язання крайових задач електропружності доволі часто використовуються кінцево-різницевий та варіаційно-різницевий методи. Широке застосування в техніці оболонок із п'єзокерамічних матеріалів потребує побудови для них прикладних теорій статичного і динамічного деформування.

1 Постановка задачі

У даній роботі ставиться задача математичного моделювання коливань п'єзокерамічної оболонки при меридіональній поляризації на основі уточненої теорії типу С.П. Тимошенка та варіаційного принципу Рейсснера [3], який стосовно зв'язаних задач для багатошарових оболонок був розвинений у роботі [4].

УДК 517.958:534.1
2010 *Mathematics Subject Classification:* 97M10.

2 Виведення диференціальних рівнянь коливань п'єзокерамічної оболонки, поляризованої вздовж меридіану. Граничні умови

Попередньо поляризовану по меридіану оболонку віднесемо до триортогональної системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = z$. На поверхні приведення $z = 0$, положення якої може бути вибрано довільним чином, координатні лінії $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const$ є лініями головних кривизн оболонки, R_1 і R_1 — радіуси кривизн, h — товщина оболонки. Вісь $0z$ спрямована за нормаллю до серединної поверхні оболонки, A_1 і A_2 — параметри Ламе або коефіцієнти першої квадратичної форми dS^2 поверхні $z = 0$, а саме: $dS^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2$.

Електропружний стан п'єзокерамічного тіла характеризується тензором механічних напружень σ, деформацій ε, векторами напруженості $\vec{E}$ та індукції $\vec{D}$ електричного поля. В лінійній теорії п'єзоелектрики залежності між вказаними характеристиками електропружного тіла вважаються лінійними. Вигляд співвідношень електропружності залежить від вибору незалежних термодинамічних параметрів, що визначають функцію внутрішньої енергії, а також від напряму вектора попередньої поляризації п'єзокераміки.

Якщо за незалежні термодинамічні параметри вибрати напруження σ і напруженість електричного поля $\vec{E}$, то рівняння стану попередньо поляризованої по меридіану оболонки має вигляд [1]:

$$\begin{aligned}
&e_{11} = s_{11}\sigma_{11} + s_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{zz}) + d_{11}E_1;\\
&e_{22} = s_{13}\sigma_{11} + s_{33}\sigma_{22} + d_{31}E_1;\\
&e_{zz} = s_{31}\sigma_{11} + s_{32}\sigma_{22} + s_{33}\sigma_{zz} + d_{31}E_1;\\
&2e_{1z} = s_{55}\sigma_{1z} + d_{53}E_z; \qquad 2e_{2z} = s_{44}\sigma_{2z};\\
&2e_{12} = s_{55}\sigma_{12} + d_{53}E_2; \qquad D_1 = d_{11}\sigma_{11} + d_{13}(\sigma_{22} + \sigma_{zz}) + \varepsilon_{11}E_1;\\
&D_2 = d_{53}\sigma_{21} + \varepsilon_{53}E_2; \qquad D_z = d_{53}\sigma_{1z} + \varepsilon_{33}E_z.
\end{aligned} \tag{1}$$

У якості основних спрощуючих припущень візьмемо відомі кінематичні гіпотези типу С.П. Тимошенка, відповідно до яких тангенціальні переміщення $u_1^{(z)}$, $u_2^{(z)}$ змінюються за лінійним законом, а поперечні $u_z^{(z)}$ не залежать від товщинної координати:

$$\begin{aligned}
&u_j^{(z)}(\alpha_1, \alpha_2, z) = u_j(\alpha_1, \alpha_2) + z\gamma_j(\alpha_1, \alpha_2); \quad (j = 1, 2),\\
&u_z^{(z)}(\alpha_1, \alpha_2, z) = W(\alpha_1, \alpha_2).
\end{aligned} \tag{2}$$

Співвідношення (2) доповнимо гіпотезами достатньо загального характеру відносно розподілу електростатичного потенціалу за товщиною оболонки

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, z) = \frac{2z}{h}\Phi_0 + f(z)\Phi(\alpha_1, \alpha_2). \tag{3}$$

Тут $\Phi = const$, а $f(z)$, взагалі кажучи, довільна неперервна функція, що задовольняє умову $f\left(\pm\dfrac{h}{2}\right) = 0$, яка дозволить виконати граничні умови для розглянутих нижче оболонок, поверхні яких покриті електродами з постійною різницею потенціалів.

Вектор напруженості електричного поля $\overrightarrow{E}$ пов'язаний з функцією електростатичного потенціалу φ формулою $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{grad}\,\varphi$, тому в силу припущень (3)

$$\overrightarrow{E} = \left\{-\frac{f(z)}{A_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1}; \quad -\frac{f(z)}{A_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2}; \quad -\left(\frac{2\Phi_0}{h} + f'(z)\Phi\right)\right\}.$$

Для виведення диференціальних рівнянь коливань і граничних умов застосуємо варіаційний підхід [3], використаємо функціонал

$$I = \int_0^t \int_V \left(\sigma^{ij} \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) + D_i \nabla_i \varphi + G_1(\sigma, D) - T \right) dV dt, \tag{4}$$

де σ^{ij} — тензор напружень, u_i — переміщення, φ — потенціал, $\overrightarrow{D}$ — вектор електричної індукції, $G_1(\sigma, D)$ — пружна функція Гіббса, T — кінетична енергія.

