

ЛОПУШАНСЬКИЙ А.О.<sup>1</sup>, ЛОПУШАНСЬКА Г.П.<sup>2</sup>

## ОБЕРНЕНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФУЗІЙНО-ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В ПРАВИХ ЧАСТИНАХ

Доведено однозначну розв'язність задач про визначення пари функцій: розв'язку  $u(x, t)$  першої крайової задачі для рівняння

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x) \cdot g(t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T),$$

з дробовою похідною  $u_t^{(\beta)}$  порядку  $\beta \in (0, 2)$ , узагальненими функціями в початкових умовах, а також невідомого неперервного коефіцієнта  $a(t) > 0, t \in [0, T]$  (або невідомої неперервної функції  $g(t)$ ) при відомих значеннях  $(a(t)u_x(\cdot, t), \varphi_0(\cdot))$  ( $(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot))$ ) відповідної узагальненої функції на заданій основній функції  $\varphi_0(x)$ .

*Ключові слова і фрази:* похідна дробового порядку, узагальнена функція, обернена крайова задача, вектор-функція Гріна, операторне рівняння.

<sup>1</sup> Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

<sup>2</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

### ВСТУП

Задача Коші та крайові задачі для рівняння дифузії чи дифузійно-хвильового рівняння з регуляризованою похідною дробового порядку [2], [4] вивчалися у багатьох працях [1], [2], [5], [6], [10]–[15], [20] та інших. Активно вивчаються в останні роки обернені крайові задачі для таких рівнянь (див. [3], [7], [8], [16], [17], [21] та бібліографія там).

У даній статті встановлюємо однозначну розв'язність двох обернених крайових задач для дифузійно-хвильового рівняння з заданими узагальненими функціями у правих частинах прямої задачі.

ЗАДАЧА 1 полягає в визначенні пари функцій  $(u, a)$ : розв'язку  $u$  першої крайової задачі

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x) \cdot g(t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

$$u_t(x, 0) = F_2(x), \quad x \in [0, l], \quad (4)$$

із заданими узагальненими функціями  $F_j, j = 0, 1, 2$ , неперервною  $g(t)$  (у правій частині рівняння (1) крапкою позначено прямий добуток узагальнених функцій), а також невідомого коефіцієнта  $a(t) > 0, t \in [0, T]$ , за додаткової умови

$$(a(t)u_x(x, t), \varphi_0(x)) = F_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

тобто задано значення  $F_3(t)$  узагальненої функції  $a(t)u_x(x, t)$  на деякій гладкій функції  $\varphi_0(x)$ ,  $x \in [0, l]$ .

Розглядаємо випадок  $\beta \in (0, 2)$ . Умова (4) відсутня у випадку  $\beta \in (0, 1]$ .

Зауважимо, що при  $\beta = 1$  та заданих регулярних функціях у правих частинах такого типу обернені крайові коефіцієнтні задачі з інтегровними умовами перевизначення вивчались, зокрема, у [9].

ЗАДАЧА 2 полягає в визначенні пари функцій  $(u, g)$ : розв'язку  $u$  першої крайової задачі (1)–(4) при заданих узагальнених функціях  $F_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , та невідомої неперервної функції  $g(t)$  за додаткової умови

$$(u(x, t), \varphi_0(x)) = F_4(t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

тобто задано значення  $F_4(t)$  узагальненої функції  $u(x, t)$  на деякій гладкій функції  $\varphi_0(x)$ ,  $x \in [0, l]$ .

Визначенню регулярної правої частини рівняння (1) при різних умовах перевизначення присвячено найбільше праць. Зокрема, у [7] встановлено однозначну розв'язність задачі про визначення розв'язку  $u$  задачі Коші для абстрактного рівняння у гільбертовому просторі  $X$  з дробовою похідною за часом порядку  $\beta \in (0, 1]$  та регулярної (залежної від часової змінної) правої частини цього рівняння за умови перевизначення  $(u, \varphi_0) = h$  ( $\varphi_0, h$  — задані), де під дужками розуміють скалярний добуток елементів гільбертового простору  $X$ .

## 1 ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ

Використовуємо наступні позначення:  $Q_0 = (0, l) \times (0, T]$ ;  $C_+[0, T]$  — клас неперервних на  $[0, T]$  та обмежених знизу додатним числом функцій;  $C_+^\infty[0, T] = C^\infty[0, T] \cap C_+[0, T]$ ;  $\mathfrak{D}(R^N)$  ( $N = 1, 2$ ),  $\mathfrak{D}(0, l)$ ,  $\mathfrak{D}[0, l]$  — простори нескінченно диференційовних функцій з компактними носіями відповідно в  $R^N$ ,  $(0, l)$ ,  $[0, l]$  ([18], с. 13);  $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0) = \{v \in C^\infty(\overline{Q}_0) : (\frac{\partial}{\partial t})^k v|_{t=T} = 0, k = 0, 1, \dots\}$ ;  $\mathfrak{D}'(R^N)$ ,  $\mathfrak{D}'(0, l)$ ,  $\mathfrak{D}'[0, l]$ ,  $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$  — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) відповідно на  $\mathfrak{D}(R^N)$ ,  $\mathfrak{D}(0, l)$ ,  $\mathfrak{D}[0, l]$ ,  $\mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$ ;  $(F, \varphi)$  — значення  $F \in \mathfrak{D}'(R^N)$  на основній функції  $\varphi \in \mathfrak{D}(R^N)$ , а також значення  $F \in \mathfrak{D}'(0, l)$  на  $\varphi \in \mathfrak{D}(0, l)$ ,  $F \in \mathfrak{D}'[0, l]$  на  $\varphi \in \mathfrak{D}[0, l]$ ,  $F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$  на  $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0)$ ;  $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0, T] = \{F \in \mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) : (F(x, \cdot), \varphi(x)) \in C[0, T] \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(0, l)\}$  — клас узагальнених функцій із  $\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0)$ , неперервних за змінною  $t \in [0, T]$  ([19]).

