

ЛУЧКО В.М.

**ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ПОЛЕМ  $p$ -АДИЧНИХ ЧИСЕЛ З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ**

Розглянуто задачу Коші для параболічного рівняння з імпульсним впливом, побудовано її розв'язок та вивчено властивості розв'язку над полем  $\mathbb{Q}_p$ .

*Ключові слова і фрази:* задача Коші, матрицант, імпульсна дія.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна  
E-mail: vmluchko@gmail.com

**ВСТУП**

У 90-х роках минулого століття у математичній фізиці зріс інтерес до  $p$ -адичних чисел. У теорії суперструн (М. Гріна, Дж. Шварца і Е. Віттена [3] та І.В. Воловіча, І.Я. Ареф'євої [1]), яка апелює до фантастично малих відстаней, порядку  $10^{-33}$  см, немає причин вважати, що звичайні представлення про простір-час там можуть бути застосовані.

Однією з альтернативних можливостей для описання структури простору-часу є використання поля  $\mathbb{Q}_p$   $p$ -адичних чисел замість множини  $\mathbb{R}$  дійсних чисел. На можливість використання  $p$ -адичних чисел у математичній фізиці було вперше вказано у 1984 р. у роботі [7] Владімірова В.С. і Воловіча І.В.

У праці [6] побудована теорія узагальнених функцій над простором функцій з  $\mathbb{Q}_p$  в  $\mathbb{C}$ , яка застосовується до тих задач, що виникають у математичній фізиці. Теорія у багато чому аналогічна відповідній теорії над множиною  $\mathbb{R}$ , але є певні суттєві відмінності. Основну увагу приділяється теорії згортки, перетворенню Фур'є, аналогу оператора Рімана-Ліувіля, обчисленню інтегралів.

Параболічні рівняння над полем  $p$ -адичних чисел вивчалися у праці А.Н. Кочубея [4], в якій при певних припущеннях відносно коефіцієнтів, побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші, доведені існування та єдиність розв'язку у класах зростаючих функцій, знайдені умови невід'ємності фундаментального розв'язку.

На даний момент опубліковано чимало праць, присвячених дослідженню задач з імпульсною дією для різних класів диференціальних рівнянь. Найбільш повні та глибокі дослідження таких задач вивчені А.М. Самойленком та О.М. Перестюком. В їх монографії [5] досліджуються основні питання теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Наведена загальна характеристика систем таких рівнянь, вказано подібність та відмінність задач даної теорії із задачами звичайних диференціальних рівнянь. Основну увагу в роботі приділяється дослідженню періодичних та майже періодичних розв'язків систем з імпульсною дією, інтегральних множин рівнянь, що розглядаються, питанню стійкості розв'язку, імпульсному керуванню процесами.

УДК 517.95+512.625

2010 *Mathematics Subject Classification:* 39K99.

1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ  $p$ -АДИЧНОГО АНАЛІЗУ

Наведемо деякі твердження  $p$ -адичного аналізу, які будуть використовуватися в подальшому. Детальне їх викладення міститься у [2, 6].

Нехай  $p$  — просте число, яке надалі буде фіксованим. Введемо на множині  $\mathbb{Q}$  норму  $|x|_p$  за правилом  $|0|_p = 0$ ,  $|x|_p = p^{-\gamma}$ , якщо раціональне число  $x$  подане у вигляді

$$x = p^\gamma \frac{m}{n},$$

де  $\{m, n, \gamma\} \subset \mathbb{Z}$ ,  $m, n$  не діляться на  $p$ . Доповнення  $\mathbb{Q}$  за  $p$ -адичною нормою утворює поле  $\mathbb{Q}_p$   $p$ -адичних чисел.

Норма  $|\cdot|_p$  володіє наступними властивостями:  $|x|_p = 0$  у тому випадку, коли  $x = 0$ ;  $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$ ;  $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ , причому якщо  $|x|_p \neq |y|_p$ , то  $|x + y|_p = \max(|x|_p, |y|_p)$ . Таким чином  $p$ -адична норма неархімедова.

