ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 73–78 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.73–78
doi:10.15330/cmp.6.1.73-78

Лебідь В.О.

СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПОВНОГО ГРАФА З НЕСКІНЧЕННИМИ ПРОМЕНЯМИ

У даній статті проведено детальний спектральний аналіз повного графа з нескінченними променями. Охарактеризовано спектр самоспряженого оператора, який породжений матрицею суміжності даного графа, побудовано спектральну міру, наведені у явній формі власні вектори та спектральний розклад за власними векторами.

Ключові слова і фрази: зліченний граф, матриця Якобі, абсолютно неперервний спектр, спектральний розклад, спектральна щільність.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: lebiduk@gmail.com

Вступ

Теорія графів виникла із конкретних прикладних задач у теорії інформаційних, комунікаційних, енергетичних, транспортних мереж, органічній хімії, квантовій механіціці та ін. Сучасна теорія графів є самостійним, актуальним розділом математики, яка розв'язує ряд теоретичних та прикладних задач, використовуючи і збагачуючи аналітичні, алгебраїчні, топологічні методи та методи функціонального аналізу, лінійної алгебри, теорії чисел та теорії функцій.

Простим неорієнтованим графом G називають пару (V, E), у якій V — деяка непорожня множина (множина вершин), а E — множина ребер, кожне з яких однозначно визначається парою вершин, які воно з'єднує. Геометрично вершини зображаються точками, а ребра — відрізками, що з'єднують відповідні вершини. З графом G однозначно пов'язана матриця суміжності $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, елементи якої a_{ij} рівні 1, якщо вершини з номерами i та j з'єднуються ребром, або 0, якщо таке ребро відсутнє.

У випадку зліченних графів матриця $A(G)$ породжує у гільбертовому просторі $l_2(V)$ самоспряжений оператор $\mathbb{A}$, спектр якого має дискретну $\sigma_p(G)$ та неперервну компоненту $\sigma_c(G)$, яка може бути абсолютно-неперервною $\sigma_{ac}(G)$ або навіть чисто сингулярною $\sigma_{cs}(G)$ (див. [6]). Під спектральним аналізом графа G розуміють спектральний аналіз оператора $\mathbb{A}$.

За останній час одержано чисельні результати про спектр зліченних графів, які знаходять застосування у теорії невід'ємних матриць, гармонічному аналізі дискретних груп, аналітичній теорії ймовірності тощо (див. [1], [4]).

УДК 517.983
2010 *Mathematics Subject Classification:* 05C50, 05C63.
Робота виконана в рамках проекту 03-01-12 "Обернені задачі в сучасній математичній фізиці" спільних проектів НАН України та Сибірського відділення РАН.

Постановка задачі

Нехай $K(n, \infty)$ — повний граф з n вершинами, до кожної вершини якого приєднано один нескінченний ланцюг (див. [5]). Матриця суміжності такого графа породжує обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{B}$ у гільбертовому просторі $l_2(V)$, де V — множина вершин графа $K(n, \infty)$. Оператор $\mathbb{B}$ діє на вектор $x = (x_i^j) \in l_2(V)$ так:

$$(\mathbb{B}x)_1^j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} x_1^k + x_2^j,\ (\mathbb{B}x)_i^j = x_{i-1}^j + x_{i+1}^j, \quad \text{для кожного } j = \overline{1,n},\ i \geq 2 \tag{1}$$

Тут компоненти векторів x та $\mathbb{B}x$ із простору $l_2(V)$, що відповідають i-й вершині на j-му промені, позначено нижнім індексом i та верхнім індексом j.

