ISSN 2075-9827 http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 44–58 Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №1, С.44–58
doi:10.15330/cmp.6.1.44-58

Ільків В.С., Волянська І.І.

НЕЛОКАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

Досліджено нелокальну крайову задачу для рівняння з частинними похідними з оператором узагальненого диференціювання $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, який діє на функції скалярної комплексної змінної z. Доведено теорему єдиності та теореми існування розв'язку задачі у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Встановлено умови бієктивності оператора нелокальних умов задачі. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної за Адамаром задачі з багатьма просторовими комплексними змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників.

Ключові слова і фрази: рівняння з частинними похідними, оператор узагальненого диференціювання, узагальнені функції, дискримінант многочлена, результант многочленів, малі знаменники.

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна
E-mail: ilkivv@i.ua (Ільків В.С.), syluga@mail.ru (Волянська І.І.)

Вступ

В останні роки значний інтерес викликають крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зокрема, одним з найважливіших питань загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є встановлення умов коректності цих задач. У цьому плані порівняно добре вивчені крайові задачі для лінійних і нелінійних рівнянь класичних типів та їх узагальнень, які зберігають властивості відповідного типу. Що стосується побудови теорії безтипних рівнянь, то вона далеко не завершена, багато задач потребують подальшого ретельного вивчення.

Серед некласичних крайових задач для рівнянь з частинними похідними та для диференціально-операторних рівнянь важливе місце посідають задачі з нелокальними крайовими умовами, які пов'язують значення шуканих розв'язків та їх похідних у різних (двох або більше) граничних чи внутрішніх точках розглядуваної області. У загальному випадку такі задачі є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність залежить від проблеми малих знаменників, які виникають при побудові загального розв'язку.

Коректність нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними досліджувалися у роботах багатьох авторів (див. [2, 10, 11]), при накладанні додаткових обмежень на рівняння, крайові умови та області розгляду задач.

Дослідженню задач з нелокальними крайовими умовами за часом та умовами періодичності за просторовими змінними для рівнянь з частинними похідними присвячено,

УДК 517.946+511.37
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35G15, 35E05.

зокрема, роботи [1, 6, 12], у яких для аналізу оцінок знизу малих знаменників було використано методи і результати метричної теорії чисел.

Раніше некоректні задачі з нелокальними умовами для рівнянь з частинними похідними вивчалися лише у дійсних областях, а у комплексній області не вивчалися. Задачу Коші для диференціальних рівнянь з комплексними змінними вивчав Дубінський Ю. А., результати якого опубліковано у працях [3, 4].

У статті досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з узагальненим оператором диференціювання $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$ за умови однієї комплексної змінної. Встановлено критерії однозначної розв'язності задачі у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Доведено бієктивність оператора нелокальних умов задачі. Показано, що для однієї просторової змінної відповідні знаменники не є малими і оцінюються знизу деякими сталими.

Отримані результати узагальнюють дослідження робіт [7, 8, 9].

1 Постановка задачі

Позначимо $\mathcal{S}$ — область з множини $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathcal{D} = [0;T]\times\mathcal{S}$, де $T > 0$. Нехай $\mathbf{W}$ — лінійний простір скінченних сум (основних функцій) вигляду $P(z)=\sum\limits_k P_k z^k$, де $z\in\mathcal{S}$, P_k — комплексні коефіцієнти, $k\in\mathbb{Z}$. Кожну основну функцію $P(z)$ можна подати як суму трьох доданків: $P(z) = P_0 + P_1(z) + P_2\left(\dfrac{1}{z}\right)$, де $P_1(z)=\sum\limits_k P_k z^k$ і $P_2(w)=\sum\limits_k P_{-k}w^k$ — многочлени з нульовими вільними членами ($P_1(0)=P_2(0)=0$).

Простір $\mathbf{W}'$ — спряжений простір з простором $\mathbf{W}$; це простір узагальнених функцій (лінійних неперервних функціоналів $Q : \mathbf{W}\to\mathbb{C}$), які є формальними рядами (рядами Лорана) $Q(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} Q_k z^k = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} Q_k z^k$, що діють на основну функцію $P\in W$ за правилом $\langle Q, P\rangle = \sum\limits_k Q_k \bar{P}_k$.

Введемо ще шкали просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S})\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})\}_{q\in\mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$ — гільбертовий простір функцій $\psi = \psi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k z^k$, який отриманий поповненням $\mathbf{W}$ за нормою

$$\|\psi\|_q = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q}|\psi_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad \tilde{k} = \sqrt{1+k^2},$$

а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — банахів простір таких функцій $u(t,z)$, що похідні $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r}$, $r = 0,1,\ldots,n$, які визначені формулою $\dfrac{\partial^r u(t,z)}{\partial t^r} = \sum k\in\mathbb{Z} u_k^{(r)}(t)z^k$, для кожного $t\in[0,T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S})$ відповідно і неперервні за змінною t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{H_q^n(\mathcal{D})} = \sum_{r=0}^{n-1} \max_{[0,T]} \Big\|\frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r}\Big\|^2_{H_{q-r}(S)}.$$

Зауважимо, що $B^s\psi\in\mathbf{H}_{q-s}(\mathcal{S})$ для всіх $s\in\mathbb{N}$, якщо $\psi\in\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$, де B — оператор узагальненого диференціювання, тобто $B\psi = z\dfrac{\partial\psi}{\partial z}$, а степені оператора B визначено формулами $B^0\psi = \psi$, $B^s\psi = B(B^{s-1}\psi)$ при $s\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, (зокрема, маємо $B^s(z^k) = k^s z^k$).

В області $\mathcal{D}$ розглянуто задачу з нелокальними умовами

$$Lu = \sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = 0, \tag{1}$$

$$M_m u = \mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m}\Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{2}$$

де $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t,z)$ — шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ — задані функції змінної z.

Якщо виконується умова $u \in \mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$ для елемента $u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) z^k$, то вірними є формули $Bu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k u_k(t) z^k \in \mathbf{H}^n_{q-1}(\mathcal{D})$, $Lu \in \mathbf{H}^0_{q-n}(\mathcal{D})$ і $M_m u \in \mathbf{H}_{q-m}(\mathcal{S})$ для $m = 0,1,\ldots,n-1$.

Означення. *Під розв'язком задачі* (1), (2) *будемо розуміти функцію* $u = u(t,z)$*, яка задовольняє рівняння* (1) *і умови* (2) *та належить до простору* $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$.