Позначаємо через  $\widehat{*}$  операцію згортки узагальненої функції  $g$  та основної функції  $\varphi$  ([18], с. 111):  $(g\widehat{*}\varphi)(x) = (g(\xi), \varphi(x + \xi))$ ; через  $*$  — операцію згортки узагальнених функцій  $f$  і  $g$ , тобто узагальнену функцію  $f * g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ :  $(f * g, \varphi) = (f, g\widehat{*}\varphi)$  для кожної основної функції  $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ ;  $f(x) \cdot g(t)$  — прямий добуток узагальнених функцій  $f, g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ , тобто узагальнену функцію  $f \cdot g \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^2)$ , визначену формулою  $(f \cdot g, \varphi) = (f(x), (g(t), \varphi(x, t)))$  для кожної основної функції  $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2)$ .

Зауважимо, що у випадку  $g \in L_1(0, T)$  маємо

$$(f \cdot g, \varphi) = \left( f(x), \int_0^T g(t) \varphi(x, t) dt \right) = \int_0^T g(t) (f(x), \varphi(x, t)) dt \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^2).$$

Використовуємо функцію  $f_\lambda \in \mathfrak{D}'_+(R) = \{f \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ при } t < 0\}$ :

$$f_\lambda(t) = \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \text{ при } \lambda > 0 \quad \text{і} \quad f_\lambda(t) = f'_{1+\lambda}(t) \text{ при } \lambda \leq 0,$$

де  $\Gamma(z)$  — гамма-функція,  $\theta(t)$  — одинична функція Хевісайда.

Правильні наступні співвідношення:

$$f_\lambda * f_\mu = f_{\lambda+\mu}, \quad f_\lambda \widehat{*} f_\mu = f_{\lambda+\mu}.$$

Нагадаємо, що похідну  $v_t^{(\beta)}(x, t)$  Рімана-Ліувілля функції  $v(x, t)$  порядку  $\beta > 0$  визначають формулою

$$v_t^{(\beta)}(x, t) = f_{-\beta}(t) * v(x, t),$$

регуляризовану похідну дробового порядку —

$$\begin{aligned} D_t^\beta v(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{v_\tau(x, \tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{v(x, \tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau - \frac{u(x, 0)}{t^\beta} \right] \\ &= v_t^{(\beta)}(x, t) - f_{1-\beta}(t)v(x, 0), \quad \beta \in (0, 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_t^\beta v(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^t \frac{v_{\tau\tau}(x, \tau)}{(t-\tau)^{\beta-1}} d\tau \\ &= v_t^{(\beta)}(x, t) - f_{1-\beta}(t)v(x, 0) - f_{2-\beta}(t)v_t(x, 0), \quad \beta \in (1, 2). \end{aligned}$$

Нехай  $C_{2,\beta}(Q_0) = \{v \in C(\overline{Q_0}) \mid v_{xx}, D_t^\beta v \in C(Q_0)\}$ .

Введемо оператори

$$L : \quad (Lv)(x, t) \equiv v_t^{(\beta)}(x, t) - a(t)v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_0}, \quad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q_0}),$$

$$L^{reg} : \quad (L^{reg}v)(x, t) \equiv D_t^\beta v(x, t) - a(t)v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_0}, \quad v \in C_{2,\beta}(Q_0),$$

$$\widehat{L} : \quad (\widehat{L}v)(x, t) \equiv f_{-\beta} \widehat{*} v(x, t) - a(t)v_{xx}(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_0}, \quad v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q_0})$$

та функційний простір  $X(\overline{Q_0}) = \{v \in \mathfrak{D}'(\overline{Q_0}) : v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, t \in [0, T]\}$ .

Для  $v \in C_{2,\beta}(Q_0)$ ,  $\psi \in X(\overline{Q_0})$  правильна формула Гріна

$$\begin{aligned} \int_{Q_0} v(y, \tau) (\widehat{L}\psi)(y, \tau) dy d\tau &= \int_{Q_0} (L^{reg}v)(y, \tau) \psi(y, \tau) dy d\tau \\ &+ \int_0^T a(\tau) [v(0, \tau) \psi_y(0, \tau) - v(l, \tau) \psi_y(l, \tau)] d\tau \\ &+ \int_0^l v(y, 0) dy \int_0^T f_{1-\beta}(\tau) \psi(y, \tau) d\tau + \int_0^l v_\tau(y, 0) dy \int_0^T f_{2-\beta}(\tau) \psi(y, \tau) d\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

**Припущення:**

$$(F0) \quad g \in C[0, T], F_j \in \mathfrak{D}'[0, l], j = 0, 1, 2,$$

$$(F1) \quad F_3 \in C[0, T] \text{ та } F_3(t) \neq 0 \text{ на } [0, T], \varphi_0 \in \mathfrak{D}(0, l).$$

**Означення 1.** Розв'язком задачі 1 за припущень  $(F0)$ ,  $(F1)$  називається пара функцій

$$(u, a) \in \mathfrak{M}_+ := (\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0, T]) \times C_+[0, T],$$