Зведення до якобієвих матриць

Теорема 1. *Повному графу $K(n, \infty)$ з n нескінченними променями відповідає обмежений самоспряжений оператор $\mathbb{B}$ виду* (1)*, який визначений на всьому просторі $l_2(V)$. Існує такий унітарний оператор $\mathfrak{U}$, що*

$$\mathfrak{U}\mathbb{B}\mathfrak{U}^{-1} = J_{n-1} \oplus \underbrace{J_{-1} \oplus \ldots \oplus J_{-1}}_{n-1},$$

де J_{n-1}, J_{-1} — матриці Якобі виду

$$J_{n-1} = \begin{pmatrix} n-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \text{ та } J_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай $\{e_i^j\}_{j=1, i\in\mathbb{N}}^n$ — стандартний базис у просторі $l_2(V)$, пов'язаний із вказаною нумерацією вершин V повного графа $K(n, \infty)$. Розглянемо дійсну унітарну матрицю $U = \|u_{ij}\|_{i,j=1}^n$, у якої перший рядок складається із чисел $\frac{1}{\sqrt{n}}$, тобто $u_{1j} = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad j = 1, \ldots n$. Оскільки матриця U дійсна і унітарна, то

$$\sum_{j=1}^{n} u_{kj} u_{mj} = \delta_{km},$$

де δ_{km} — символ Кронекера. Звідси випливає, що

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} = 0 \quad \text{при } i = 2, \ldots n.$$

Розглянемо у просторі $l_2(V)$ такий новий базис $\{\hat{e}_i^j\}_{j=1, i\in\mathbb{N}}^n$, що

$$\hat{e}_i^j = \sum_{k=1}^{n} u_{jk} e_i^k, \quad i \in \mathbb{N}, j = 1, 2, \ldots n.$$

Згідно з (1) оператор $\mathbb{B}$ діє на вихідний базис наступним чином:

$$\mathbb{B}e_1^j = \sum_{k=1, k\neq j}^{n} e_1^k + e_2^j,\ \mathbb{B}e_i^j = e_{i-1}^j + e_{i+1}^j \quad \text{для кожного } j = \overline{1,n} \text{ та } i \geq 2.$$

Враховуючи зв'язок між новим та вихідним базисами, маємо:

$$\mathbb{B}\widehat{e}_1^1 = (n-1)\widehat{e}_1^1 + \widehat{e}_2^1,\ \mathbb{B}\widehat{e}_i^1 = \widehat{e}_{i-1}^1 + \widehat{e}_{i+1}^1,$$

$$\mathbb{B}\widehat{e}_1^j = -\widehat{e}_1^j + \widehat{e}_2^j,\ \mathbb{B}\widehat{e}_i^j = \widehat{e}_{i-1}^j + \widehat{e}_{i+1}^j \text{ для кожного } j = \overline{2,n} \text{ та } i \geq 2.$$

Таким чином, підпростори H_j з базисом $\{\widehat{e}_1^j, \ldots, \widehat{e}_k^j, \ldots\}$ при кожному $j = \overline{1,n}$, ізоморфні $l_2(\mathbb{N})$, є інваріантними для оператора $\mathbb{B}$, який в H_1 зводиться до матриці Якобі J_{n-1}, а в підпросторах $H_2,\ H_3,\ \ldots, H_n$ — до матриці J_{-1}. Оператор $\mathfrak{U}$ у просторі $l_2(V)$, який переводить базис $\{e_i^j\}_{j=1, i\in\mathbb{N}}^n$ у базис $\{\widehat{e}_i^j\}_{j=1, i\in\mathbb{N}}^n$, є унітарним і задовольняє твердження теореми.

□

Власне спектральний аналіз

Таким чином, спектральний аналіз зіркового графа $K(n,\infty)$ зводиться до дослідження спектральних властивостей матриць Якобі J_{n-1}, J_{-1}, який можна одержати за алгоритмом, наведеним у роботах [2], [3].

Теорема 2. *Матриця Якобі J_{n-1} породжує у просторі l_2 обмежений самоспряжений оператор, спектр якого складається із абсолютно неперервної компоненти, що збігається із інтервалом $[-2,2]$, та при $n \geq 3$ ще із одного власного значення $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$, якому відповідає нормований власний вектор виду*

$$e = \frac{\sqrt{n(n-2)}}{n-1}(1, \mu, \mu^2, \mu^3, \ldots, \mu^{j-1}, \ldots),$$

де число $\mu = \frac{1}{n-1}$.