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб функції φ_m належали до просторів $\mathbf{H}_{q-m}(\mathcal{S})$ при $m = 0,1,\ldots,n-1$ відповідно. Це твердження є наслідком з означення розв'язку задачі та властивостей просторів $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$ і $\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$.

2 Побудова формального розв'язку. Теорема єдиності

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду:

$$u(t,z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t) z^k, \tag{3}$$

де коефіцієнти $u_k = u_k(t)$ — невідомі функції, які треба визначити.

Запишемо оператор L з рівняння (1) у вигляді суми $Lu = \sum_{j=0}^{n} b_j(B) \frac{\partial^{n-j}}{\partial t^{n-j}}$, де оператор $b_j(B) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1} B^{s_1}$, $j = 0,1,\ldots,n$, є многочленом не вище j-го степеня від оператора B, зокрема, $b_0(B)$ — одиничний оператор.

Функція u_k з формули (3) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ є класичним розв'язком відповідної задачі для звичайного диференціального рівняння, а саме задачі:

$$\sum_{j=0}^{n} b_j(k) u_k^{(n-j)} = 0, \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m)}\Big|_{t=0} - u_k^{(m)}\Big|_{t=T} = \varphi_{mk}, \quad m = 0,1,\ldots,n-1, \tag{5}$$

де $b_j(k) = \sum_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1} k^{s_1}$ — многочлени степеня не вище j, φ_{mk} — коефіцієнти Фур'є функції φ_m, тобто коефіцієнти ряду $\varphi_m(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_{mz} z^k$.

Єдиність розв'язку u_k задачі (4), (5) у просторі $\mathbf{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$ для довільного $q \in \mathbb{R}$. Саме тому, якщо хоча б для одного k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k = \hat{u}_k(t)$ однорідної задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок

$u = \hat{u}(t,z)$, який визначається формулою $\hat{u}(t,z) = \hat{u}_k(t)z^k$, і розв'язок задачі (1), (2) не може бути єдиним.

Для побудови розв'язку задачі (4), (5) у рівнянні (4) пронормуємо коефіцієнти $b_j(k)$, $j = 1,\dots,n$, і подамо їх у вигляді добутку $b_j(k) = \tilde{k}^j\tilde{b}_j(k)$. Функції $\tilde{b}_j(k)$, як і коефіцієнти $b_j(k)$, лінійно залежать від параметрів $a_{n-j,0}, a_{n-j,1},\dots,a_{n-j,j}$ і рівномірно обмежені за k. Очевидно, виконується нерівність

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \le \sum_{s_1=0}^{j}\left|a_{n-j,s_1}\right|\frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j} \le \max_{s_1=0,1,\dots,j}\left|a_{n-j,s_1}\right|\sum_{s_1=0}^{j}\frac{|k|^{s_1}}{\tilde{k}^j}.$$

Якщо коефіцієнти $a_{s_0,s_1} \in \mathbb{C}$ рівняння (1) розглядати у крузі деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини, то отримаємо оцінки

$$\left|\tilde{b}_j(0)\right| = \left|a_{n-j,0}\right| \le A, \quad \left|\tilde{b}_j(\pm 1)\right| \le (j+1)2^{-\frac{j}{2}}A \le \frac{3}{2}A,$$

$$\left|\tilde{b}_j(k)\right| \le \frac{A}{\tilde{k}^j}\frac{|k|^{j+1}}{|k|-1} < \frac{A|k|}{|k|-1}, \quad k \notin \{-1,0,1\},$$

тобто $\left|\tilde{b}_j(k)\right| < 2A$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Звіси випливає, що для всіх (з врахуванням кратності) коренів $\lambda_1(k),\dots,\lambda_n(k)$ многочлена

$$P_k(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}\tilde{b}_j(k)\lambda^{n-j}$$

виконуються нерівності [5]:

$$|\lambda_j(k)| \le 1 + \max\{|\tilde{b}_1|,\dots,|\tilde{b}_n|\} \le 1 + 2A. \tag{6}$$

Очевидно, що числа $\gamma_j = \tilde{k}\lambda_j(k)$ є коренями відповідного характеристичного рівняння $\gamma^n + b_1(k)\gamma^{n-1} + \ldots + b_n(k) = 0$ для диференціального рівняння (4).

Позначимо через $\mathbf{K}$ множину тих цілих чисел k, для яких многочлен $P_k(\lambda)$ має кратний корінь.

Для різних коренів $\lambda_1(k),\dots,\lambda_n(k)$ загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} C_{kl}e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}, \tag{7}$$

де C_{kl} — довільні комплексні сталі, і належить до простору $\mathbf{C}^n[0,T]$.

Якщо $u_k(t)$ — розв'язок задачі (4), (5), то числа $\tilde{C}_{kl} = \left(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\right)C_{kl}$, $l = 1,2,\dots,n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{n}\lambda_l^m(k)\tilde{C}_{kl} = \frac{\varphi_{m,k}}{\tilde{k}^m}, \quad m = 0,1,\dots,n-1 \tag{8}$$

з матрицею Вандермонда $\left(\lambda_l^{m-1}(k)\right)_{m,l=1}^{n}$. Навпаки, якщо числа $\tilde{C}_{kl}$, де $l = 1,2,\dots,n$, утворюють розв'язок системи лінійних алгебричних рівнянь (8), то функція $u_k(t)$, що визначена формулою (7), в якій $C_{kl} = \dfrac{\tilde{C}_{kl}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$, є розв'язком задачі (4), (5).

Розв'язуючи систему (8) за правилом Крамера, одержуємо рівності

$$\tilde{C}_{kl} = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K},$$

де $\Delta(k) = \prod\limits_{1\le r<q\le n} \big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)$ — визначник Вандермонда, а $\Delta_{jl}(k)$ — його відповідні алгебричні доповнення, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 1, 2, \ldots, n$.

Для того, щоб задача (4), (5) мала єдиний класичний розв'язок для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для $l = 1, \ldots, n$. З цієї умови випливає, що $\ln\mu \neq \tilde{k}\lambda_l(k)T + i2\pi m$, або $\lambda_l(k) \neq \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$ для довільних $m \in \mathbb{Z}$ та $l = 1, 2, \ldots, n$.