Метрика  $\rho(x, y) = |x - y|_p$  перетворює поле  $\mathbb{Q}_p$  у повний сепарабельний цілком незв'язний локально компактний метричний простір. На  $\mathbb{Q}_p$  існує (єдина, з точністю до множника) міра  $dx$ , інваріантна відносно додавання. При цьому, якщо  $a \in \mathbb{Q}_p$ ,  $a \neq 0$ , то  $d(ax) = |a|_p dx$ . Будемо нормувати міру так, що

$$\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Простір  $\mathbb{Q}_p$  є об'єднанням зліченної сім'ї попарно неперетинних множин

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{v=-\infty}^{\infty} \{x : |x|_p = p^v\},$$

при цьому

$$\int_{|x|_p = p^v} dx = p^v \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Введемо у розгляд клас  $\mathfrak{M}_\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) комплекснозначних функцій  $\varphi(x)$  на  $\mathbb{Q}_p$ , які задовольняють умови:

- 1)  $|\varphi(x)| \leq c(1 + |x|_p)^\gamma$ , де  $c$  — довільна додатна константа;
- 2) існує таке натуральне число  $N = N(\varphi)$ , що для довільного  $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), \quad |x'| \leq p^{-N}.$$

Функція  $\varphi$ , що задовольняє умови 1), 2), називається локально сталою, а число  $N$  — показником локальної сталості функції  $\varphi$ . Якщо функція  $\varphi$  залежить також від параметра  $t$ , то будемо говорити, що  $\varphi \in \mathfrak{M}_\gamma$  рівномірно по  $t$ , якщо константа  $c$  і показник  $N$  не залежить від  $t$ .

Функція  $f(x)$  називається локально-інтегрована на  $\mathbb{Q}_p$ ,  $f \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$ , якщо для довільного  $N \in \mathbb{Z}_+$

$$\int_{|x|_p \leq p^N} |f(x)| dx < \infty.$$

Множину фінітних функцій з  $\mathfrak{M}_0$  будемо позначати  $\mathfrak{D}$ . Нехай  $\chi$  — нормований адитивний характер поля  $\mathbb{Q}_p$ , тоді  $\chi \in \mathfrak{M}_0$ . Перетворення Фур'є функцій  $\varphi \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$  визначається формулою

$$F(\varphi) \equiv \tilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\xi x) \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Обернене перетворення:

$$F^{-1}(\varphi) \equiv \varphi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-\xi x) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

якщо  $\tilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$ .

Має місце формула [1]

$$\int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p) \chi(\xi x) dx = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\xi|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(p^{-\nu} |\xi|_p^{-1}\right) p^{-\nu} - |\xi|_p^{-1} f\left(p |\xi|_p^{-1}\right), \quad (1)$$

де  $\xi \neq 0$  і припускається збіжність ряду  $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu}) p^{-\nu}$ .

Оператор  $D^\gamma$  диференціювання порядку  $\gamma > 0$  визначений на функціях  $\varphi \in \mathfrak{D}$  формулою [6]

$$(D^\gamma \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \left\{ \int_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma-1} [\varphi(x-y) - \varphi(x)] dy + \int_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1} \varphi(x-y) dy + \frac{1-p^{-1}}{1-p^\gamma} \varphi(x) \right\}, \quad (2)$$

де  $\Gamma_p(s) = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}}$  —  $p$ -адичний аналог гама-функції.

У другому інтегралі правої частини (2) додамо і віднімемо  $|y|_p^{-\gamma-1} \varphi(x)$  та скористаємося тим, що

$$\int_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1} dy = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{|y|_p = p^\nu} |y|_p^{-\gamma-1} dy = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu\gamma} = \frac{p-1}{p(p^\gamma-1)}.$$

Тому

$$(D^\gamma \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \times \int_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\gamma-1} [\varphi(x-y) - \varphi(x)] dy.$$

Таким чином, оператор  $D^\gamma$  визначений на всіх функціях  $\varphi \in \mathfrak{M}_\beta$ ,  $0 \leq \beta < \gamma$ . Якщо  $\varphi \in \mathfrak{D}$ , то перетворення Фур'є функції  $D^\gamma \varphi$  дорівнює  $|\xi|^\gamma \tilde{\varphi}(\xi)$  у сенсі узагальнених функцій.