що задовольняє умову (5) та тотожність

$$(u, \widehat{L}\psi) = \int_0^T g(t)(F_0, \psi(\cdot, t))dt + \sum_{j=1}^2 (F_j, \int_0^T f_{j-\beta}(t)\psi(\cdot, t)dt) \quad \forall \psi \in X(\overline{Q}_0). \quad (8)$$

**Припущення:**

$$(F2) \quad a \in C_+[0, T], F_j \in \mathfrak{D}'[0, l], j = 0, 1, 2, F_4 \in C^1[0, T], \varphi_0 \in \mathfrak{D}(0, l), F_4(0) = (F_1, \varphi_0).$$

**Означення 2.** Розв'язком задачі 2 за припущення  $(F2)$  називається пара функцій

$$(u, g) \in \mathfrak{M} := (\mathfrak{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0, T]) \times C[0, T],$$

що задовольняє тотожність (8) та умову (6).

Розв'язність обох задач встановлюємо методом функції Гріна.

## 2 СПРЯЖЕНІ ОПЕРАТОРИ ГРІНА ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

**Означення 3.** Вектор-функція  $(G_0(x, t, y, \tau), G_1(x, t, y, \tau), G_2(x, t, y, \tau))$ , така що при достатньо гладких  $g_0, g_1, g_2$  функція

$$v(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G_0(x, t, y, \tau)g_0(y, \tau)dy + \sum_{j=1}^2 \int_0^l G_j(x, t, y, 0)g_j(y)dy, \quad (x, t) \in \overline{Q}_0, \quad (9)$$

є класичним (класу  $C_{2,\beta}(Q_0)$ ) розв'язком першої крайової задачі

$$D_t^\beta u - a(t)u_{xx} = g_0(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T], \quad (10)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad x \in [0, l], t \in [0, T], \quad (11)$$

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in [0, l], \quad (12)$$

(з відомою функцією  $a(t)$ ), називається вектор-функцією Гріна цієї задачі.

З означення випливає, що

$$(LG_0)(x, t, y, \tau) = \delta(x - y, t - \tau), \quad (x, t), (y, \tau) \in Q_0, \quad \text{де } \delta \text{ — дельта-функція Дірака,}$$

$$G_j(0, t, y, \tau) = G_j(l, t, y, \tau) = 0, \quad y \in (0, l), t, \tau \in (0, T], j = 0, 1, 2,$$

$$G_1(x, 0, y, 0) = \delta(x - y), \quad \frac{\partial}{\partial t} G_2(x, 0, y, 0) = \delta(x - y), \quad x, y \in (0, l).$$

Як при доведенні леми 1 із [12], показуємо, що

$$G_j(x, t, y, 0) = f_{j-\beta}(t) * G_0(x, t, y, 0), \quad (x, t) \in Q_0, \quad y \in (0, l), \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

У [13] доведено існування вектор-функції Гріна першої крайової задачі (10)–(12) при  $a \in C_+[0, T]$ .

Використовуємо далі позначення  $G_j(x, t, y, \tau, a)$  замість  $G_j(x, t, y, \tau)$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

Із принципу максимуму [14] випливає додатність функцій  $G_0(x, t, y, \tau, a)$ ,  $(x, t), (y, \tau) \in Q_0$  та  $G_j(x, t, y, 0, a)$ ,  $(x, t) \in Q_0$ ,  $y \in (0, l)$ ,  $t > 0$ ,  $j = 1, 2$ .

Оцінки компонент вектор-функції Гріна та їх похідних за змінною  $x$  наведено у [13].

Введемо оператори

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau) &= \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a)\varphi(x)dx, \\ (\widehat{G}_j\varphi)(y, t) &= \int_0^l G_j(x, t, y, 0, a)\varphi(x)dx, \quad j = 1, 2, \quad \varphi \in \mathcal{D}[0, l]. \end{aligned}$$

За лемою 1 із [13] при  $a \in C_+[0, T]$ ,  $\max_{t \in [0, T]} [a(t)]^{-1} \leq R$ , довільних  $0 \leq \tau < t \leq T$  правильні оцінки

$$\begin{aligned} |(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau)| &\leq c_0 \|\varphi\|_{C^k[0, l]} \cdot (t - \tau)^{\beta/2-1} [\sqrt{R} + (t - \tau)^{\beta/2}], \\ |(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_j\varphi)(y, t)| &\leq c_j \|\varphi\|_{C^k[0, l]} \cdot t^{j-1}, \quad j = 1, 2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{14}$$

а також

$$\begin{aligned} |(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau)| &\leq c_0^* \sqrt{R} \|\varphi\|_{C^{k-1}[0, l]} \cdot (t - \tau)^{\beta/2-1}, \\ |(\frac{\partial}{\partial y})^k(\widehat{G}_j\varphi)(y, t)| &\leq c_j^* \|\varphi\|_{C^{k-1}[0, l]} \cdot [\sqrt{R} t^{j-1-\beta/2} + t^{j-1}], \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{15}$$

$c_j, c_j^*$  ( $j = 0, 1, 2$ ) — додатні сталі.

### 3 РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ 1

Нехай виконуються припущення (F0), (F1) та наступне **припущення**

(F)  $\varphi_0(x) \geq 0$ ,  $x \in (0, l)$ ,  $g(t) \geq 0$ ,  $t \in [0, T]$ ,

а також нехай правильна одна з наступних умов:

1.  $(F_0(y), \varphi_y(y, t)) > 0$ ,  $(F_j(y), \varphi_y(y, t)) \geq 0$  для всіх  $t \in [0, T]$ , кожної невід'ємної  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q}_0)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $F_3(t) < 0$ ,  $t \in [0, T]$ ;
2.  $(F_0(y), \varphi_y(y, t)) < 0$ ,  $(F_j(y), \varphi_y(y, t)) \leq 0$  для всіх  $t \in [0, T]$ , кожної невід'ємної  $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{Q}_0)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $F_3(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$ .