У протилежному випадку, коли $\mu = e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для деякого l, існує таке число $m \in \mathbb{Z}$, що корінь $\lambda_l(k)$ визначається за формулою: $\lambda_l(k) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m}{\tilde{k}T}$. Тому виконується рівність $\dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^n}{T^n\tilde{k}^n} + \sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{b}_j(k)\dfrac{(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j}}{T^{n-j}\tilde{k}^{n-j}} = 0$ чи еквівалентна їй рівність

$$(\ln\mu - i2\pi m)^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(k)T^j(\ln\mu - i2\pi m)^{n-j} = 0. \tag{9}$$

Для кратних коренів ($k \in \mathbf{K}$) загальний розв'язок рівняння (4) також буде мати вигляд (7), в якому, залежно від кратності коренів $\lambda_l(k)$, замість числових коефіцієнтів C_{kl} будуть многочленні коефіцієнти $C_{kl}(t)$. Можна показати, що умова (9) буде необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку задачі (4), (5) і за кратних коренів [6, 12].

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (9) *не мало розв'язків у цілих числах* m *і* k.

Доведення. Необхідність. Нехай однорідна задача (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ має не більше одного розв'язку. Якщо існує розв'язок задачі (1), (2), тоді всі функції $u_k(t)$ знаходяться однозначно, тобто однорідна задача (4), (5) у просторі $\mathbb{C}^n[0;T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ має єдиний розв'язок. Отже, $\Delta(k) \cdot \prod\limits_{l=1}^{n} \big(\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\big) \neq 0$, якщо $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$, тобто $\mu \neq e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}$ для $l = 1, \ldots, n$. Таким чином, рівняння (9) не має розв'язків у цілих числах m і k. Аналогічні нерівності отримуємо при $k \in \mathbf{K}$.

Достатність. Доведемо від супротивного. Нехай рівняння (9) має розв'язок для k^*, m^*. Тоді можна вважати, що $\lambda_1(k^*) = \dfrac{\ln\mu - i2\pi m^*}{\tilde{k^*}T}$, а однорідна задача (4), (5) має розв'язок $e^{\tilde{k^*}\lambda_1(k)t} = e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)\frac{t}{T}}$. Звідси випливає, що задача (1), (2) у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ якщо має, то безліч розв'язків, оскільки $u^*(t,z) = Cz^{k^*}e^{(\ln\mu - i2\pi m^*)\frac{t}{T}}$, де C — довільна комплексна стала, є розв'язками відповідної однорідної задачі. Теорему доведено. □

Для фіксованих μ та T рівняння (9) визначають зліченну кількість прямих у просторі коефіцієнтів a_{s_0,s_1} диференціального рівняння (1), а для фіксованих a_{s_0,s_1} — зліченну кількість точок на площині змінної $\ln\mu$ за фіксованого T, або зліченну кількість точок на осі змінної T за фіксованого μ. Тому множини коефіцієнтів чи параметрів задачі (1), (2), для яких не виконуються умови єдиності, мають нульову міру.

За умов теореми 1 для довільного $k \in \mathbb{Z}$ розв'язок $u_k(t)$ задачі (4), (5) існує, а при $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}$ має такий вигляд:

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta_{jl}(k)}{\prod\limits_{1\le r<q\le n}\big(\lambda_q(k) - \lambda_r(k)\big)} \frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}. \tag{10}$$

За формулою (3) формальний розв'язок задачі (1), (2) подається у вигляді ряду

$$u(t,z)=\sum_{k\in\mathbf{K}}u_k(t)z^k+\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\Delta_{jl}(k)}{\Delta(k)}\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu-e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}z^k. \tag{11}$$

3 Оцінювання розв'язку. Теорема існування

Доведемо належність розв'язку (11) задачі (1), (2) до простору $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Враховуючи, що $\mathbf{K}$ — скінченна множина (буде показано далі), оцінимо абсолютну величину функцій u_k та їх похідних до порядку n лише для $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\mathbf{K}$, зокрема

$$\left|u_k^{(r)}(t)\right|\le\frac{\tilde{k}^r}{|\Delta(k)|}\max_{j,l}|\Delta_{jl}(k)|\sum_{l=1}^{n}\frac{\left|\lambda_l^r(k)e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}\right|}{\left|\mu-e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\right|}\sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}\right|,\quad t\in[0,T].$$

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату і перетворимо до вигляду

$$\left|u_k^{(r)}(t)\right|^2\le n^3(1+2A)^{2r}\frac{\tilde{k}^{2r}}{|\Delta(k)|^2}\max_{j,l}|\Delta_{jl}(k)|^2\max_{l}\left|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu-e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right|^2\sum_{j=0}^{n-1}\left|\tilde{k}^{-j}\varphi_{jk}\right|^2. \tag{12}$$

Оскільки $\Delta_{jl}(k)$ — визначники порядку $n-1$, що мають обмежені елементи, які є степенями чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, то з (6) маємо

$$|\Delta_{jl}(k)|\le(n-1)!(1+2A)^{(n-1)n/2}. \tag{13}$$

Для подальшої оцінки $|u_k|$ розглянемо вираз $\Delta^2(k)$ у формулі (12), який є дискримінантом $D(k)$ полінома $P_k(\lambda)$, і для якого справедливі такі два зображення:

$$\Delta^2(k)=D(k)=\prod_{1\le r<q\le n}\big(\lambda_q(k)-\lambda_r(k)\big)^2=\tilde{k}^{-n(n-1)}\prod_{1\le r<q\le n}\big(\tilde{k}\lambda_q(k)-\tilde{k}\lambda_r(k)\big)^2,$$

$$D(k)=\pm\begin{vmatrix}
1 & \tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0\\
0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k)\\
n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & n & \ldots & 2\tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & \ldots & n & (n-1)\tilde{b}_1(k) & (n-2)\tilde{b}_2(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k)
\end{vmatrix},$$

де знак перед визначником визначає формула $(-1)^{(n-1)n/2}$.