## 2 ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

Розглянемо параболічне рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a(D^\alpha u)(t, x) = f(t, x), \quad x \in \mathbb{Q}_p, t \in (\tau_0, T], \quad (3)$$

розв'язок якого будемо шукати при  $t \neq \tau_j$  такий, що задовольняє умови

$$u(t, x)|_{t=\tau_0} = \varphi(x), \quad (4)$$

$$u(\tau_j + 0, x) - u(\tau_j - 0, x) = B_j u(\tau_j - 0, x) + a_j(x), \quad j = \overline{1, s}, \quad (5)$$

де  $\{\varphi, a_j, f\} \subset \mathfrak{M}_0$ ,  $B_j$  — сталі,  $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s < T$ ,  $s$  скінченне,  $a > 0$ ,  $\alpha \geq 1$ ; під  $u(\tau_j \pm 0, x)$  будемо розуміти  $u(\tau_j \pm 0, x) = \lim_{t \rightarrow \tau_j \pm 0} u(t, x)$ .

Як і в евклідовому випадку, перший крок полягає у побудові матрицанта задачі (3)–(5). Її розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u(t, x) = F^{-1}(V(t, \sigma)),$$

де  $V(t, \sigma)$  є розв'язком задачі Коші з імпульсним впливом для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dV(t, \sigma)}{dt} + a|\sigma|_p^\alpha V(t, \sigma) = \tilde{f}(t, \sigma), \quad \sigma \in \mathbb{Q}_p, \quad (6)$$

$$V(t, \sigma)|_{t=\tau_0} = \tilde{\varphi}(\sigma), \quad (7)$$

$$V(\tau_j + 0, \sigma) - V(\tau_j - 0, \sigma) = B_j V(\tau_j - 0, \sigma) + \tilde{a}_j(\sigma). \quad (8)$$

Покладемо  $K(t, \tau, \sigma) = \exp\{-a|\sigma|_p^\alpha(t - \tau)\}$ . Побудуємо розв'язок задачі (6)–(8). Для цього спочатку розглянемо проміжок  $t \in (\tau_0, \tau_1]$ . Розв'язок рівняння (6) на даному проміжку визначається формулою

$$V(t, \sigma) = K(t, \tau_0, \sigma)c + \int_{\tau_0}^t K(t - \tau, \tau_0, \sigma)\tilde{f}(\tau, \sigma)d\tau.$$

Згідно з початковою умовою (7) отримаємо

$$V(t, \sigma) = K(t, \tau_0, \sigma)\tilde{\varphi}(\sigma) + \int_{\tau_0}^t K(t - \tau, \tau_0, \sigma)\tilde{f}(\tau, \sigma)d\tau. \quad (9)$$

На проміжку  $t \in (\tau_1, \tau_2]$  розв'язок рівняння (6) запишеться

$$V(t, \sigma) = K(t, \tau_1, \sigma)c + \int_{\tau_1}^t K(t - \tau, \tau_1, \sigma)\tilde{f}(\tau, \sigma)d\tau.$$

Задовольняючи імпульсну умову (8), із врахуванням (9) будемо мати

$$c = (1 + B_1) \left( K(\tau_1, \tau_0, \sigma)\tilde{\varphi}(\sigma) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} K(\tau_1 - \tau, \tau_0, \sigma)\tilde{f}(\tau, \sigma)d\tau \right) + \tilde{a}_1(\sigma),$$

тоді

$$\begin{aligned} V(t, \sigma) &= K(t, \tau_1, \sigma)(1 + B_1)K(\tau_1, \tau_0, \sigma)\tilde{\varphi}(\sigma) \\ &+ \int_{\tau_0}^{\tau_1} K(t, \tau_1, \sigma)(1 + B_1)K(\tau_1 - \tau, \tau_0, \sigma)\tilde{f}(\tau, \sigma)d\tau \\ &+ \int_{\tau_1}^t K(t - \tau, \tau_1, \sigma)\tilde{f}(\tau, \sigma)d\tau + K(t, \tau_1, \sigma)\tilde{a}_1(\sigma). \end{aligned}$$