Згідно з теоремою 3 із [13], за припущення (F0) при кожній відомій  $a \in C_+[0, T]$  існує єдиний розв'язок  $u \in \mathcal{D}'(\overline{Q}_0) \cap C[0, T]$  першої крайової задачі (1)–(4), визначений формулою

$$\begin{aligned} (u(\cdot, t), \varphi(\cdot)) &= \int_0^t g(\tau) (F_0(\cdot), (\widehat{G}_0\varphi)(\cdot, t, \tau)) d\tau + \sum_{j=1}^2 (F_j(\cdot), (\widehat{G}_j\varphi)(\cdot, t, \tau)) \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}[0, l], \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{16}$$

Підставимо функцію (16) в умову (5). Одержуємо

$$a(t) \left[ \int_0^t g(\tau)(F_0, \widehat{G}_0 \varphi'_0)(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{G}_j \varphi'_0)(t) \right] = -F_3(t), \quad t \in [0, T],$$

або

$$h(t) = - \left[ \int_0^t g(\tau)(F_0, \widehat{G}_0 \varphi'_0)(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{G}_j \varphi'_0)(t) \right] \cdot [F_3(t)]^{-1}, \quad t \in [0, T], \quad (17)$$

де  $h(t) = [a(t)]^{-1}$ .

За властивостями компонент вектор-функції Гріна

$$\begin{aligned} (\widehat{G}_0 \varphi'_0)(y, t, \tau) &= \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi'_0(x) dx = - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi_0(x) dx \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^l G_0(x, t, y, \tau, a) \varphi_0(x) dx = \frac{\partial}{\partial y} (\widehat{G}_0 \varphi_0)(y, t, \tau), \end{aligned}$$

так само  $(\widehat{G}_j \varphi'_0)(y, t) = \frac{\partial}{\partial y} (\widehat{G}_j \varphi_0)(y, t)$ ,  $j = 1, 2$ .

Тому з додатності функцій  $G_j(x, t, y, \tau, a)$ ,  $(x, t), (y, \tau) \in Q_0$ ,  $j = 0, 1, 2$ , при невід'ємній  $\varphi_0$  отримуємо  $\widehat{G}_j \varphi_0 \geq 0$ ,  $j = 0, 1, 2$ , а тоді, згідно з припущенням (F) (при  $\varphi = \widehat{G}_j \varphi_0$ ,  $j = 0, 1, 2$ ), права частина рівняння (17) додатна. Наслідком цього та теореми 3 із [13] є наступна теорема.

**Теорема 1.** *За припущень (F0), (F1), (F) пара функцій  $(u, a) \in \mathfrak{M}_+$  є розв'язком задачі 1 тоді і тільки тоді, коли додатна неперервна функція  $h(t) = [a(t)]^{-1}$ ,  $t \in [0, T]$  є розв'язком рівняння (17), функція  $u(x, t)$  визначена формулою (16).*

**Теорема 2.** *За припущень (F0), (F1), (F) розв'язок  $(u, a) \in \mathfrak{M}_+$  задачі 1 існує: функція  $u(x, t)$  визначена формулою (16),  $a(t) = [h(t)]^{-1}$ , де  $h(t)$  — розв'язок операторного рівняння (17).*

*Доведення.* Враховуючи наведені вище міркування, перетворення, теорему 1, для доведення існування розв'язку задачі залишається довести розв'язність рівняння (17) у класі додатних неперервних функцій  $h(t)$ ,  $t \in [0, T]$ . Доведемо спочатку його розв'язність у класі

$$M_R = \{h \in C[0, T] : \|h\|_{C[0, T]} \leq R\}.$$

Це — банахів простір, як замкнений підпростір банахового простору  $C[0, T]$  з нормою

$$\|h\|_{C[0, T]} = \max_{t \in [0, T]} |h(t)|.$$

Використаємо принцип Шаудера. На  $M_R$  розглянемо оператор

$$(Ph)(t) := - \left[ (F, \widehat{G}_0 \varphi'_0)(t) + \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{G}_j \varphi'_0)(t) \right] \cdot [F_3(t)]^{-1}, \quad t \in [0, T].$$

Узагальнені функції в обмеженій області мають скінченний порядок сингулярності [18]: існують такі цілі числа  $k_0, k_1, k_2$  та функції  $g_{0k}, g_{1k}, g_{2k} \in L_1(0, l)$ , що

$$(F_j(y), \varphi(y)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi(y) dy \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}[0, l], \quad j = 0, 1, 2. \quad (18)$$

Використовуючи зображення (18) та оцінки (14), (15), переконуємося, що для довільної  $\varphi \in \mathfrak{D}[0, l]$  функції

$$\int_0^t g(\tau) (F_0(y), (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau)) d\tau = \sum_{k=0}^{k_0} \int_0^t g(\tau) \left[ \int_0^l g_{0k}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau) dy \right] d\tau,$$

$$(F_j(y), (\widehat{G}_j\varphi)(y, t)) = \sum_{k=0}^{k_j} \int_0^l g_{jk}(y) \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k (\widehat{G}_j\varphi)(y, t) dy, \quad j = 1, 2,$$