При цьому, кожному $\lambda \in [-2,2]$ відповідає узагальнений власний вектор

$$\varphi_\lambda = (P_0(\lambda), P_1(\lambda) - (n-1)P_0(\lambda), \ldots, P_{j-1}(\lambda) - (n-1)P_{j-2}(\lambda), \ldots), \tag{2}$$

де поліноми $P_k(\lambda)$ є поліномами степеня k від λ, що виражаються у вигляді $P_k(\lambda) = U_k(\frac{\lambda}{2})$ через поліноми Чебишева другого роду, де $U_k(z) = \frac{\sin((k+1)\arccos z)}{\sin(\arccos z)}$. Для поліномів $P_k(\lambda)$ вірне рекурентне співвідношення $P_{k+1}(\lambda) = \lambda P_k(\lambda) - P_{k-1}(\lambda)$ з початковими умовами $P_{-1}(\lambda) = 0,\ P_0(\lambda) = 1,\ P_1(\lambda) = \lambda$.

Справедливі розклад за приведеними власними функціями (2) *та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю $\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi((n-1)^2+1-(n-1)\lambda)}$ неперервного спектру. Тобто кожному вектору $x \in l_2$ відповідає його перетворення Фур'є $\widetilde{x} = \mathfrak{F}x$ за власними векторами e, φ_λ вигляду $\widetilde{x} = ((x,e)_{l_2}, \widetilde{x}(\lambda))$, де $\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda)_{l_2}$.*

Вектор $\widetilde{x}$ належить гільбертовому простору $\mathfrak{H} = E \oplus L_2([-2,2], \rho(\lambda)d\lambda)$, де E — евклідів простір, а $L_2([-2,2], \rho(\lambda)d\lambda)$ — простір функцій, квадратично інтегрованих на відрізку $[-2,2]$ за мірою $\rho(\lambda)d\lambda$.

Вірне обернене перетворення Фур'є, визначене на всьому $\mathfrak{H}$:

$$x = \mathfrak{F}^{-1}\widetilde{x}(\lambda) \equiv (x,e)e + \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi_\lambda \rho(\lambda)d\lambda. \tag{3}$$

Для довільних $x, y \in l_2$ справедлива рівність Парсеваля:

$$(x,y)_{l_2} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})_{\mathfrak{H}} \equiv (x,e)(y,e) + \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\widetilde{y}(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda. \tag{4}$$

Доведення. Матриця Якобі J_{n-1} породжує у просторі $l_2(\mathbb{N})$ обмежений самоспряжений оператор, який будемо позначати тією ж літерою J_{n-1}. Оператор J_{n-1} діє на вектор $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2(\mathbb{N})$ так:

$$J_{n-1}x = ((n-1)x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_{k-1} + x_{k+1}, \ldots).$$

Із вигляду оператора J_{n-1} випливає, що вектор e, що відповідає власному значенню $\lambda = \frac{(n-1)^2+1}{n-1}$, є його власним вектором, і для кожного $\lambda \in [-2, 2]$ функція φ_λ задовольняє рівність $J_{n-1}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

Легко перевірити, що $(e, \varphi_\lambda)_{l_2} = 0$. Вектор $x \in l_2(\mathbb{N})$ буде ортогональним до e тоді й тільки тоді, коли

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_{k+1} = 0 \tag{5}$$

Розглянемо перетворення Фур'є за власними векторами e, φ_λ. Враховуючи явний вигляд узагальненої власної функції φ_λ, для $x \in l_2(\mathbb{N})$ маємо

$$\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda)_{l_2} = \sum_{k=0}^{\infty} (x_{k+1} - (n-1)x_{k+2}) P_k(\lambda) \tag{6}$$

Рівність (6) можна розглядати як розклад функції $\widetilde{x}(\lambda)$ за ортонормованою системою поліномів $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L_2([-2, 2], \rho_0(\lambda)d(\lambda))$, де $\rho_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2}$. Тому

$$\int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda) P_k(\lambda) \rho_0(\lambda) d\lambda = x_{k+1} - (n-1)x_{k+2},\ k = 0, 1, 2 \ldots \tag{7}$$