Дискримінант $D(k)$ подамо у вигляді многочлена:

$$\begin{aligned}D(k)&=D_0\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}+\frac{D_1}{\tilde{k}}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-1}+\frac{D_2}{\tilde{k}^2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-2}+\ldots+\frac{D_{n(n-1)}}{\tilde{k}^{n(n-1)}}\\
&=\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}\Big(D_0+\frac{D_1}{k}+\frac{D_2}{k^2}+\ldots+\frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)}}\Big),\end{aligned} \tag{14}$$

де $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_{n(n-1)}$ — комплексні числа, які є многочленами від a_{s_0,s_1}, причому D_0 — дискримінат многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,j}\lambda^{n-j}$ (цей многочлен будується за головною частиною рівняння (1)):

$$D_0 = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & a_{0,n} \\ n & (n-1)a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,1} & (n-2)a_{n-2,2} & \ldots & a_{1,n-1} \end{vmatrix},$$

$D_{n(n-1)}$ — дискримінат многочлена $\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n-j,0}\lambda^{n-j}$ (многочлен будується за коефіцієнтами біля чистих за t похідних):

$$D_{n(n-1)} = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & a_{0,0} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,0} & a_{1,0} & a_{0,0} & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,0} & a_{n-2,0} & a_{n-3,0} & \ldots & a_{0,0} \\ n & (n-1)a_{n-1,0} & \ldots & a_{1,0} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & n & \ldots & 2a_{2,0} & a_{1,0} & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_{n-1,0} & (n-2)a_{n-2,0} & \ldots & a_{1,0} \end{vmatrix}.$$

Нехай $D_0 \neq 0$, тоді дискримінант $D(k)$ при $k \neq 0$ факторизуємо так:

$$\begin{aligned} D(k) &= \frac{D_0}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2D_1}{D_0 k} + \frac{2D_2}{D_0 k^2} + \ldots + \frac{2D_{n(n-1)}}{D_0 k^{n(n-1)}}\Big) \\ &= \frac{D_0}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}\Big(2 + \frac{2}{kD_0}\Big(D_1 + \frac{D_2}{k} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)-1}}\Big)\Big). \end{aligned}$$

З останньої формули випливає нерівність $|D(k)| \geq \dfrac{|D_0|}{2} \cdot \Big(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)}$ при $|k| \geq \dfrac{\tilde{D_0}}{|D_0|}$, де $\tilde{D_0} = 2(|D_1| + |D_2| + \ldots + |D_{n(n-1)}|)$.

Для дробу $|k|/\tilde{k}$ справедливою є оцінка

$$\frac{|k|}{\tilde{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}. \tag{15}$$

Врахувавши нерівність (15), оцінимо модуль $D(k)$ знизу

$$|D(k)| \geq \frac{|D_0|}{2} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n(n-1)} = \big(\sqrt{2}\big)^{-n(n-1)-2}|D_0|, \quad |k| \geq \frac{\tilde{D_0}}{|D_0|}. \tag{16}$$

Отримана оцінка є точною за k при $|k| \geq \dfrac{\tilde{D_0}}{|D_0|}$, оскільки оцінка зверху, яка випливає із зображення дискримінанта $D(k)$, має такий вигляд: $|D(k)| \leq \dfrac{3}{2}|D_0|$.

З оцінки (16) випливає також скінченність множини $\mathbf{K}$.

У формулі (12) залишається оцінити зверху дроби $\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}$. Для цього використаємо такі дві формули: $\left|e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}\right| = e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)t} \le \max\left\{1; e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}\right\}$ та $\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j| \to \infty$ при $|k| \to \infty$. Очевидно, що треба довести лише другу формулу.

З рівності $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) = \lambda_j(k) + \bar{\lambda}_j(k) = \lambda_j(k) - (-\bar{\lambda}_j(k))$ і того, що $-\bar{\lambda}_1(k), \ldots, -\bar{\lambda}_n(k)$ є коренями многочлена $P_{1k}(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda + \bar{\lambda}_j(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{-j}\bar{\tilde{b}}_j(k)\lambda^{n-j}$, отримаємо, що числа $2\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)$ є множниками результанта $R(k) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{l=1}^{n}(\lambda_j(k) - (-\bar{\lambda}_l(k)))$ многочленів P_k та P_{1k}. Цей результант дорівнює такому визначнику:

$$R(k) = \begin{vmatrix} 1 & \tilde{b}_1(k) & \ldots & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \tilde{b}_{n-2}(k) & \tilde{b}_{n-1}(k) & \tilde{b}_n(k) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \tilde{b}_1(k) & \tilde{b}_2(k) & \tilde{b}_3(k) & \ldots & \tilde{b}_n(k) \\ 1 & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{\tilde{b}}_{n-2}(k) & (-1)^{n-1}\bar{\tilde{b}}_{n-1}(k) & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{\tilde{b}}_1(k) & -\bar{\tilde{b}}_2(k) & -\bar{\tilde{b}}_3(k) & \ldots & (-1)^n\bar{\tilde{b}}_n(k) \end{vmatrix}.$$

Для довільного $j = 1, \ldots, n$ оцінимо модуль даного результанта зверху:

$$|R(k)| \le 2^{n^2}(1 + 2A)^{n^2-1}|\mathrm{Re}\,\lambda_j|.$$

Для оцінки знизу подамо результант у вигляді

$$R(k) = \Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\Big(R_0 + \frac{R_1}{k} + \frac{R_2}{k^2} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{k^{n^2}}\Big), \quad k \ne 0, \tag{17}$$

де R_0 дорівнює такому визначнику:

$$R_0 = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1,1} & \ldots & a_{1,n-1} & a_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2,n-2} & a_{1,n-1} & a_{0,n} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-1,1} & a_{n-2,2} & a_{n-3,3} & \ldots & 0 \\ 1 & -\bar{a}_{n-1,1} & \ldots & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & (-1)^{n-2}\bar{a}_{2,n-2} & (-1)^{n-1}\bar{a}_{1,n-1} & (-1)^n\bar{a}_{0,n} & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & -\bar{a}_{n-1,1} & -\bar{a}_{n-2,2} & -\bar{a}_{n-3,3} & \ldots & (-1)^n\bar{a}_{0,n} \end{vmatrix},$$

і у випадку $R_0 \ne 0$ маємо добуток

$$R(k) = \frac{R_0}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2}\Big(2 + \frac{2}{kR_0}\Big(R_1 + \frac{R_2}{k} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{k^{n^2-1}}\Big)\Big).$$

Якщо $k \in \mathbb{Z}$ і $|k| \ge \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $\tilde{R}_0 = 2(|R_1| + |R_2| + \ldots + |R_{n^2}|)$, то справджується нерівність $|R(k)| \ge \dfrac{|R_0|}{2}\Big(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n^2} \ge (\sqrt{2})^{-n^2-2}|R_0|$.

З даної нерівності випливає друга формула, оскільки $\tilde{k} \to \infty$, коли $|k| \to \infty$:

$$\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)| \geq \tilde{k} \cdot 2^{-n^2}(1+2A)^{1-n^2}|R(k)| \geq \tilde{k} \cdot (\sqrt{2})^{-3n^2-2}(1+2A)^{1-n^2}|R_0| \to \infty.$$

Для шуканої оцінки дробів врахуємо знак $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)$. Якщо $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) > 0$, то справджується рівномірна на $[0,T]$ оцінка

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| \leq \frac{e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}}{\big|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\big|} = \frac{e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}}{e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}\Big|\frac{\mu}{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}} - 1\Big|} = \frac{1}{\big|\mu e^{-\tilde{k}\lambda_l(k)T} - 1\big|} \leq 2$$

при $\tilde{k} \geq \dfrac{M_1}{|R_0|}$ і $|k| \geq \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $M_1 = \dfrac{\ln(2|\mu|)}{T}(\sqrt{2})^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}$.