неперервні на  $[0, T]$ , і при цьому правильні оцінки

$$\left| \int_0^t g(\tau) (F_0(y), (\widehat{G}_0\varphi)(y, t, \tau)) d\tau \right| \leq c_0 \|\varphi\|_{C[0, l]} \cdot \int_0^t |g(\tau)| \left[ \int_0^l |g_{00}(y)| dy \right] \left[ (t - \tau)^{\beta-1} + \sqrt{R}(t - \tau)^{\beta/2-1} \right] d\tau \quad (19)$$

$$+ c_0 \sqrt{R} \sum_{k=1}^{k_0} \|\varphi\|_{C^{k-1}[0, l]} \cdot \int_0^t |g(\tau)| \left[ \int_0^l |g_{0k}(y)| dy \right] (t - \tau)^{\beta/2-1} d\tau \leq b_0 t^{\beta/2} (t^{\beta/2} + \sqrt{R}),$$

$$|(F_j(y), (\widehat{G}_j\varphi)(y, t))| \leq c_j \sum_{k=0}^{k_j} \|\varphi\|_{C^k[0, l]} \cdot t^{j-1} \int_0^l |g_{jk}(y)| dy = b_j t^{j-1}, \quad j = 1, 2, \quad (20)$$

а також

$$\begin{aligned} |(F_j(y), (\widehat{G}_j\varphi)(y, t))| &\leq c_j^* \|\varphi\|_{C[0, l]} \cdot t^{j-1} \int_0^l |g_{j0}(y)| dy \\ &+ c_j^* \sum_{k=1}^{k_j} \|\varphi\|_{C^{k-1}[0, l]} \cdot [\sqrt{R} t^{j-1-\beta/2} + t^{j-1}] \int_0^l |g_{jk}(y)| dy \leq b_j^* [\sqrt{R} t^{j-1-\beta/2} + t^{j-1}], \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (21)$$

де  $b_j, b_j^*$  ( $j = 0, 1, 2$ ) — певні додатні сталі. Тоді при  $h \in M_R, t \in [0, T]$  одержуємо

$$|(Ph)(t)| \leq [b_0 \sqrt{R} t^{\beta/2} + b_0 t^\beta + b_1 + b_2 t] \cdot [F_3(t)]^{-1} \leq A \sqrt{R} + B,$$

де  $A = b_0 T^{\beta/2} / \inf_{t \in [0, T]} |F_3(t)|, B = [b_0 T^\beta + b_1 + b_2 T] / \inf_{t \in [0, T]} |F_3(t)|$ . За властивістю функції  $A \sqrt{R} + B$  при довільних додатних числах  $A, B$  існує таке  $R_0 = R_0(A, B) > 0$ , що для всіх  $R > R_0$  виконується нерівність  $A \sqrt{R} + B < R$ . Ми показали, що для всіх  $R > R_0, h \in M_R$

$$\|Ph\|_{C[0, T]} < R, \text{ а, отже, } P : M_R \rightarrow M_R.$$

Оператор  $P$  неперервний на  $M_R$ . Справді, при  $h_1, h_2 \in M_R$

$$\begin{aligned} & (Ph_1)(t) - (Ph_2)(t) \\ &= -[F_3(t)]^{-1} \left( F_0(y), \int_0^T g(\tau) \int_0^l [G_0(x, t, y, \tau, 1/h_1) - G_0(x, t, y, \tau, 1/h_2)] \varphi_0(x) dx d\tau \right) \\ & - \sum_{j=1}^2 [F_3(t)]^{-1} \left( F_j(y), \int_0^l [G_j(x, t, y, 1/h_1) - G_j(x, t, y, 1/h_2)] \varphi_0(x) dx \right). \end{aligned}$$

Використовуючи зображення (18) узагальнених функцій та властивості спряжених операторів Гріна, одержуємо, що значення  $|(Ph_1)(t) - (Ph_2)(t)|$  малі для всіх  $t \in [0, T]$  при малих значеннях  $|h_1(t) - h_2(t)|$ ,  $t \in [0, T]$ .

Подібно одержуємо, що оператор  $P$  компактний на  $M_R$ : вище було встановлено рівномірну обмеженість множини  $\{(Ph)(t), t \in [0, T]\}$  при  $h \in M_R$ , її одностайна неперервність впливає з рівномірної збіжності інтегралів у виразі  $(Ph)(t + \Delta t) - (Ph)(t)$  при  $h \in M_R$ , якщо використати формули (18), оцінки (14) та наслідок 1 із [13], за яким

$$|G_i(x, t + \Delta t, y, \tau, a) - G_i(x, t, y, \tau, a)| \leq M_i(x, t, y, \tau, a) |\Delta t|^\gamma, \quad (x, t), (y, \tau) \in \bar{Q}_0,$$

де  $0 < \gamma < 1$ , невід'ємні функції  $M_i(x, t, y, \tau, a)$  мають такі ж оцінки, як  $G_i(x, t, y, \tau, a)$ ,  $i = 0, 1, 2$  відповідно із заміною  $\beta$  на  $\beta - \gamma$ .