Домножимо вираз (7) на μ^k і просумуємо за k. У випадку, коли $x \perp e$ і виконуються рівності (5), аналогічно, як у [2], із врахуванням факту, що функція $\frac{1}{1-\mu\lambda+\mu^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k P_k(\lambda)$ є твірною для системи поліномів $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$, отримуємо

$$x_{k+1} = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda) \varphi_{\lambda,k+1} \rho(\lambda) d\lambda,\ k = 0, 1, 2 \ldots \tag{8}$$

Таким чином, кожний вектор $x \in l_2(\mathbb{N})$, ортогональний до e, розкладається за узагальненими власними функціями φ_λ зі спектральною мірою $\rho(\lambda)d\lambda$, що є абсолютно неперервною відносно міри Лебега на інтервалі $[-2, 2]$. Тому спектр оператора J_{n-1} містить однократну абсолютно неперервну компоненту, що збігається з інтервалом $[-2, 2]$, та при $n \geq 3$ власне значення $\lambda = \frac{(n-1)^2+1}{n-1}$. Оскільки $e \perp \varphi_\lambda$, то для довільного $x \in l_2(\mathbb{N})$ вектор $y = x - (x, e)e$ ортогональний e та $\widetilde{y}(\lambda) = (x - (x, e)e, \varphi_\lambda) = \widetilde{x}(\lambda)$. Із вигляду виразу (8) маємо $y = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda) \varphi_\lambda \rho(\lambda) d\lambda$, що еквівалентно (3).

Рівність Парсеваля (4) отримуємо із рівності Парсеваля для векторів $x \perp e$ за узагальненими власними функціями φ_λ, оскільки система поліномів $\{\varphi_{\lambda,k}\}_{k=1}^{\infty}$ утворює ортонормований базис у просторі $L_2([-2, 2], \rho(\lambda)d(\lambda))$. □

Теорема 3. *Матриця Якобі J_{-1} породжує у просторі l_2 обмежений самоспряжений оператор, спектр якого чисто абсолютно неперервний і збігається із інтервалом $[-2, 2]$.*

Кожному $\lambda \in [-2, 2]$ відповідає узагальнений власний вектор

$$\varphi_\lambda = (P_0(\lambda), P_1(\lambda) + P_0(\lambda), P_2(\lambda) + P_1(\lambda), \ldots, P_{j-1}(\lambda) + P_{j-2}(\lambda), \ldots). \tag{9}$$

Справедливі розклад за приведеними власними функціями (9) *та рівність Парсеваля зі спектральною щільністю* $\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi(2+\lambda)}$ *неперервного спектру. Тобто кожному вектору* $x \in l_2$ *відповідає його перетворення Фур'є* $\widetilde{x} = \mathfrak{F}x$ *за власними функціями* φ_λ *вигляду* $\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda)_{l_2}$. *Вектор* $\widetilde{x}$ *належить гільбертовому простору* $L_2([-2,2], \rho(\lambda)d\lambda)$.

Вірне обернене перетворення Фур'є, визначене на всьому $\mathfrak{H}$ *:*

$$x = \mathfrak{F}^{-1}\widetilde{x}(\lambda) \equiv \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi_\lambda\rho(\lambda)d\lambda \tag{10}$$

Для довільних $x, y \in l_2$ *справедлива рівність Парсеваля:*

$$(x,y)_{l_2} = (\widetilde{x}, \widetilde{y})_{L_2} \equiv \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\widetilde{y}(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda \tag{11}$$

Доведення. Матриця Якобі J_{-1} породжує у просторі $l_2(\mathbb{N})$ обмежений самоспряжений оператор, який будемо позначати тією ж літерою J_{-1}. Оператор J_{-1} діє на вектор $x = (x_1, x_2, \ldots)$ з $l_2(\mathbb{N})$ так:

$$J_{-1}x = (-x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_{k-1} + x_{k+1}, \ldots)$$

Із вигляду оператора J_{-1} випливає, що для кожного $\lambda \in [-2,2]$ функція φ_λ задовольняє рівність $J_{-1}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$.