З умови стаціонарності функціоналу (4) отримуємо

$$\begin{aligned} I = \int_0^t \iint_\Omega \Bigg(& T_{ij} \delta e_{ij} + M_{ij} \delta \chi_{ij} + 2Q_j \delta e_j + \widehat{D}_j \delta \left(\frac{1}{A_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_j} \right) \\ & + \widehat{D}_z \delta \Phi - \left(\rho h \dot{u}_i \delta \dot{u}_i + \left(\frac{\rho h^3}{12} \right) \dot{\gamma}_i \delta \dot{\gamma}_i \right) \Bigg) d\Omega dt = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут введені наступні інтегральні характеристики:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz; \quad Q_j = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{jz} dz; \\ \widehat{D}_j &= \int_{-h/2}^{h/2} D_j f(z) dz; \quad \widehat{D}_z = \int_{-h/2}^{h/2} D_z f'(z) dz. \end{aligned} \tag{6}$$

Величини e_{ij}, χ_{ij} та e_j пов'язані з переміщеннями та кутами повороту відомими співвідношеннями [2].

Перейдемо до варіацій переміщень, кутів повороту і потенціалу (незалежні варіації) і, користуючись формулою Гріна-Остроградського, з (5) отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{A_i} T_{ii} \right)_{,i} - \frac{1}{A_i A_j} T_{ii} A_{j,i} + \frac{1}{A_i} \left(\frac{1}{A_j} A_i T_{ij} \right)_{,j} + Q_i k_i - \rho h \ddot{u}_i = 0; \\ & \left(\frac{1}{A_1} Q_1 \right)_{,1} + \left(\frac{1}{A_2} Q_2 \right)_{,2} - (T_{11} k_1 + T_{22} k_2) - \rho h \ddot{w} = 0; \\ & \left(\frac{1}{A_i} M_{ii} \right)_{,i} + \left(\frac{1}{A_j} A_i M_{ij} \right)_{,j} - \frac{1}{A_i A_j} M_{jj} A_{j,i} - Q_i - \left(\frac{\rho h^3}{12} \right) \ddot{\gamma}_i = 0; \\ & \widehat{D}_z - \left(\frac{1}{A_1} \widehat{D}_1 \right)_{,1} - \left(\frac{1}{A_2} \widehat{D}_2 \right)_{,2} = 0, \qquad (i, j = 1, 2), \ (i \neq j) \end{aligned} \tag{7}$$

і контурний інтеграл

$$\int_{\bar{\Omega}} \left(M_{nj} \delta \gamma_j + T_{nj} \delta u_j + Q_n \delta w + \widehat{D}_n \delta \Phi \right) d\bar{\Omega} = 0,$$

на підставі якого необхідно сформулювати граничні умови. У рівняннях (7) записи типу $(\ )_{,i}$ означають диференціювання по відповідній компоненті.

Будемо вважати, що поверхні оболонок вільні від механічних напружень і покриті електродами з заданою різницею потенціалів. Тоді граничні умови мають вигляд

$$\sigma_{jz} \left(\alpha_1, \alpha_2, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, \tag{8}$$

$$\varphi\left(\alpha_1, \alpha_2, \pm\frac{h}{2}\right) = \pm\Phi_0.$$

Напруження $\sigma_{jz}(j = 1, 2)$, знайдені з (1) за деформаціями, що визначаються співвідношеннями Коші, при введених гіпотезах (2) не будуть задовольняти граничні умови (8). Тому будемо додатково вважати, що

$$\sigma_{jz} = \frac{1}{h} f(z) Q_j(\alpha_1, \alpha_2), \qquad (j = 1, 2),$$

причому $f(z)$ така, що $f\left(\pm\frac{h}{2}\right) = 0$ і $\frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(z)dz = 1$, а $Q_j(\alpha_1, \alpha_2)$ — перерізуюча сила. Протиріччя, пов'язані з задоволенням граничних умов (8), можна обійти, якщо два рівняння з (1) виконати інтегрально

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \left(2e_{1z} - \left(s_{55} - \frac{d_{53}^2}{\varepsilon_{33}}\right)\sigma_{1z} - \left(\frac{d_{53}}{\varepsilon_{33}}\right) D_z\right) \delta\sigma_{1z} dz = 0, \tag{9}$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} (2e_{2z} - s_{44}\sigma_{2z})\delta\sigma_{2z} dz = 0. \tag{10}$$