Було показано неперервність правої частини в (17) для всіх  $t \in [0, T]$ . Також із оцінок (14) та додатності функцій  $G_j(x, t, y, \tau, 1/h)$ ,  $(x, t) \in Q_0$ ,  $y \in (0, l)$ ,  $0 \leq \tau < t \leq T$  випливає, що за умов (F) функції  $\int_0^T g(\tau) (F_0, \hat{G}_0 \varphi'_0) d\tau$ ,  $(F_j, \hat{G}_j \varphi'_0)$ ,  $j = 1, 2$ , та  $-F_3(t)$  одного знаку для всіх  $t \in [0, T]$ , обидва множники у (17) відмінні від нуля. Звідси одержуємо, що  $(Ph)(t) > 0$  для всіх  $t \in [0, T]$ ,  $h \in M_R$ . Отже, враховуючи рівняння (17), одержуємо додатність його розв'язку  $h(t)$ .  $\square$

**Теорема 3.** За умови (F1) розв'язок  $(u, a) \in \mathfrak{M}_+$  задачі 1 єдиний.

*Доведення.* Якщо  $(u_1, a_1), (u_2, a_2) \in \mathfrak{M}_+$  — два розв'язки задачі,  $v = u_1 - u_2$ ,  $a = a_1 - a_2$ , то

$$v_t^{(\beta)} - a_1(t) v_{xx} = a(t) u_{2xx}, \quad (x, t) \in Q_0, \quad (22)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad v|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l], \quad (23)$$

$$a_1 v = a_1 v_1 - a_1 v_2 = a_1 v_1 - a_2 v_2 - (a_1 - a_2) v,$$

$$\begin{aligned} a_1(t) (v_x(x, t), \varphi_0(x)) &= -a_1(t) (v(x, t), \varphi'_0(x)) = \frac{a(t)}{a_2(t)} (a_2(t) v_2(x, t), \varphi'_0(x)) \\ &= -\frac{a(t)}{a_2(t)} (a_2(t) v_{2x}(x, t), \varphi_0(x)) = -\frac{a(t) F_3(t)}{a_2(t)}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

а, отже,

$$a_1(t) (v(x, t), \varphi'_0(x)) = \frac{a(t) F_3(t)}{a_2(t)}, \quad t \in [0, T] \quad \forall \varphi_0 \in \mathfrak{D}(0, l). \quad (24)$$



За теоремою 3 із [13] для функції  $v$ , як розв'язку першої крайової задачі (22), (23), правильне зображення

$$(v(\cdot, t), \varphi(\cdot)) = \int_0^t a(\tau) \left( u_{2yy}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi)(\cdot, t, \tau) \right) d\tau \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}[0, l], \quad t \in [0, T]. \quad (25)$$

Підставляючи функцію (25) в умову (24), одержуємо

$$a_1(t) \int_0^t a(\tau) \left( u_{2yy}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi'_0)(\cdot, t, \tau) \right) d\tau = \frac{a(t)F_3(t)}{a_2(t)},$$

тобто

$$a(t) - \int_0^t a(\tau) \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)} \cdot \left( u_{2yy}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi'_0)(\cdot, t, \tau) \right) d\tau = 0, \quad t \in [0, T], \quad (26)$$

де в підінтегральному виразі є значення узагальненої функції  $u_{2yy}(\cdot, \tau)$  на  $(\widehat{G}_0 \varphi'_0)(\cdot, t, \tau)$  для фіксованих  $t, \tau \in [0, T]$ .

За теоремою 3 та наслідком 2 із [13]  $u_2(y, \tau)$  та  $u_{2yy}(y, \tau)$  — неперервні узагальнені функції змінної  $\tau$ . Як узагальнена функція в обмеженій області  $\overline{Q}_0$ ,  $u_{2yy}(y, \tau)$  має скінченний порядок  $s$  та  $s$ -сингулярності. Тому правильне зображення вигляду (18)

$$(u_{2yy}(y, \tau), \varphi(y)) = \sum_{k=0}^p \int_0^l r_k(y, \tau) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \varphi(y) dy \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}[0, l],$$

де  $r_k \in C(\overline{Q}_0)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p$ , звідки ядро інтегрального рівняння (26)  $K(t, \tau) = \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)} \cdot \left( u_{2yy}(\cdot, \tau), (\widehat{G}_0 \varphi'_0)(\cdot, t, \tau) \right) = \frac{a_1(t)a_2(t)}{F_3(t)} \cdot \sum_{k=0}^p \int_0^l r_k(y, \tau) \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^k (\widehat{G}_0 \varphi'_0)(\cdot, t, \tau) dy$  на підставі (14) має оцінку  $|K(t, \tau)| \leq C(t - \tau)^{\beta/2 - 1}$ ,  $C$  — додатна стала. Ми одержали, що функція  $a(t)$  задовольняє лінійне однорідне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду з інтегровним ядром, яке однозначно розв'язне. Отже,  $a(t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ . Тоді з (25) одержуємо  $v(x, t) = 0$ ,  $(x, t) \in \overline{Q}_0$ .  $\square$

*Зауваження.* З доведення теореми 2 випливає існування розв'язку задачі (1)–(5) і тоді, коли  $F_0(x) \equiv 0$  на  $[0, l]$ , але хоч одна з функцій  $F_j \in \mathfrak{D}'[0, l]$ ,  $j = 1, 2$ , нетривіальна та має порядок сингулярності  $s(F_j) \geq 1$ , однак у випадку  $s(F_1) \geq 1$  та регулярних або тривіальних  $F_0, F_2$  у припущенні (F1) треба вважати  $F_3 \in C_{\beta/2}[0, T] = \{v \in C(0, T] | t^{\beta/2} v \in C[0, T], \inf_{t \in (0, T]} t^{\beta/2} |v(t)| > 0\}$ , оскільки тепер замість (20) при  $j = 1$  потрібно використовувати оцінку (21).