Продовжуючи подібні міркування, отримуємо, що розв'язок задачі Коші на проміжку  $t \in (\tau_{s-1}, \tau_s]$  однозначно визначається формулою

$$\begin{aligned} V(t, \sigma) = & \mathcal{M}(t, \tau_0, \sigma) \tilde{\varphi}(\sigma) + \sum_{j=1}^s \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \mathcal{M}_1(t, \tau, \tau_j, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau \\ & + \int_{\tau_s}^t K(t - \tau, \tau_s, \sigma) \tilde{f}(\tau, \sigma) d\tau + \sum_{j=1}^s \mathcal{M}_2(t, \tau_j, \sigma) \tilde{a}(\sigma), \end{aligned} \quad (10)$$

де використано такі позначення:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t, \tau_0, \sigma) &= K(t, \tau_s, \sigma) \prod_{k=s}^1 (1 + B_k) K(\tau_k, \tau_{k-1}, \sigma), \\ \mathcal{M}_1(t, \tau, \tau_j, \sigma) &= K(t, \tau_s, \sigma) \prod_{k=s}^{j+1} (1 + B_k) K(\tau_k, \tau_{k-1}, \sigma) (1 + B_j) K(\tau_j - \tau, \tau_{j-1}, \sigma), \\ \mathcal{M}_2(t, \tau_j, \sigma) &= K(t, \tau_s, \sigma) \prod_{k=s}^{j+1} (1 + B_k) K(\tau_k, \tau_{k-1}, \sigma). \end{aligned}$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до (10), отримуємо зображення розв'язку задачі (3)–(5):

$$\begin{aligned} u(t, x) = & \int_{\mathbb{Q}_p} G_0(t, x - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^s \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G_1(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi \\ & + \int_{\tau_s}^t d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \sum_{j=1}^s \int_{\mathbb{Q}_p} G_2(t, x - \xi) a_j(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} G(t, \tau, x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) K(t - \tau, \tau_s, \sigma) d\sigma, & G_0(t, x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) \mathcal{M}(t, \tau_0, \sigma) d\sigma, \\ G_1(t, \tau, x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) \mathcal{M}_1(t, \tau, \tau_j, \sigma) d\sigma, & G_2(t, x) &= \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) \mathcal{M}_2(t, \tau_j, \sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

**Лема 1.** *Має місце нерівність*

$$|G(t, \tau, x)| \leq c(t - \tau) \left( (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}. \quad (12)$$

*Доведення.* Із зображення функції  $K(t, \tau, \sigma)$  видно, що функція  $G(t, \tau, x)$  неперервна по  $x \in \mathbb{Q}_p$ . Оцінимо її. Враховуючи представлення функції  $G(t, \tau, x)$ , отримуємо

$$|G(t, \tau, x)| \leq \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\sigma|_p^\alpha (t - \tau)\} d\sigma.$$

Нехай ціле число  $k$  таке, що  $p^{k-1} \leq (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} \leq p^k$ . Виберемо  $\eta \in \mathbb{Q}_p$ , щоб  $|\eta|_p = p^{k-1}$ . Тоді

$$\begin{aligned} |G(t, \tau, x)| &\leq \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-ap^{\alpha(k-1)}|\sigma|_p^\alpha\} d\sigma = \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\eta\sigma|_p^\alpha\} d\sigma \\ &= |\eta|_p^{-1} \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\rho|_p^\alpha\} d\rho = p^{-k} p \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\rho|_p^\alpha\} d\rho \leq C(t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Використовуючи формулу (1) при  $x \neq 0$ , отримаємо

$$G(t, \tau, x) = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |x|_p^{-1} \sum_{v=0}^{\infty} p^{-v} \exp\{-a(t - \tau)p^{-\alpha v}|x|_p^{-\alpha}\} - |x|_p^{-1} \exp\{-a(t - \tau)p^\alpha|x|_p^{-\alpha}\}.$$