Якщо ж $\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) < 0$, то аналогічно

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| = \frac{1}{\big|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}\big|} \leq \frac{2}{|\mu|}$$

при $\tilde{k} \geq \dfrac{M_2}{|R_0|}$ і $|k| \geq \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$, де $M_2 = \dfrac{\ln(2/|\mu|)}{T}(\sqrt{2})^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}$.

Отже, при $\tilde{k} \geq \max\dfrac{(M_1,M_2)}{|R_0|} = \dfrac{(\sqrt{2})^{3n^2+2}(1+2A)^{n^2-1}}{T|R_0|}\ln 2|\mu|$ і $|k| \geq \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}$ для виразу $\Big|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big|$ справджується така нерівність:

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| \leq 2\max\Big(1, \frac{1}{|\mu|}\Big). \tag{18}$$

Таким чином, враховуючи нерівності (12), (13), (16) і (18), для всіх $t \in [0,T]$ отримаємо оцінку розв'язку задачі (4), (5) та його похідних

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq \frac{\tilde{C}_{00}}{|D_0|}\sum_{j=0}^{n-1}|\tilde{k}|^{2(r-j)}|\varphi_{jk}|^2, \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}_{00}, \quad r = 0,1,\ldots,n, \tag{19}$$

де $\tilde{C}_{00} = \tilde{C}_{00}(A,n,\mu) > 0$, $\mathbf{K}_{00}$ — множина цілих чисел k, для яких справедлива нерівність $|k| \leq \max\Big(\dfrac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \dfrac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big)$ або нерівність $\tilde{k} \leq \max\dfrac{(M_1,M_2)}{|R_0|}$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

(I_{00}) $D_0 \neq 0$;

(II_{00}) $R_0 \neq 0$;

(III_{00}) *для всіх* $k \in \mathbf{K}_{00}$ *рівняння* (9) *не має розв'язків у цілих числах* m; *а також* $\varphi_0 \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1}(\mathcal{S})$,..., $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1}(\mathcal{S})$. *Тоді існує лише один розв'язок задачі* (1), (2), *який належить до простору* $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ *умов* (2).

Доведення. За умов (I_{00}) і (II_{00}) справджується оцінка (19) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}_{00}$. Якщо ж $k \in \mathbf{K}_{00}$, то розв'язок u_k існує та належить до простору $\mathbb{C}^n[0,T]$ за умовою (III_{00}).

Враховуючи формулу (11) та нерівність (19), оцінимо зверху квадрат норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})} \leq \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \sum_{k\in\mathbf{K}_{00}} \left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 \tilde{k}^{2(g-r)}$$
$$+ \frac{\tilde{C}_{00}}{|D_0|} \sum_{r=0}^{n} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbf{K}_{00}} \tilde{k}^{2(g-r)} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2(r-j)} |\varphi_{jk}|^2 \leq \frac{C_0}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}_{q-j}(\mathcal{S})}, \quad (20)$$

де додатна величина C_0 залежить від коефіцієнтів a_{s_0,s_1} рівняння (1) і параметра μ, а також від чисел A та n. Остання нерівність у формулі (20) випливає зі скінченності множини $\mathbf{K}_{00}$. Теорему доведено. $\square$

Із теореми 2 існування розв'язку отримуємо важливий наслідок про бієктивну властивість оператора задачі (1), (2).

Наслідок. *За умов теореми* 2 *оператор нелокальних умов* (2) *є бієктивним відображенням* $u \mapsto (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *з простору розв'язків* u *рівняння* (1)*, які належать до* $\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})$*, на простір* $\mathbf{H}_q(\mathcal{S}) \times \mathbf{H}_{q-1}(\mathcal{S}) \times \ldots \times \mathbf{H}_{q+1-n}(\mathcal{S})$ *вектор-функцій* $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

Зауважимо, що умови теореми 2, для майже всіх, у сенсі міри Лебеґа, коефіцієнтів a_{s_0,s_1} диференціального рівняння (1) виконуються, тобто вони можуть не виконуватися лише для множини нульової міри.

4 Дослідження умов розв'язності задачі

Встановимо розв'язність задачі (1), (2) при порушенні умов теореми 2. Всього розглянемо чотири варіанти теорем існування, які узагальнюють цю теорему. Використаємо відповідну нумерацію з індексами для формул та позначення C_1, C_2, C_3, C_4 для додатних величин, які залежать від коефіцієнтів a_{s_0,s_1}, параметра μ, чисел A та n і не залежать від вектор-функцій $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$.

A) У першому випадку нехай не виконується умова (I_{00}), тобто $D_0 = 0$. Припустимо також, що $D_1 \neq 0$. Для $k \neq 0$ дискримінант (14) запишемо у вигляді добутку

$$D(k) = \frac{D_1}{\tilde{k}}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-1} + \frac{D_2}{\tilde{k}^2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-2} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{\tilde{k}^{n(n-1)}}$$
$$= \Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-1} \frac{1}{\tilde{k}} \frac{D_1}{2} \Big(2 + \frac{2}{kD_1}\Big(D_2 + \frac{D_3}{k} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)-2}}\Big)\Big).$$

Тоді для $|k| \geq \dfrac{\tilde{D}_1}{|D_1|}$, де $\tilde{D}_1 = 2(|D_2| + |D_3| + \ldots + |D_{n(n-1)}|)$, отримаємо нерівність $|D(k)| \geq \dfrac{|D_1|}{2} \cdot \Big(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-1} \cdot \dfrac{1}{\tilde{k}}$.

З нерівності (15) випливає така оцінка знизу модуля дискримінанта $D(k)$:

$$|D(k)| \geq \frac{|D_1|}{2} \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{n(n-1)-1} \cdot \frac{1}{\tilde{k}} = \frac{\big(\sqrt{2}\big)^{-n(n-1)-1}|D_1|}{\tilde{k}}, \qquad |k| \geq \frac{\tilde{D}_1}{|D_1|}. \quad (16_1)$$

З точністю до сталої, отримуємо таку ж оцінку зверху: $|D(k)| \leq \dfrac{3|D_1|}{2\tilde{k}}$.