За припущення  $F_3 \in C_{\beta/2}(0, T]$  також одержуємо єдиність розв'язку цієї задачі.

З доведення теореми 2 бачимо, що достатньо вважати  $\varphi_0 \in C_0^m(0, l)$ , де  $m = \max_{j=0,1,2} s(F_j)$ .

#### 4 РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ 2

Підставимо функцію (16) (розв'язок першої крайової задачі (1)–(4)) в умову (6). Маємо

$$\int_0^t (F_0, \widehat{G}_0 \varphi_0)(t, \tau) g(\tau) d\tau = F_4(t) - \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{G}_j \varphi_0)(t), \quad t \in [0, T]. \quad (27)$$

Ми одержали лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду, ядро якого  $K_0(t, \tau) = (F_0, \widehat{G}_0 \varphi_0)(t, \tau)$ , згідно з (19), має оцінку  $|K_0(t, \tau)| \leq C(t - \tau)^{\beta/2-1}$ ,  $C$  — додатна стала. Умова  $F_4(0) = \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{G}_j \varphi_0)(0) = (F_1, \varphi_0)$  є необхідною умовою розв'язності рівняння (27) у  $C[0, T]$ . Подамо рівняння (27) у вигляді

$$f_{1-\beta/2}(t) * \int_0^t (F_0, \widehat{G}_0 \varphi_0)(t, \tau) g(\tau) d\tau = g_4(t),$$

де  $g_4(t) = f_{1-\beta/2}(t) * [F_4(t) - \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{G}_j \varphi_0)(t)]$ . Після перетворень одержуємо рівнозначне рівнянню (27) лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду

$$\int_0^t K_1(t, \tau) g(\tau) d\tau = g_4(t), \quad (28)$$

ядро якого  $K_1(t, \tau) = f_{1-\beta/2}(t - \tau) * (F_0, \widehat{G}_0 \varphi_0)(t - \tau, \tau)$  неперервне та має, згідно з (19), оцінку

$$|K_1(t, \tau)| \leq \widehat{C} f_{1-\beta/2}(t - \tau) * f_{\beta/2}(t - \tau) = \widehat{C} f_1(t - \tau),$$

$\widehat{C}$  — додатна стала. При неперервній диференційовності правої частини  $g_4(t)$  матимемо єдиний неперервний розв'язок рівняння (28). Із одержаних у розділі 2 оцінок (20) випливає, що

$$|f_{1-\beta/2}(t) * (F_j, \widehat{G}_j \varphi_0)(t)| \leq P_j t^{-\beta/2+j}, \quad P_j = \text{const} > 0, \quad j = 1, 2,$$

та  $f_{1-\beta/2} * (F_j, \widehat{G}_j \varphi_0) \in C^1[0, T]$ . Тоді за умови  $f_{1-\beta/2} * F_4 \in C^1[0, T]$  (яка виконується при  $F_4 \in C^1[0, T]$ ) одержуємо розв'язність рівняння (28) у класі неперервних функцій на  $[0, T]$ . Ми довели наступну теорему.

**Теорема 4.** За припущення (F2) існує розв'язок  $(u, g) \in \mathfrak{M}$  задачі 2: функція  $u$  задана формулою (16),  $g(t)$  — розв'язок інтегрального рівняння (27), рівнозначного рівнянню

$$\int_0^t f_{1-\beta/2}(t - \tau) * (F_0, \widehat{G}_0 \varphi_0)(t - \tau, \tau) g(\tau) d\tau = f_{1-\beta/2}(t) * [F_4(t) - \sum_{j=1}^2 (F_j, \widehat{G}_j \varphi_0)(t)], \quad t \in [0, T].$$

**Теорема 5.** Розв'язок  $(u, g) \in \mathfrak{M}$  задачі 2 єдиний.

*Доведення.* Якщо  $(u_1, g_1), (u_2, g_2) \in \mathfrak{M}$  — два розв'язки задачі,  $v = u_1 - u_2, g = g_1 - g_2$ , то

$$v_t^{(\beta)} - a(t)v_{xx} = F_0(x) \cdot (g_1(t) - g_2(t)), \quad (x, t) \in Q_0, \quad (29)$$

$$v|_{Q_1} = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad (30)$$

$$(v(x, t), \varphi_0(x)) = 0, \quad t \in [0, T] \quad (31)$$

та для функції  $v$ , як розв'язку першої крайової задачі (29)–(30), правильне зображення

$$(v, \varphi) = \int_0^t (F_0, \widehat{G}_0 \varphi)(t, \tau) (g_1(\tau) - g_2(\tau)) d\tau, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q}_0). \quad (32)$$

Підставляючи функцію (32) в умову (31), одержуємо

$$\int_0^t (F_0, \widehat{G}_0 \varphi_0)(t, \tau) (g_1(\tau) - g_2(\tau)) d\tau = 0.$$

Це однорідне лінійне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду відносно функції  $z = g_1 - g_2$ . При доведенні попередньої теореми було показано, що воно рівнозначне лінійному однорідному інтегральному рівнянню Вольтерри першого роду з неперервним ядром, а тому  $z(t) = 0, t \in [0, T]$ . Тоді з (32) одержуємо  $v(x, t) = 0, (x, t) \in \overline{Q}_0$ .  $\square$

*Зауваження.* Розглянуто задачі в одновимірному просторовому випадку. Результати поширюються на випадок  $Q_0 = \Omega \times (0, T]$ , де  $\Omega$  — обмежена область в  $\mathbb{R}^N, N \geq 2$ .

