ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 196–202
doi:10.15330/cmp.6.2.196-202

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2014, Т.6, №2, С.196–202

Глушак І.Д.

НАБЛИЖЕННЯ ЄМНОСТЕЙ НА МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ ЛІПШИЦЕВИМИ ЄМНОСТЯМИ

Для довільної ємності на просторі з обмеженою метрикою доведено існування і отримано явний вигляд найближчих до неї ємностей, ліпшицевих з даним коефіцієнтом.

Ключові слова і фрази: відстань Гаусдорфа, регулярна щодо метрики ємність, ліпшицева ємність.

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, 57 Shevchenka str., 76018, Ivano-Frankivsk, Ukraine
E-mail: inna_gl@rambler.ru

Вступ

Запроваджені Шоке [1] ємності (неадитивні міри) знайшли численні застосування у різних галузях. Простори регулярних неадитивних мір на компактах детально вивчено Зарічним та Никифорчиним [2]. Результати, отримані для компактів, узагальнили та поширили на неадитивні міри на тихоновських просторах Никифорчин та Реповш [3]. Властивості типу регулярності (регулярність щодо метрики, щодо топології, ω-гладкості, τ-гладкості) для ємностей, визначених на метричних (не обов'язково компактних) та метризовних просторах досліджено Черковським [4]. Зокрема, описано метрики на просторі ємностей у стилі Прохорова та Зарічного (Канторовича-Рубінштейна) та доведена їх еквівалентність (а з певною модифікацією — і рівність) для випадку, коли вихідний простір є повним.

З потреб практики виникає необхідність виражати або наближати певні ємності за допомогою емностей, які мають деякі специфічні властивості або простішу будову. В даній праці досліджується клас ліпшицевих ємностей на метричних просторах. Вони характеризуються наступною "гарною" властивістю: при незначній зміні множини значення ємності на цій множині суттєво не змінюється, тому задача апроксимації довільної ємності на метричному просторі ліпшицевими ємностями є досить актуальною. Саме ця проблема є ключовою у даній статті.

1 Метрика на множині ємностей

Надалі вважаємо, що (X, d) — метричний простір скінченного діаметра. Як звичайно, для $x \in X$ та $A \subset X$ величину $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$ називаємо відстанню від точки x до множини A. Множини

$$O_\varepsilon A = \{x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon\}, \qquad \text{де} \quad A \subset X,\ \varepsilon > 0,$$

УДК 515.12, 517.518.11
2010 *Mathematics Subject Classification:* 25C15, 28E10.

та

$$\overline{O}_\varepsilon A = \{x \in X \mid d(x, A) \leqslant \varepsilon\}, \qquad \text{де} \quad A \subset X,\ \varepsilon \geqslant 0,$$

називаємо відповідно відкритим ε-околом та замкненим ε-околом множини A. Очевидно, що вони дійсно є відповідно відкритою та замкненою множиною, оскільки $d(x, A)$ неперервно залежить від x при фіксованому A. Зокрема, через $O_\varepsilon(\{a\}) = B_\varepsilon(a)$ та $\overline{O}_\varepsilon(\{a\}) = \bar{B}_\varepsilon(a)$ позначаємо відкриту та замкнену кулю радіуса ε з центром у точці $a \in X$.

На множині $\exp X$ непорожніх замкнених підмножин вживаємо стандартну метрику Гаусдорфа

$$d_H(A, B) = \max\bigl\{\sup\{d(a, B) \mid a \in A\}, \sup\{d(b, A) \mid b \in B\}\bigr\}.$$

Наступні формули для d_H є рівносильними:

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \min\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset \overline{O}_\varepsilon B, B \subset \overline{O}_\varepsilon A\}, \\ d_H(A, B) &= \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset \bigcup_{b \in B} \bar{B}_\varepsilon(b), B \subset \bigcup_{a \in A} \bar{B}_\varepsilon(a)\}, \\ d_H(A, B) &= \inf\{\varepsilon \geqslant 0 \mid A \subset \bigcup_{b \in B} B_\varepsilon(b), B \subset \bigcup_{a \in A} B_\varepsilon(a)\}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що у другій (але не третій) формулі $\inf$ можна замінити на $\min$ для компактного простору X, оскільки у такому просторі $\overline{O}_\varepsilon A = \bigcup_{a \in A} \bar{B}_\varepsilon(a)$ для кожної замкненої $A \subset X$.