Ці оцінки показують, що порушення умови (I_{00}) означає нескінченну малість (першого порядку стосовно $1/\tilde{k}$) дискримінанта $D(k)$ при $\tilde{k} \to \infty$. Оцінка (16) показує, що при виконанні умови (I_{00}) модуль дискримінанта оцінюється знизу і зверху сталими.

На основі формул (12), (13), (16_1), (18) для всіх $t \in [0, T]$ отримаємо нерівності

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \le \frac{\tilde{C}_{10}}{|D_1|} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2(r-j-1)} |\varphi_{jk}|^2, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{10}, \quad r = 0, 1, \dots, n, \tag{19_1}$$

де $\tilde{C}_{10} = \tilde{C}_{10}(A, n, \mu) > 0$, $\mathbf{K}_{10} = \Big\{k \in \mathbb{Z} \colon |k| \le \max\Big(\frac{\tilde{D}_1}{|D_1|}, \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big) \vee \tilde{k} \le \max\Big(\frac{M_1, M_2}{|R_0|}\Big)\Big\}$.

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (II_{00}) *теореми* 2 *та умови:*

(I_{10}) $D_0 = 0, D_1 \neq 0$;

(III_{10}) *для всіх* $k \in \mathbf{K}_{10}$ *рівняння* (9) *не має розв'язків у цілих числах* m.

Тоді за умов $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{q+1}(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S})$, $\dots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+2}(\mathcal{S})$ *справджується твердження теореми* 2.

Доведення. З умови $D_1 R_0 \neq 0$ (умови (I_{10}) і (II_{00})) випливає оцінка (19_1) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{10}$, а з умови (III_{10}) — існування u_k для всіх $k \in \mathbf{K}_{10}$.

Оскільки $\mathbf{K}_{10}$ — скінченна множина, то з формули (11) та нерівності (19_1) випливає така оцінка зверху розв'язку (11) задачі (1), (2):

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})} \le \frac{C_1}{|D_1|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}_{q-j+1}(\mathcal{S})}.$$

З останньої нерівності випливає доведення теореми. □

Б) Розглянемо другий випадок, коли не виконуються обидві умови (I_{00}) теореми 2 та (I_{10}) теореми 3, а виконуються умови $D_0 = D_1 = \ldots = D_{i-1} = 0$, $D_i \neq 0$, де $i \in \{2, \dots, n(n-1)\}$. Це означає, що дискримінант $D(k)$ полінома $P_k(\lambda)$ не тотожний нулеві (оскільки, тоді $D_0 = D_1 = \ldots = D_{n(n-1)}$) і для $k \neq 0$ подається формулою

$$D(k) = \frac{D_i}{2} \Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-i} \frac{1}{\tilde{k}^i} \Big(2 + \frac{2}{kD_i}\Big(D_{i+1} + \frac{D_{i+2}}{k} + \ldots + \frac{D_{n(n-1)}}{k^{n(n-1)-(i+1)}}\Big)\Big).$$

Звідси випливає нерівність $|D(k)| \ge \frac{|D_i|}{2} \cdot \Big(\frac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n(n-1)-i} \cdot \frac{1}{\tilde{k}^i}$ для $|k| \ge \frac{\tilde{D}_i}{|D_i|}$, де число $\tilde{D}_i = 2(|D_{i+1}| + |D_{i+2}| + \ldots + |D_{n(n-1)}|)$. Враховуючи цю нерівність та нерівність (15), дамо таку оцінку знизу $D(k)$:

$$|D(k)| \ge \frac{\big(\sqrt{2}\big)^{-n(n-1)+i-2} |D_i|}{\tilde{k}^i}, \qquad |k| \ge \frac{\tilde{D}_i}{|D_i|}. \tag{16_2}$$

Вона означає нескінченну малість дискримінанта порядку $\big(1/\tilde{k}\big)^i$, де $i \ge 2$, при $|\tilde{k}| \to \infty$.

З нерівностей (12), (13), (16_2), (18) для всіх $t \in [0, T]$ випливає формула

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \le \frac{\tilde{C}_{i0}}{|D_i|} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2(r-j-i)} |\varphi_{jk}|^2, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{i0}, \quad r = 0, 1, \dots, n, \tag{19_2}$$

де $\tilde{C}_{i0} = \tilde{C}_{i0}(A, n, \mu) > 0$, $\mathbf{K}_{i0} = \Big\{k \in \mathbb{Z} \colon |k| \le \max\Big(\frac{\tilde{D}_i}{|D_i|} \vee \frac{\tilde{R}_0}{|R_0|}\Big), \tilde{k} \le \max\Big(\frac{M_1, M_2}{|R_0|}\Big)\Big\}$.

Теорема 4. *Нехай виконується умова* (II_{00}) *теореми* 2 *та умови:*

$(\mathrm{I}_{\mathrm{i}0})$ $D_0 = D_1 = \ldots = D_{i-1} = 0, D_i \neq 0,\ i\ \in \{2, \ldots, n(n-1)\}$;

$(\mathrm{III}_{\mathrm{i}0})$ *для всіх* $k \in \mathbf{K}_{i0}$ *рівняння* (9) *не має розв'язків у цілих числах* m.

Тоді за умов $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{q+i}(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q+i-1}(\mathcal{S})$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q+i-n+1}(\mathcal{S})$ *справджується твердження теореми* 2.

Доведення. Оскільки за умовами теореми $D_i{\neq}0$ і $R_0{\neq}0$, то виконується оцінка (19_2) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k{\in}\mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{i0}$, а для $k{\in}\mathbf{K}_{i0}$ — $u_k{\in}\mathbb{C}^n[0,T]$ (за умовою $(\mathrm{III}_{\mathrm{i}0})$).

