ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 91–95 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.91–95
doi:10.15330/cmp.6.1.91-95

Лукашенко М.П.

КІЛЬЦЯ З НІЛЬПОТЕТНИМИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯМИ ІНДЕКСІВ ≤ 2

Встановлено, що в напівпервинному кільці всі диференціювання (відповідно внутрішні диференціювання) нільпотентні тоді і тільки тоді, коли воно диференційно тривіальне (відповідно комутативне). Радикал Джекобсона кільця з нільпотентними диференціюваннями індексів ≤ 2 містить всі нільпотентні елементи кільця.

Ключові слова і фрази: диференціювання, напівпервинне кільце.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна
E-mail: bilochka.90@mail.ru

1 Вступ

Нехай надалі R — асоціативне кільце з одиницею 1. Відображення $d : R \to R$ називається *диференціюванням* кільця R, якщо

$$d(a+b) = d(a) + d(b) \quad \text{та} \quad d(ab) = d(a)b + ad(b)$$

для будь-яких $a, b \in R$. Множину всіх диференціювань кільця будемо позначати символом $DerR$. Зрозуміло, що нульове відображення

$$0_R : R \ni r \mapsto 0 \in R$$

є диференціюванням, тобто $0_R \in DerR$. Множина $DerR$ — кільце Лі стосовно операцій поточкового додавання $'' + ''$ та поточкового множення Лі $''[-,-]''$. Якщо $DerR = \{0_R\}$, то кільце R будемо називати диференційно тривіальним [1]. Якщо $a, x \in R$, то правило

$$\partial_a(x) = ax - xa = [a, x]$$

визначає диференціювання кільця R, яке прийнято називати *внутрішнім* диференціюванням R, породженим елементом a.

Низка робіт присвячена дослідженню різних аспектів нільпотентності, пов'язаних з диференціюваннями (див. [4], [7]). Нагадаємо, що диференціювання $d \in DerR$ називається *нільпотентним*, якщо $d^n = 0_R$ для деякого додатнього цілого числа n. Найменше таке n прийнято називати *індексом нільпотентності* диференціювання d.

Нами встановлено такі результати.

Твердження 1. *Нехай R — кільце вільне від 2-скруту, всі диференціювання якого нільпотентні індексу нільпотентності ≤ 2. Тоді:*

УДК 512.4
2010 *Mathematics Subject Classification:* 16N60, 16W25.

(*i*) *всі його нільпотентні елементи містяться в радикалі Джекобсона $J(R)$,*

(*ii*) *якщо $J(R) = 0$, то R диференційно тривіальне.*

Нагадаємо, що кільце R називається *первинним*, якщо для будь-яких $a, b \in R$ справджується імплікація

$$aRb = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ або } b = 0.$$

Кільце R називається *напівпервинним*, якщо воно не містить жодного ненульового нільпотентного ідеала [6]. Нехай n — додатне ціле число. Кільце R називається *вільним від n-скруту*, якщо для кожного $x \in R$ справджується імплікація

$$nx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Теорема 1. *Нехай R — напівпервинне кільце. Якщо всі диференціювання (відповідно внутрішні диференціювання) кільця R нільпотентні, то R диференційно тривіальне (відповідно комутативне).*

Надалі в роботі: p — просте число; $[A, B] = \{ab - ba | a \in A, b \in B\}$ — взаємний комутант підмножин $A, B \subseteq R$; $C(R)$ — комутаторний ідеал кільця. Інші позначення і факти можна знайти в [5] і [6].

2 Елементарні властивості

Лема 1. *Нехай R — кільце, $d \in DerR$. Якщо $d^2 = 0_R$, то $2d(x)d(y) = 0$ для будь-яких $x, y \in R$.*

Доведення. Справді, для довільних $x, y \in R$ встановлюємо

$$0 = d^2(xy) = d(d(x)y + xd(y)) = d^2(x)y + d(x)d(y) + d(x)d(y) + xd^2(y) = 2d(x)d(y).$$

□

Лема 2. *Нехай R — кільце, всі диференціювання якого нільпотентні індексів ≤ 2, $d, \delta \in DerR$ та $a \in R$. Тоді:*

(*i*) $d\delta = -\delta d$,

(*ii*) *якщо* $2[R, R] = 0$, *то* $d(R) \subseteq Z(R)$,

(*iii*) $[a, d(a)] = 0$,

(*iv*) $d(e) = 0$ *для будь-якого ідемпотента* $e \in R$ *(а тому кожен ідемпотент є центральним в R),*

(*v*) *кожен R-підмодуль A із $DerR$ — ідеал кільця Лі $DerR$,*

(*vi*) $\delta(Z(R))d(R) = 0$,

(*vii*) $3[R, d(R)] = 0$, $[R, d(R)]^2 = 0$ *та* $3d([R, R]) = 0$,

(*viii*) $[d(R), d(R)] = 0$,

(ix) *якщо R — комутативне кільце, то* $(ad(a))^2 = 0$.