Розклавши експоненти у ряд, змінивши порядок сумування і просумувавши геометричну прогресію, отримаємо, що для  $x \neq 0$

$$G(t, \tau, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1 - p^{\alpha m}}{1 - p^{-\alpha m - 1}} (a(t - \tau))^m |x|_p^{-\alpha m - 1}. \quad (14)$$

Із (14) отримуємо, що для  $0 < t < T$ ,  $|x|_p \geq (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\begin{aligned} |G(t, \tau, x)| &\leq |x|_p^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^m}{m!} \left((t - \tau)|x|_p^{-\alpha}\right)^m \leq |x|_p^{-1} \left[\frac{c}{1!}(t - \tau)|x|_p^{-\alpha} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^m}{m!}(t - \tau)^m |x|_p^{-m\alpha} + \dots\right] = |x|_p^{-\alpha-1}(t - \tau) \left[\frac{c}{1!} + \dots + \frac{c^m}{m!}(t - \tau)^{m-1}|x|_p^{-m\alpha-1} + \dots\right] \quad (15) \\ &\leq |x|_p^{-\alpha-1}(t - \tau) \left[\frac{c}{1!} + \dots + \frac{c^m}{m!}(t - \tau)^{m-1} \frac{1}{(t - \tau)^{m-1}} + \dots\right] \leq c_1 |x|_p^{-\alpha-1}(t - \tau). \end{aligned}$$

Із нерівностей (13) та (15) отримуємо (12). Дійсно, якщо  $|x|_p \geq (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}$ , то  $|x|_p^{-\alpha-1} \leq c \left(|x|_p + (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha-1}$ . Якщо ж  $|x|_p < (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}$ , то  $\left(|x|_p + (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-\alpha-1} \geq c(t - \tau)^{-1}(t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}}$ . Лема доведена.  $\square$

Нерівність (12) показує, що по змінній  $x$  функція  $G(t, \tau, x)$  належить  $L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$ . Із зображення функції  $K(t, \tau, \sigma)$  легко побачити, що функцію  $G(t, \tau, x)$  можна диференціювати під знаком інтегралу. Розглянемо похідну  $\frac{\partial G}{\partial t}$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -a \int_{\mathbb{Q}_p} |\sigma|_p^\alpha e^{-a|\sigma|_p^\alpha(t-\tau)} d\sigma.$$

**Лема 2.** *Має місце нерівність*

$$\left| \frac{\partial G(t, \tau, x)}{\partial t} \right| \leq c \left( (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1},$$

де константа не залежить від  $t, x$ .

Доведення аналогічне доведенню лема 1.

Якщо  $x \neq 0$ , то в силу (14)  $G(t, \tau, x + \xi) = G(t, \tau, x)$ ,  $|\xi|_p < |x|_p$ . Тому для  $x \neq 0$  визначена за допомогою формули (2) функція

$$G_\gamma(t, \tau, x) = (D_x^\gamma G)(t, \tau, x), \quad 0 < \gamma \leq \alpha.$$

Знайдемо функцію  $G_\gamma$  та оцінимо її. Введемо таке позначення:

$$G^{(m)}(t, \tau, x) = \int_{|\eta|_p \leq p^m} \chi(-x\eta) \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta.$$

Враховуючи, що  $|\chi(y)| = 1$  для  $|y|_p \leq 1$ , бачимо, що за змінною  $x \in \mathfrak{M}_0$  з показником локальної сталості  $m$ . Звідси отримаємо

$$\begin{aligned} (D_x^\gamma G^{(m)})(t, \tau, x) &= \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \int_{|\xi|_p > p^{-m}} |\xi|_p^{-\gamma-1} \left[ G^{(m)}(t, \tau, x - \xi) - G^{(m)}(t, \tau, x) \right] d\xi \\ &= \int_{|\eta|_p \leq p^m} \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta \int_{|\xi|_p > p^{-m}} \frac{|\xi|_p^{-\gamma-1}}{\Gamma_p(-\gamma)} [\chi(-(x-\xi)\eta) - \chi(-x\eta)] d\xi \\ &= \int_{|\eta|_p \leq p^m} \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) \chi(-x\eta) d\eta \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{|\xi|_p^{-\gamma-1}}{\Gamma_p(-\gamma)} [\chi(\xi\eta) - 1] d\xi. \end{aligned}$$