Оцінку квадрата норми розв'язку u задачі (1), (2) отримуємо з формули (11), нерівності (19_2) та скінченності множини $\mathbf{K}_{i0}$, зокрема

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})} \leq \frac{C_2}{|D_i|}\sum_{j=0}^{n-1}\|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}_{q-j+i}(\mathcal{S})}.$$

З останньої нерівності випливає доведення теореми. □

В) У третьому випадку нехай не виконується умова (II_{00}) теореми 2, тобто $R_0 = 0$, але $R_1 \neq 0$. Тоді результант $R(k)$ матиме вигляд:

$$R(k) = \frac{R_1}{\tilde{k}}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2-1} + \frac{R_2}{\tilde{k}^2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2-2} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{\tilde{k}^{n^2}}$$
$$= \frac{R_1}{2}\Big(\frac{k}{\tilde{k}}\Big)^{n^2-1}\frac{1}{\tilde{k}}\Big(2 + \frac{2}{R_1 k}\Big(R_2 + \frac{R_3}{k} + \ldots + \frac{R_{n^2}}{k^{n^2-2}}\Big)\Big).$$

Якщо вектор $k \in \mathbb{Z}$ задовольняє умову $|k| \geq \dfrac{\tilde{R}_1}{|R_1|}$, де $\tilde{R}_1 = 2(|R_2| + |R_3| + \ldots + |R_{n^2}|)$, то, враховуючи нерівність (15), маємо $|R(k)| \geq \dfrac{|R_1|}{2}\cdot\Big(\dfrac{|k|}{\tilde{k}}\Big)^{n^2-1}\cdot\dfrac{1}{\tilde{k}} \geq (\sqrt{2})^{-n^2-1}|R_1|\cdot\dfrac{1}{\tilde{k}}$.

Звідси для $|k| \geq \dfrac{\tilde{R}_1}{|R_1|}$ отримаємо таке обмеження на величину $\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)|$:

$$\tilde{k}|\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)| \geq \tilde{k}\cdot 2^{-n^2}(1+2A)^{1-n^2}|R(k)| \geq (\sqrt{2})^{-3n^2-1}(1+2A)^{1-n^2}\cdot|R_1| = \sigma > 0.$$

Оцінимо окремо вираз $\Big|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big|$ для $\mathrm{Re}\,\lambda_l(k) > 0$ та для $\mathrm{Re}\,\lambda_l(k) < 0$. У разі $|\mu| < e^{\sigma T}$ для $\mathrm{Re}\,\lambda_l(k) > 0$ отримаємо

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| \leq \frac{e^{\tilde{k}\mathrm{Re}\,\lambda_l(k)T}}{|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}|} = \frac{1}{\Big|1 - \mu e^{-\tilde{k}\lambda_l(k)T}\Big|} \leq \frac{e^{\sigma T}}{e^{\sigma T} - |\mu|}.$$

Аналогічно, у разі $|\mu| > e^{-\sigma T}$ для $\mathrm{Re}\,\lambda_l(k) < 0$ отримаємо рівномірну на $[0,T]$ оцінку

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| \leq \frac{1}{|\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}|} \leq \frac{e^{\sigma T}}{|\mu|e^{\sigma T} - 1},$$

тобто за умови $e^{-\sigma T} < |\mu| < e^{\sigma T}$ справджується нерівність

$$\Big|\frac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\Big| \leq \max\Big(\frac{e^{\sigma T}}{e^{\sigma T} - |\mu|}, \frac{e^{\sigma T}}{|\mu|e^{\sigma T} - 1}\Big), \qquad |k| \geq \frac{\tilde{R}_1}{|R_1|}. \tag{18_3}$$

На відміну від оцінки (18), подібна оцінка (18_3) отримана за додаткових обмежень на μ, які відсутні за виконання умови (II_{00}).

Отже, для всіх $t \in [0,T]$ і $\mu \in (e^{-\sigma T}, e^{\sigma T})$ отримаємо формулу

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq \frac{\tilde{C}_{01}}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2(r-j)} |\varphi_{jk}|^2, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{01}, \quad r = 0,1,\ldots,n, \tag{19_3}$$

де $\tilde{C}_{01} = \tilde{C}_{01}(A,n,\mu) > 0$, $\mathbf{K}_{01} = \left\{k \in \mathbb{Z} \colon |k| \leq \max\left(\frac{\tilde{D}_0}{|D_0|}, \frac{\tilde{R}_1}{|R_1|}\right)\right\}$ — скінченна множина.

Теорема 5. *Нехай виконується умова* (I_{00}) *теореми* 2 *та умови:*

(II_{01}) $R_0 = 0, R_1 \neq 0$*;*

(III_{01}) *для всіх* $k \in \mathbf{K}_{01}$ *рівняння* (9) *не має розв'язків у цілих числах* m*.*

Тоді за умов $\varphi_0 \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-1}(\mathcal{S})$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q-n+1}(\mathcal{S})$, *а також за умови* $e^{-\sigma T} < |\mu| < e^{\sigma T}$ *справджується твердження теореми* 2.

Доведення. Справедливість оцінки (19_3) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{01}$ випливає з умов (I_{00}) і (II_{01}) та вибору числа μ. З умови (III_{01}) випливає існування u_k у просторі $\mathbb{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbf{K}_{01}$.

На основі формул (11), (19_3) та зі скінченності множини $\mathbf{K}_{01}$ отримаємо

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})} \leq \frac{C_3}{|D_0|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}_{q-j}(\mathcal{S})}.$$

Теорему доведено. □

Г) Розглянемо четвертий випадок, коли не виконуються дві умови (I_{00}) і (II_{00}) теореми 2, замість яких виконуються умови (I_{i0}) і (II_{01}) теорем 4 і 5 відповідно. Тоді для дискримінанта $D(k)$ справедливою буде оцінка (16_2), а для величини $\left|\dfrac{e^{\tilde{k}\lambda_l(k)t}}{\mu - e^{\tilde{k}\lambda_l(k)T}}\right|$ за умови $\mu \in (e^{-\sigma T}, e^{\sigma T})$ — оцінка (18_3).

На основі нерівностей (12), (13), (16_2), (18_3) отримаємо оцінку квадрата абсолютної величини розв'язку u_k задачі (4), (5) та його похідних порядку r

$$|u_k^{(r)}(t)|^2 \leq \frac{\tilde{C}_{i1}}{|D_i|} \sum_{j=0}^{n-1} |\tilde{k}|^{2(r-j-i)} |\varphi_{jk}|^2, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{i1}, \quad r = 0,1,\ldots,n, \tag{19_4}$$

де $\tilde{C}_{i1} = \tilde{C}_{i1}(A,n,\mu) > 0$, $\mathbf{K}_{i1} = \left\{k \in \mathbb{Z} \colon |k| \leq \max\left(\frac{\tilde{D}_i}{|D_i|}, \frac{\tilde{R}_1}{|R_1|}\right)\right\}$.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* (I_{i0}) *та* (II_{01}) *теорем* 4 *і* 5 *відповідно та умова*

(III_{i1}) *для всіх* $k \in \mathbf{K}_{i1}$ *рівняння* (9) *не має розв'язків у цілих числах* m*.*

Тоді за умов $\varphi_0 \in \mathbf{H}_{q+i}(\mathcal{S})$, $\varphi_1 \in \mathbf{H}_{q+i-1}(\mathcal{S})$, $\ldots$, $\varphi_{n-1} \in \mathbf{H}_{q+i-n+1}(\mathcal{S})$ *і за умови* $e^{-\sigma T} < |\mu| < e^{\sigma T}$ *справджується твердження теореми* 2.