Доведення. Нехай всюди нижче $x, a \in R$.

(i) Знаходимо, що

$$0 = (d+\delta)^2(x) = (d+\delta)(d(x)+\delta(x))$$
$$= d^2(x) + (d\delta)(x) + (\delta d)(x) + \delta^2(x) = (d\delta)(x) + (\delta d)(x),$$

тобто $d\delta = -\delta d$.

(ii) Із рівностей

$$[x, d(a)] = xd(a) - d(a)x = \partial_x(d(a)) = -d(\partial_x(a)) = -d(xa - ax)$$
$$= -d(x)a - xd(a) + d(a)x + ad(x)$$

випливає, що

$$2[x, d(a)] = 2(xd(a) - d(a)x) = ad(x) - d(x)a. \tag{1}$$

Якщо $2[R, R] = 0$, то $d(x) \in Z(R)$.

(iii) Покладаючи в (1) $x = a$, отримуємо, що $[a, d(a)] = 0$.

(iv) Оскільки $d(e) = d(e^2) = d(e)e + ed(e)$, то $ed(e)e = 0$. Застосовуючи (iii), робимо висновок, що $d(e) = 0$.

(v) Нехай $\theta \in A$. Позаяк $[\theta, \delta] = 2\theta\delta$, то

$$[\theta, \delta](R) \subseteq 2\theta(\delta(R)) \subseteq 2\theta(R) \subseteq \theta(R),$$

тобто

$$[\theta, \delta] \subseteq R\theta \subseteq A.$$

(vi) Нехай $c \in Z(R)$. Тоді композиція

$$d(c\delta) = -(c\delta)d$$

кососиметрична, а, отже, для будь-якого елемента $x \in R$ маємо

$$d(c)\delta(x) + c(d\delta)(x) = -c(\delta d)(x) = c(d\delta)(x).$$

Як наслідок,

$$d(c)\delta(x) = 0.$$

(vii) З огляду на властивість (ii),

$$-d(x)a - xd(a) + d(a)x + ad(x) = -d(xa - ax) = -(d\partial_x)(a) = (\partial_x d)(a) = xd(a) - d(a)x,$$

а тому

$$2(xd(a) - d(a)x) = ad(x) - d(x)a. \tag{2}$$

Подібним чином до (1), отримуємо

$$xd(a) - d(a)x = 2(ad(x) - d(x)a). \tag{3}$$

Тоді з (2) та (3) випливає, що

$$3[a, d(x)] = 0. \tag{4}$$

Сумуючи (2) та (3) отримуємо, що $3[x, d(a)] = 3[a, d(x)]$, а звідси $3d([x, a]) = 0$. За лемою 1, $2[R, d(R)]^2 = 0$, звідки на основі (4) отримуємо стверджуване.

$(viii)$ Справді,

$$0 = -(d^2\partial_x)(a) = d(\partial_x(d(a))) = d(xd(a) - d(a)x)$$
$$= d(x)d(a) + xd^2(a) - d^2(a)x - d(a)d(x) = [d(x), d(a)].$$

(ix) Якщо R — комутативне кільце, то $ad \in DerR$, і залишається застосувати властивість (vi). □

3 Доведення

Наслідок 1. *Нехай R — кільце, всі диференціювання якого нільпотентні індексів нільпотентності ≤ 2, та $d, \delta \in DerR$. Тоді:*

(i) *якщо R вільне від 2-скруту, то композиція $d\delta \in DerR$,*

(ii) *якщо R вільне від 3-скруту, то $d(R) \subseteq Z(R), d([R,R]) = 0$ та група одиниць $U(R)$ нільпотентна ступеня ≤ 2.*

Доведення. (i) Оскільки

$$d\delta + \delta d = d^2 + d\delta + \delta d + \delta^2 = (d+\delta)^2 = 0 \in DerR$$

та $d\delta - \delta d = [d, \delta] \in DerR$, то $2d\delta \in DerR$, а тому $d\delta$ — диференціювання.

(ii) Випливає з леми 2 (vii) та теореми з [3]. □

Доведення твердження 1.

Доведення. (i) Нехай $x \in R$ та $x^2 = 0$. Тоді для будь-якого елемента $a \in R$ маємо

$$0 = \partial_x^2(a) = \partial_x(xa - ax) = x(xa - ax) - (xa - ax)x = x^2a - xax - xax + ax^2 = -2xax. \quad (5)$$

З огляду на те, що R вільне від 2-скруту, отримуємо $xaxt = 0$ для будь-якого $t \in R$, а тому $(xR)^2 = 0$. Це означає, що $x \in xR \subseteq J(R)$.