#### REFERENCES

- [1] Anh V.V., Leonenko N.N. *Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas*. J. Stat. Phys. 2001, **104** (5/6), 1349–1387.
- [2] Caputo M. *Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent, II*. Geofis. J. R. Astr. Soc. 1967, **13**, 529–539.
- [3] Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T. *Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation*. Inverse problems 2009, **25**, 1–16.
- [4] Djrbashian M.M. *Integral transformations and representations of functions in complex domain*. Nauka, Moscow, 1999. (in Russian)
- [5] Duan Jun-Sheng. *Time- and space-fractional partial differential equations*. J. Math. Phys. 2005, **46** (1), 13504–13511.
- [6] Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type*. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2004.
- [7] El-Borai M. M. *On the solvability of an inverse fractional abstract Cauchy problem*. Intern. J. Research Rev. Appl. Sci. 2010, **4**, 411–415.
- [8] Hatano Y., Nakagawa J., Wang Sh., Yamamoto M. *Determination of order in fractional diffusion equation*. J. Math. Ind. 2013, **5A**, 51–57.
- [9] Ivanchov M. *Inverse problems for equations of parabolic type*. In: Math. Studies, Monograph Ser., 10, VNTL Publ., Lviv, 2003.
- [10] Kochubei A.N. *Fractional-order diffusion*. Differential Equations 1990, **26**, 485–492.
- [11] Kochubei A.N., Eidelman S.D. *Equations of one-dimensional fractional-order diffusion*. Reports NAS of Ukraine 2002, (12), 11–16. (in Ukrainian)
- [12] Lopushanska H.P., Lopushanskyj A.O. *Space-time fractional Cauchy problem in spaces of generalized functions*. Ukr. Math. J. 2013 **64** (8), 1215–1230. doi:10.1007/s11253-013-0711-z (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 2012, **64** (8), 1067–1080. (in Ukrainian))
- [13] Lopushanskyj A.O. *Regularity of the solutions of the boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides*. Carpathian Math. Publ. 2013, **5** (2), 279–289. doi:10.15330/cmp.5.2.279-289 (in Ukrainian)
- [14] Luchko Yu. *Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order*. Fract. Calc. Appl. Anal. 2009, **12**, 409–422.
- [15] Meerschaert M.M., Nane Erkan, Vallaisamy P. *Fractional Cauchy problems on bounded domains*. Ann. Probab. 2009, **37**, 979–1007.

- [16] Nakagawa J., Sakamoto K., Yamamoto M. *Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equation – new mathematical aspects motivated by industrial collaboration*. J. Math. Ind. 2010, **2A**, 99–108.
- [17] Rundell W., Xu X., Zuo L. *The determination of an unknown boundary condition in fractional diffusion equation*. Appl. Anal. 2012, **1**, 1–16.
- [18] Shilov G.E. *Mathimatical Analysis. Second special course*. Nauka, Moscow, 1965. (in Russian)
- [19] Vladimirov V.S. *Equations of Mathematical Physics*. Marcel Dekker, New York, 1971. (translation of Nauka, Moscow, 1967. (in Russian))
- [20] Voroshylov A.A., Kilbas A.A. *Conditions of the existence of classical solution of the Cauchy problem for diffusion-wave equation with Caputo partial derivative*. Dokl. Ak. Nauk 2007, **414** (4), 1–4. (in Russian)
- [21] Zhang Y., Xu X. *Inverse source problem for a fractional diffusion equation*. Inverse problems 2011, **27**, 1–12.

Надійшло 18.09.2013

---

Lopushanskyj A., Lopushanska H. *Inverse boundary value problems for diffusion-wave equation with generalized functions in right-hand sides*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 79–90.

We prove the unique solvability of the problem on determination of the solution  $u(x, t)$  of the first boundary value problem for equation

$$u_t^{(\beta)} - a(t)\Delta u = F_0(x) \cdot g(t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T),$$

with fractional derivative  $u_t^{(\beta)}$  of the order  $\beta \in (0, 2)$ , generalized functions in initial conditions, and also determination of unknown continuous coefficient  $a(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$  (or unknown continuous function  $g(t)$ ) under given the values  $(a(t)u_x(\cdot, t), \varphi_0(\cdot))$  ( $(u(\cdot, t), \varphi_0(\cdot))$ ), respectively) of according generalized function onto some test function  $\varphi_0(x)$ .

*Key words and phrases:* fractional derivative, inverse boundary value problem, Green vector-function, operator equation.

Лопушанський А.О., Лопушанська Г.П. *Обратные краевые задачи для диффузионно-волнового уравнения с обобщенными функциями в правых частях* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 79–90.

Доказана однозначная разрешимость задач об определении решения  $u(x, t)$  первой краевой задачи для уравнения

$$u_t^{(\beta)} - a(t)u_{xx} = F_0(x) \cdot g(t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T),$$

с дробной производной  $u_t^{(\beta)}$  порядка  $\beta \in (0, 2)$ , обобщенными функциями в начальных условиях, а также неизвестного непрерывного коэффициента  $a(t) > 0$ ,  $t \in [0, T]$  (или неизвестной непрерывной функции  $g(t)$ ) при дополнительно заданных значениях  $(a(t)u_x(x, t), \varphi_0(x))$  ( $(u(x, t), \varphi_0(x))$ ) соответствующей обобщенной функции на некоторой основной функции  $\varphi_0(x)$ .

*Ключевые слова и фразы:* производная дробного порядка, обобщенная функция, обратная краевая задача, вектор-функция Грина, операторное уравнение.