Надалі розглядаємо клас ємностей [2] на просторі (X, d), регулярних щодо метрики d, тобто таких монотонно неспадних дійснозначних функцій c на сукупності $\operatorname{Exp} X$ всіх замкнених підмножин простору X, що $c(\varnothing) = 0$, і $c(\overline{O}_\varepsilon A) \to c(A)$ при $\varepsilon \to +0$ для кожної замкненої $A \subset X$. Вважаючи d фіксованою, у звичайному позначенні цього класу $\bar{M}_d X$ опускаємо d і пишемо $\bar{M}X$.

Кожна така ємність c цілком визначається своїм підграфіком

$$\operatorname{sub} c = \bigl\{(F, \alpha) \in \exp X \times I \bigm| \alpha \leqslant c(F)\bigr\},$$

який є замкненим у $\exp X \times I$ з метрикою прямого добутку

$$\rho\bigl((F, \alpha), (G, \beta)\bigr) = \max(d_H(F, G), |\alpha - \beta|).$$

Відповідно відстань $\hat{d}(c_1, c_2)$ між ємностями $c_1, c_2 \in \bar{M}X$ природно означається як відстань Гаусдорфа $\rho_H(\operatorname{sub} c_1, \operatorname{sub} c_2)$ між їх підграфіками. Оскільки діаметр X скінченний, то значення $\hat{d}$ теж скінченні.

Неважко помітити, що $\hat{d}(c_1, c_2)$ є точною нижньою гранню множини всіх таких $\varepsilon \geqslant 0$, що для кожної $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ виконано нерівності

$$c_1(\overline{O}_\varepsilon A) + \varepsilon \geqslant c_2(A), c_2(\overline{O}_\varepsilon A) + \varepsilon \geqslant c_1(A)$$

(у такому випадку кажемо, що ємності c_1 та c_2 є *ε-близькими*). Тоді $\hat{d}(c_1, c_2) \leqslant \varepsilon$, якщо і тільки якщо для всіх $\varepsilon' > \varepsilon$, $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ виконано

$$c_1(\overline{O}_{\varepsilon'} A) + \varepsilon' \geqslant c_2(A), c_2(\overline{O}_{\varepsilon'} A) + \varepsilon' \geqslant c_1(A).$$

Остання точна нижня грань досягається для компактного простору, і, ширше, для кожного (X, d), у якому $d_H(\overline{O}_{\varepsilon'} A, \overline{O}_\varepsilon A) \to 0$ при $\varepsilon' \searrow \varepsilon$ для всіх $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, $\varepsilon > 0$ (зауважимо, що при $\varepsilon = 0$ збіжність є автоматичною). У такому просторі $\hat{d}(c_1, c_2) \leqslant \varepsilon$, якщо і тільки якщо c_1 та c_2 ε-близькі.

Іншою достатньою умовою того, що ємності c_1 та c_2 є ε-близькими для $\varepsilon = \hat{d}(c_1, c_2)$, є їх ω-гладкість, тобто рівність $c_i(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} c_i(A_n)$, $i = 1, 2$, для кожної незростаючої послідовності $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ замкнених множин у X. Ця властивість є сильнішою від регулярності щодо метрики.

2 Наближення ліпшицевими ємностями

Нагадаємо, що (X, d) — метричний простір скінченного діаметра.

Клас ліпшицевих з коефіцієнтом $q > 0$ ємностей — це множина

$$\bar{M}_q X = \{c \in \bar{M}X \mid \forall F, G \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X \quad |c(F) - c(G)| \leq q \cdot d_H(F, G)\},$$

де $q > 0$ — деяке фіксоване дійсне значення. Зрозуміло, що рівносильно умову ліпшицевості можна записати як

$$\forall F, G \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad d_H(F, G) \leq \varepsilon \Rightarrow |c(F) - c(G)| \leq q\varepsilon$$

або

$$\forall F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad c(\bar{O}_\varepsilon(F)) \leqslant c(F) + q\varepsilon.$$

Очевидно, що ліпшицевість сильніша від інших властивостей типу регулярності [4] — регулярності щодо метрики, регулярності щодо топології, ω-гладкості та τ-гладкості. Простий приклад ємності, ліпшицевої з коефіцієнтом 2 — це функція, яка зіставляє кожній замкненій підмножині її діаметр.