(ii) Випливає з огляду на лему 1. □

Нехай надалі $\mathbb{P}(R)$ — це перетин всіх первинних ідеалів кільця R. Як відомо (див. [6]), $\mathbb{P}(R)$ — ніль-ідеал в R.

Лема 3 (див. [6], §3.2, Твердження 2)**.** *В напівпервинному кільці R первинний радикал $\mathbb{P}(R) = 0$ нульовий.*

Наслідок 2. *Якщо R — кільце, всі внутрішні диференціювання якого нільпотентні, то*

$$C(R) \subseteq \mathbb{P}(R) \cap J(R)$$

Доведення. Якщо $x \in R$ та P — первинний ідеал в R, то

$$\partial_{\bar{x}}^n = \bar{0}$$

для $\bar{x} = x + P \in R/P$ та деякого цілого додатнього числа n. За теоремою 3 із [2], фактор-кільце R/P комутативне, а тому $C(R) \subseteq \mathbb{P}(R)$. □

Наслідок 3. *Якщо R — регулярне кільце з нільпотентними диференціюваннями (відповідно нільпотентними внутрішніми диференціюваннями), то R диференційно тривіальне (відповідно комутативне).*

Доведення. За наслідком 2,

$$C(R) \subseteq J(R)$$

— ніль-ідеал в R. Оскільки радикал Джекобсона не містить нетривіальних ідемпотентів, то $J(R) = 0$. Тоді R — комутативне кільце. Решта випливає з огляду на наслідок 1. □

Наслідок 4. *Нехай R — кільце, що є антисингулярним правим R-модулем. Якщо всі внутрішні диференціювання нільпотентні індексів нільпотентності ≤ 2, то кільце R комутативне.*

Доведення теореми 1. Оскільки будь-яке внутрішнє диференціювання нільпотентне, то для кожного $x \in R$ знайдеться таке додатнє ціле число $n = n(x)$, що

$$\partial_x^n(a) = 0$$

для всіх $a \in R$, тобто

$$[\cdots, [[a, \underbrace{x], x] \cdots, x}_{n \text{ разів}}] = 0.$$

За теоремою 3 із [2], кільце R комутативне. Тоді з огляду на лему 2 (ix)

$$a\delta(a) = 0$$

для всіх $a \in R$, що неможливо. Отже, R — диференційно тривіальне кільце. ☐

REFERENCES

[1] Artemovych O.D. *Differentially trivial and rigid rings of finite rank*. Periodical Math. Hungarica 1998, **36** (1), 1–16. doi:10.1023/A:1004648818462

[2] Chuang C.-L., Lin J.-S. *On a conjecture of Herstein*. J. Algebra 1989, **126** (1), 119–138. doi:10.1016/0021-8693(89)90322-0

[3] Gupta N., Levin F. *On the Lie ideals of a ring*. J. Aldebra 1983, **81** (1), 225–231. doi:10.1016/0021-8693(83)90217-X

[4] Giambruno A., Herstein I.N. *Derivations with nilpotent values*. Rend. Circ. Mat. Palermo 1981, **30** (2), 199–206. doi:10.1007/BF02844306

[5] Herstein I.N. Noncommutative rings. John Wiley and Sons, 1968.

[6] Lambek J. Lectures on Rings and Modules. Blaisdell Publ. Com., Waltham Toronto London, 1966.

[7] Lanski C. *Derivations with nilpotent values on Lie ideals*. Proc. Amer. Math. Soc. 1990, **108** (1), 31–37. doi:10.1090/S0002-9939-1990-0984803-4

Надійшло 20.02.2014

Lukashenko M.P. *Rings with nilpotent derivations of index* ≤ 2. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 91–95.

We prove that a semiprime ring with nilpotent derivations (respectively inner derivations) is differentially trivial (respectively commutative). The Jacobson radical $J(R)$ of a ring R with nilpotent derivations contains all its nilpotent elements.

Key words and phrases: derivation, semiprime ring.

Лукашенко М.П. *Кольца с нильпотентными дифференцированиями индексов* ≤ 2 // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 91–95.

Доказано, что в полупервичном кольце все дифференцирования (соответственно внутренние дифференцирования) нильпотентны тогда и только тогда, когда оно дифференциально тривиальное (соответсвенно коммутативное). Радикал Джекобсона кольца с нильпотентными дифференцированиями индексов ≤ 2 содержит все нильпотентные элементы кольца.

Ключевые слова и фразы: дифференцирование, полупервичное кольцо.