Розглянемо перетворення Фур'є за власними функціями φ_λ. Враховуючи явний вигляд узагальненої власної функції φ_λ, для $x \in l_2(\mathbb{N})$ маємо

$$\widetilde{x}(\lambda) = (x, \varphi_\lambda)_{l_2} = \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} + x_{k+2})P_k(\lambda) \tag{12}$$

Рівність (12) можна розглядати як розклад функції $\widetilde{x}(\lambda)$ за ортонормованою системою поліномів $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$ у просторі $L_2([-2,2], \rho_0(\lambda)d(\lambda))$, де $\rho_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-\lambda^2}$. Тому

$$\int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)P_k(\lambda)\rho_0(\lambda)d\lambda = x_{k+1} + x_{k+2}, k = 0, 1, 2 \ldots \tag{13}$$

Із загальної теорії якобієвих матриць випливає, що існує така щільність $\rho(\lambda)$, що

$$x_{k+1} = \int_{-2}^{2} \widetilde{x}(\lambda)\varphi_{\lambda,k+1}\rho(\lambda)d\lambda,\ k = 0, 1, 2 \ldots \tag{14}$$

Використовуючи метод математичної індукції, отримуємо вираз для оберненого перетворення Фур'є (10), та після підстановки рівності (14) у вираз (13) — вираз для щільності $\rho(\lambda) = \frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2\pi(2+\lambda)}$.

Рівність Парсеваля (11) отримуємо аналогічно, як у доведенні теореми 2. □

Висновок

Із теорем 1, 2, 3 випливає, що спектр зіркового графа $K(n, \infty)$ складається із n-кратної абсолютно неперервної компоненти, що збігається із інтервалом $[-2,2]$, а при $n \geq 3$ ще із одного власного значення $\lambda = \frac{(n-1)^2+1}{n-1}$.

Методи проведення спектрального аналізу повного графа з нескінченними променями, що викладені у даній роботі, дають змогу досліджувати спектральні властивості широкого класу зв'язних графів з нескінченними променями.

Автор висловлює щиру подяку Л.П. Нижнику та Ю.С. Самойленку за конструктивні зауваження.

References

[1] von Below J. *An index theory for uniformly locally finite graphs*. Linear Algebra Appl. 2009, **431** (1-2), 1–19. doi:10.1016/j.laa.2008.10.030

[2] Lebid V.O., Nizhnik L.P. *Spectral analysis of a star-graph with one infinite chain*. Sci. Notes NUKMA 2013, **139**, 18–22. (in Ukrainian)

[3] Lebid V.O., Nizhnik L.P. *Spectral analysis of locally finite graphs with one infinite chain*. Reports of NAS of Ukraine 2014, **3**, 29–35. (in Ukrainian)

[4] Mohar B. *The spectrum of an infinite graph*. Linear Algebra Appl. 1982, **48**, 245–256. doi:10.1016/0024-3795(82)90111-2

[5] Moskalyeva Yu.P., Samoilenko Yu.S. Introduction to spectral graph theory. Center for the Educational Literature, Kyiv, 2007. (in Russian)

[6] Simon B. Szego's Theorem and Its Descendants: Spectral Theory for L2 Perturbations of Orthogonal Polynomials. Princeton University Press, Princeton, NY, 2011.

Надійшло 17.03.2014

Lebid V.O. *Spectral analysis of complete graph with infinite chains*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 73–78.

In the paper the detailed spectral analysis of a complete graph with semibounded infinite chains is given. The spectrum of a self-adjoint operator which is generated by the adjacency matrix of the graph is defined, the spectral measure is constructed, eigenvectors and spectral expansion in eigenvectors are provided.

Key words and phrases: infinite graph, matrix Jacobi, absolutely continuous spectrum, spectral decomposition, spectral density.

Лебедь В.А. *Спектральный анализ полного графа с бесконечными лучами* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 73–78.

В данной статье проведен детальный спектральный анализ полного графа с бесконечными лучами. Охарактеризован спектр самосопряженного оператора, порожденного матрицой смежности такого графа, построена спектральная мера, приведены в явной форме собственные векторы и спектральное разложение по собственным векторам.

Ключевые слова и фразы: счетный граф, матрица Якоби, абсолютно непрерывный спектр, спектральное разложение, спектральная плотность.