Внутрішній інтеграл, як функція  $\eta$ , є перетворення Фур'є узагальненої функції  $f_{-\gamma}$  [6] — регуляризація функції  $\frac{|\xi|_p^{-\gamma-1}}{\Gamma_p(-\gamma)}$ . Тому він дорівнює  $|\eta|_p^\gamma$ , тобто

$$(D_x^\gamma G^{(m)})(t, \tau, x) = \int_{|\eta|_p \leq p^m} \chi(-x\eta) |\eta|_p^\gamma \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta. \quad (16)$$

Згідно з формулою (1) функція  $G^{(m)}$  фактично залежить лише від  $|x|_p$ . Зафіксуємо  $x \neq 0$ , тоді

$$\begin{aligned} (D_x^\gamma G^{(m)})(t, \tau, x) &= \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \int_{|\xi|_p \geq |x|_p} |\xi|_p^{-\gamma-1} \left[ G^{(m)}(t, \tau, x - \xi) \right. \\ &\quad \left. - G^{(m)}(t, \tau, x) \right] d\xi \rightarrow (D_x^\gamma G)(t, \tau, x) \end{aligned}$$

для  $m \rightarrow \infty$  за теоремою Лебега. Тоді із формули (16) отримуємо

$$(D_x^\gamma G)(t, \tau, x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\eta) |\eta|_p^\gamma \exp\left(-a(t-\tau)|\eta|_p^\alpha\right) d\eta, \quad x \neq 0.$$

Правильна лема.

**Лема 3.** *Має місце нерівність*

$$|(D_x^\gamma G)(t, \tau, x)| \leq c \left( (t-\tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\gamma-1},$$

де  $c$  не залежить від  $t, x$ .

З формули (16) та перетворення Фур'є отримаємо

$$\int_{\mathbb{Q}_p} (D_x^\gamma G)(t, \tau, x) dx = 0.$$

Розглянемо “тепловий” потенціал

$$u(t, \tau, x) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{Q}_p} G(t - \theta, \tau, x - y) f(\theta, y) dy,$$

де  $f \in \mathfrak{M}_{\beta}$ ,  $0 \leq \beta < \alpha$ . Згідно з міркуваннями, які наведені в [4], показано, що  $u \in \mathfrak{M}_{\beta}$  і для неї правильна оцінка

$$|u(t, \tau, x)| \leq c(1 + |x|_p^{\beta}), \quad x \in \mathbb{Q}_p,$$

де  $c$  не залежить від  $t, \tau, x$ .

Як і в евклідовому випадку, можна показати, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, \tau, x)}{\partial t} &= f(t, x) + \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\partial G(t - \theta, \tau, x - y)}{\partial t} [f(\theta, y) - f(\theta, x)] dy \\ &\quad + \int_{\tau}^t f(\theta, x) d\theta \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{\partial G(t - \theta, \tau, x - y)}{\partial t} dy. \end{aligned}$$

Якщо  $0 < \gamma < \alpha$ , то похідні  $D^{\gamma}u$  беруться безпосередньо; якщо ж  $\gamma = \alpha$ , то

$$(D^{\alpha}u)(t, \tau, x) = \int_{\tau}^t d\theta \int_{\mathbb{Q}_p} G^{(\alpha)}(t - \theta, \tau, x - y) [f(\theta, y) - f(\theta, x)] dy.$$

Аналогічними міркуваннями, як в лемах 1,2,3, для функцій  $G_0, G_1, G_2$  отримуємо оцінки

$$\begin{aligned} |G_0(t, x)| &\leq c(t - \tau_0) \left( (t - \tau_0)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}, \\ |G_1(t, \tau, x)| &\leq c(t - \tau) \left( (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}, \quad |G_2(t, x)| \leq c(t - \tau_0) \left( (t - \tau_0)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}, \\ \left| \frac{\partial G_0(t, x)}{\partial t} \right| &\leq c \left( (t - \tau_0)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}, \\ \left| \frac{\partial G_1(t, \tau, x)}{\partial t} \right| &\leq c \left( (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}, \quad \left| \frac{\partial G_2(t, x)}{\partial t} \right| \leq c \left( (t - \tau_0)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}, \\ |(D_x^{\gamma}G_0)(t, x)| &\leq c \left( (t - \tau_0)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\gamma-1}, \\ |(D_x^{\gamma}G_1)(t, \tau, x)| &\leq c \left( (t - \tau)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\gamma-1}, \quad |(D_x^{\gamma}G_2)(t, x)| \leq c \left( (t - \tau_0)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\gamma-1}. \end{aligned}$$