Знаходимо інтегральні характеристики за формулами (6), підставивши в них рівняння (1), розв'язані відносно напружень:

$$\begin{aligned}
&T_{11} = D_{T1}\big(e_{11} + \nu_{31}e_{22} + (d_{11} + \nu_{31}d_{31})\big)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1};\\
&T_{22} = D_{T2}\big(e_{22} + \nu_{13}e_{11} + (d_{31} + \nu_{13}d_{11})\big)\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1};\\
&T_{12} = \frac{2h}{s_{55}}e_{12} - \frac{hd_{33}}{s_{55}}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2}; \qquad M_{12} = \frac{h^3}{12s_{55}}2\chi_{12};\\
&M_{11} = D_{M1}(\chi_{11} + \nu_{31}\chi_{22}); \qquad M_{22} = D_{M2}(\chi_{22} + \nu_{13}\chi_{11});\\
&\hat{D}_1 = d_{11}T_{11} + d_{13}T_{22} - \varepsilon_{11}\eta_1^2\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_1};\\
&\hat{D}_2 = d_{53}T_{12} - \varepsilon_{11}\eta_1^2\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha_2}; \qquad \hat{D}_z = -\varepsilon_{33}\eta_2^2\Phi,
\end{aligned} \tag{11}$$

де позначено:

$$\begin{aligned}
&D_{T1} = \frac{h}{s_{11}(1 - \nu_{13}\nu_{31})}; \qquad D_{T2} = \frac{h}{s_{33}(1 - \nu_{13}\nu_{31})};\\
&D_{M1} = \frac{h^3}{12s_{11}(1 - \nu_{13}\nu_{31})}; \quad D_{M2} = \frac{h^3}{12s_{33}(1 - \nu_{13}\nu_{31})};\\
&\eta_1^2 = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f^2(z)dz; \quad \eta_2^2 = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \left[f'(z)\right]^2 dz.
\end{aligned}$$

Перерізуючі сили знаходимо після інтегрування (9) і (10) з урахуванням (11):

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{2h}{s_{55}\eta_1^2}e_{1z} + \frac{2d_{53}}{s_{55}\eta_1^2}\Phi_0;\\
Q_2 &= \frac{2h}{s_{55}\eta_2^2}e_{2z}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Підставляючи (12) і (11) в систему (7) і замінюючи e_{ij}, χ_{ij} та e_j через переміщення та кути повороту, отримаємо рівняння руху, в яких визначальними функціями будуть переміщення, кути повороту та електростатичний потенціал. В ці рівняння увійдуть невизначені множники η_1^2 і η_2^2. Є два підходи при виборі величин коригуючих множників, аналогічні тим підходам, що обговорювались в [5]: або теоретично обгрунтовано задаючись видом функції $f(z)$, або шляхом порівняння дисперсійних співвідношень, отриманих за прикладною та тривимірною теоріями.

3 Висновок

На основі варіаційного принципу отримано систему диференціальних рівнянь, що описує поведінку поляризованої по меридіану п'єзокерамічної оболонки під дією заданих сил і зарядів, замкнену фізичними співвідношеннями. Для забезпечення єдиності розв'язку сформульовано та записано граничні умови.

References

[1] Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H. *Piezoelectric and piezomagnetic materials and their functions in transducers*. In: Mason W.P. (Ed.) Physical Acoustics, IA. Academic, New York, 1964.

[2] Pelech B.L. Theory of shells with shear rigidity. Naukova Dumka, Kyiv, 1973. (in Russian)

[3] Reissner E. *On variational theorem in elasticity*. J. Math. Phys. 1950, **29** (2), 52–56.

[4] Shulga N.A. *Thermoelasticity equilibrium equation of multilayer shallow shells with shear rigidity*. Resistance of materials and theory of structures 1982, **38**, 108–112. (in Russian)

[5] Volmyr A.S. Nonlinear dynamics of plates and shells. Nauka, Moscow, 1972. (in Russian)

Надійшло 13.03.2014

Lastivka I.O. *Variational inference of differential equations of vibrations of piezoceramic shell with meridional polarization*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 68–72.

A construction of one embodiment of refined theory of piezoceramic shell with the meridional polarization was proposed, a system of differential equations of membrane vibrations and the boundary conditions using the variational Reissner principle was obtained.

Key words and phrases: piezoceramic shell, meridional polarization, differential equations of vibrations, boundary conditions, variational principle.

Ластивка И.А. *Вариационный вывод дифференциальных уравнений колебаний пьезокерамической оболочки при меридиональной поляризации* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 68–72.

Предложено построение одного из вариантов уточненной теории пьезокерамической оболочки при ее меридиональной поляризации, получена система дифференциальных уравнений колебаний оболочки и граничные условия с использованием вариационного принципа Рейсснера.

Ключевые слова и фразы: пьезокерамическая оболочка, меридиональная поляризация, дифференциальные уравнения колебаний, граничные условия, вариационный принцип.