Доведення. За умов (I_{i0}), (II_{01}) та вибору числа μ справджується оцінка (19_4) розв'язку u_k задачі (4), (5) для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbf{K}_{i1}$. З умови ($\mathrm{III}_{i1}$) випливає існування u_k для всіх $k \in \mathbf{K}_{i1}$.

Зі скінченності множини $\mathbf{K}_{i1}$ випливає нерівність

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^n_q(\mathcal{D})} \leq \frac{C_4}{|D_i|} \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{H}_{q-j+i}(\mathcal{S})},$$

з якої випливає доведення теореми. □

З теорем 3–6 випливає, що за невиконання умов теореми 2 для розв'язності задачі (1), (2) необхідно накладати сильніші умови на функції $\varphi_0,\ \varphi_1, \ldots,\ \varphi_{n-1}$ та обмеження на параметр μ.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто нелокальну двоточкову крайову задачу для рівняння з частинними похідними, у якому замість оператора диференціювання $\dfrac{\partial}{\partial z}$ використовується оператор узагальненого диференціювання $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, що діє на функції скалярної комплексної змінної z.

У роботі:

1) введено шкали функціональних просторів $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S})\}_{q\in\mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})\}_{q\in\mathbb{R}}$;

2) встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$;

3) доведено, що для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та параметра μ, оператор нелокальних умов задачі є бієктивним відображенням;

4) показано, що на відміну від задачі з багатьма просторовими змінними, яка є некоректною за Адамаром, задача з однією комплексною змінною є коректною, оскільки відповідні вирази не породжують проблему малих знаменників і оцінюються знизу сталими.

REFERENCES

[1] Bobyk I.O., Ptashnyk B.Yo. *Boundary-value problems for hyperbolic equations with constant coeffcients.* Ukrainian Math. J. 1994, **46** (7), 869–877. doi:10.1007/BF01056663 (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 1994, **46** (7), 795–802. (in Ukrainian))

[2] Borok V.M., Fardigola L.V. *Nonlocal well-posed boundary-value problems in a layer.* Math. Notes 1990, **48** (1), 635–639. doi:10.1007/BF01164259 (translation of Mat. Zametki 1990, **48** (1), 20–25. (in Russian))

[3] Dubinskii Yu.A. *The Cauchy problem and pseudodifferential operators in the complex domain.* Russ. Math. Surv. 1990, **45** (2), 95–128. doi:10.1070/RM1990v045n02ABEH002337 (translation of Uspekhi Mat. Nauk 1990, **45** (2), 115–142. (in Russian))

[4] Dubinskii Yu.A. The Cauchy problem in the complex domain. MPEI, Moscow, 1996. (in Russian)

[5] Horne R. Johnson. Matrix analysis. Mir, Moscow, 1989. (in Russian)

[6] Il'kiv V.S., Ptashnyk B.Yo. *Representation and investigation of solutions of a nonlocal boundary-value problem a system of partial differential equations.* Ukrainian Math. J. 1996. **48** (2), 207–219. doi:10.1007/BF02372046 (translation of Ukr. Mat. Zhurn. 1996, **48** (2), 184–194. (in Ukrainian))

[7] Ilkiv V.S., Strap N.I., Volianska I.I. *Nonlocal boundary value problem for the differential equation with the operator* $z\dfrac{\partial}{\partial z}$ *in a layer*. In: Proc. of the Ukrainian Conf. "Application of Mathematical Methods in Science and Engineering", Lutsk, Ukraine, November 25–26, 2011, Lutsk, 2011, 35–36.

[8] Ilkiv V.S., Strap N.I., Volianska I.I. *Nonlocal boundary value problem for the differential equations with the operator coefficients in the complex domain*. In: Proc. of the XIV Intern. Sci. Kravchuk Conf. Kyiv, Ukraine, April 19–21, 2012, Kyiv, 2012, **1**, 200.

[9] Ilkiv V.S., Volianska I.I., Strap N.I. *Nonlocal boundary value problem for the differential equation for the function of a complex spatial argument*. In: Proc. of the Intern. Conf. "Differential equations and their applications", Uzhhorod, Ukraine, September 27–29, 2012, Uzhhorod, 2012, 37.

[10] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V. *Problem with nonlocal two-point condition in time variable for homogeneous partial differential equation of infinite order in spatial variables.* Math. Methods Phys. Mech. Fields 2008, **51** (4), 17–26. (in Ukrainian)

[11] Matiychuk M.I. Parabolic and elliptic boundary value problems with singularities. Prut, Chernivtsi, 2003. (in Ukrainian)

[12] Ptashnyk B.Yo., Il'kiv V.S., Kmit' I.Ya., Polishchuk V.M. Nonlocal boundary value problems for partial differential equations. Naukova Dumka, Kyiv, 2002. (in Ukrainian)

Надійшло 12.02.2013

Il'kiv V.S., Volyans'ka I.I. *Non-local boundary value problem for partial differential equation in a complex domain*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 44–58.

The paper is devoted to the investigation of a non-local boundary value problem for partial differential equations with the operator of the generalized differentiation $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, which operate on functions of scalar complex variable z. The unity theorem and existence theorems of the solution of problem in the space $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ are proved. Correctness after Hadamard of the problem is shown. It distinguishes her from an ill-conditioned after Hadamard problem with many spatial variables.

Key words and phrases: partial differential equation, operator of generalized differentiation, generalized functions, discriminant of the polynomial, small denominators.

Ількив В.С., Волянська И.И. *Нелокальная краевая задача для уравнения с частными производными в комплексной области* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №1. — С. 44–58.

Исследовано нелокальную краевую задачу для дифференциального уравнения с частными производными с оператором обобщенного дифференцирования $B = z\dfrac{\partial}{\partial z}$, который действует на функции скалярной комплексной переменной z. Доказана теорема единственности и теоремы существования решения задачи в пространстве $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$. Установлены условия биективности оператора нелокальных условий задачи. Показана корректность за Адамаром задачи, которая отличает ее от некорректной задачи со многими пространственными комплексными переменными, решение которой во многих случаях связана с проблемой малых знаменателей.

Ключевые слова и фразы: уравнение в частных производных, оператор обобщенного дифференцирования, обобщенные функции, дискриминант, малые знаменатели.