**Теорема.** Нехай  $\varphi \in \mathfrak{M}_{\beta}$ ,  $\{a_j\}_{j=1}^s \in \mathfrak{M}_{\beta}$ ,  $f \in \mathfrak{M}_{\beta}$ ,  $\beta < \alpha$ ,  $1 + B_j \neq 0$ ,  $j = \overline{1, s}$ . Тоді розв’язок задачі Коші з імпульсною дією (3)–(5) існує та єдиний, і подається формулою (11).

Доведення теореми аналогічне як у [4]. Позначимо

$$u_1(t, x) = \int_{\mathbb{Q}_p} G_0(t, x - \xi) \varphi(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^s \int_{\mathbb{Q}_p} G_2(t, x - \xi) a_j(\xi) d\xi,$$



$$u_2(t, x) = \int_{\tau_s}^t d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \sum_{j=1}^s \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} d\tau \int_{\mathbb{Q}_p} G_1(t, \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi.$$

Для потенціалів, які входять у вирази для  $u_1(t, x)$ ,  $u_2(t, x)$ , на основі лем 1, 2, 3 та формул диференціювання, переконаємося, що функція  $u(t, x)$  належить класу  $\mathfrak{M}_\beta$ , задовольняє рівняння (3), початкову (4) та імпульсну (5) умови.

## REFERENCES

- [1] Aref'eva I.Ya., Volovich I.V. *Supersymmetry: Kaluza-Klein theory, anomalies, and superstrings*. Sov. Phys. Usp. 1985, **28** (8), 694–708. doi:10.1070/PU1985v028n08ABEH003884 (translation of Uspekhi Fiz. Nauk 1985, **146** (8), 655–681. doi:10.3367/UFNr.0146.198508e.0655 (in Russian))
- [2] Borevich Z.I., Shafarevich I.R. *Theory of numbers*. Nauka, Moscow, 1985. (in Russian)
- [3] Green M.B., Schwarz J.H., Witten E. *Superstring Theory*. CUP, Cambridge, 1987.
- [4] Kochubei A.N. *Parabolic equations over the field of  $p$ -adic numbers*. Math. USSR Izvestiya 1992, **39** (3), 1263–1280. doi:10.1070/IM1992v039n03ABEH002247
- [5] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Impulsive Differential Equations*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 14. Singapore, 1995.
- [6] Vladimirov V.S. *Generalized functions above the field of  $p$ -adic numbers*. Russian Math. Surveys 1988, **43** (5), 19–64. doi:10.1070/RM1988v043n05ABEH001924 (translation of Uspekhi Mat. Nauk 1988, **43** (5), 17–53. (in Russian))
- [7] Vladimirov V.S., Volovich I.V. *Superanalysis. I. Differential calculation*. Math. USSR Izvestiya 1991, **55** (6), 312–1330.

Надійшло 09.10.2013

Luchko V.M. *The Cauchy problem for parabolic equation over the field of  $p$ -adic numbers with impulse action*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 104–112.

The Cauchy problem for a parabolic equation with the impulse action is considered. Its solution is constructed and properties of the solution are studied above the field  $\mathbb{Q}_p$ .

*Key words and phrases:* Cauchy problem, matricant, impulse action.

Лучко В.М. *Задача Коши для параболического уравнения над полем  $p$ -адических чисел с импульсным воздействием* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 104–112.

Рассмотрено задачу Коши для параболического уравнения с импульсным влиянием, построено ее решение и изучено свойства решения над полем  $\mathbb{Q}_p$ .

*Ключевые слова и фразы:* задача Коши, матрицант, импульсное воздействие.