Теорема 1. *$\bar{M}_q X$ — замкнений підпростір простору $\bar{M}X$ з метрикою $\hat{d}$.*

Доведення. Достатньо показати, що довільна ємність c_0, яка є точкою дотику множини $\bar{M}_q X$, належить до неї. Нехай $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, $\varepsilon > 0$. За припущенням для кожного $\delta > 0$ існує $c \in \bar{M}_q X$, для якого $\hat{d}(c_0, c) \leqslant \delta$. Звідси

$$c_0(\bar{O}_\varepsilon F) \leqslant c(\bar{O}_\delta(\bar{O}_\varepsilon F)) + \delta \leqslant c(\bar{O}_{\delta+\varepsilon} F) + \delta \leqslant c(F) + q(\delta + \varepsilon) + \delta \leqslant c_0(\bar{O}_\delta F) + 2\delta + q(\delta + \varepsilon).$$

Оскільки при $\delta \to 0$ останній вираз прямує до $c_0(F) + q\varepsilon$, маємо $c_0 \in \bar{M}_q X$. □

Розглянемо задачу про апроксимацію довільної ємності $c \in \bar{M}X$ ємностями з класу $\bar{M}_q X$.

Лема 2.1. *Для фіксованої непорожньої множини $G \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ функції на $\operatorname{Exp} X$, рівні нулю для аргумента $\varnothing$ і визначені для непорожньої $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ формулами*

$$\varphi(F) = q \sup_{x \in F} d(x, G) \qquad \text{та} \qquad \psi(F) = \max\{a - q \sup_{x \in G} d(x, F), 0\},$$

де $a \geqslant 0$, є ліпшицевими з коефіцієнтом q ємностями.

Доведення. Достатньо зауважити, що вирази $\inf_{x \in F} d(x, G)$ та $\sup_{x \in F} d(x, G)$, а тому й $\sup_{x \in G} d(x, F)$, є ліпшицевими щодо F з коефіцієнтом 1. Виконання інших властивостей очевидне. □

Зауважимо, що поаргументний інфімум довільної сім'ї ємностей з $\overline{M}_q X$ та поаргументний супремум довільної обмеженої згори сім'ї ємностей з $\overline{M}_q X$ теж є ємностями з цього ж класу. Звідси випливає, що при фіксованих $\varepsilon, q \geq 0$ та $c \in \overline{M}X$ функції

$$\overset{-q}{c}_\varepsilon(F) = \sup_{A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X} \{\max\{c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F), 0\}\}$$

та

$$\overset{+q}{c}_\varepsilon(F) = \inf_{B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X} \{c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x \in F} d(x, B)\},$$

де $F \neq \varnothing$, і $\overset{-q}{c}_\varepsilon(\varnothing) = \overset{+q}{c}_\varepsilon(\varnothing) = 0$, є ліпшицевими з коефіцієнтом q ємностями.

Теорема 2. *Функції $\overset{-q}{c}_\varepsilon$ та $\overset{+q}{c}_\varepsilon$ — це такі елементи $\overline{M}_q X$, що довільна ємність $c_0 \in \overline{M}_q X$ є ε-близькою до даної ємності c, якщо і тільки якщо $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$.*

Доведення. Належність $\overset{-q}{c}_\varepsilon, \overset{+q}{c}_\varepsilon \in \overline{M}_q X$ обґрунтовано вище.

Припустимо, що $c \in \overline{M}X$ та $c_0 \in \overline{M}_q X$ є ε-близькими. Тоді, зафіксувавши $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ та обравши довільні $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ та $\delta > 0$ такі, що $\overline{O}_\varepsilon(A) \subset \overline{O}_\delta(F)$, отримаємо

$$c(A) - \varepsilon \leq c_0(\overline{O}_\varepsilon(A)) \leq c_0(\overline{O}_\delta(F)) \leq c_0(F) + q\delta,$$

тобто $c_0(F) \geq c(A) - \varepsilon - q\delta$. Зокрема, якщо покласти $\delta = \sup\limits_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)$, то можна стверджувати, що при всіх $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ будуть виконуватись нерівності

$$c_0(F) \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F).$$

Звідси

$$c_0(F) \geq \sup_{A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X} \{c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)\}$$

тобто $c_0 \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon$.

Майже аналогічно, зафіксуємо множину $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ та оберемо довільні $B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ та $\delta > 0$ такі, що $F \subset \overline{O}_\delta(B)$. Оскільки $c_0 \in M_q X$, то $c_0(F) \leq c_0(\overline{O}_\delta(B)) \leq c_0(B) + q\delta$. Якщо $\delta = \sup\limits_{x \in F} d(x, B)$, то остання нерівність набуде вигляду $c_0(F) \leq c_0(B) + q \sup\limits_{x \in F} d(x, B)$. Крім того, $\hat{d}(c, c_0) \leq \varepsilon$, тобто $c_0(B) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon$. Отже можна стверджувати, що для всіх $B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ виконується $c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup\limits_{x \in F} d(x, B)$, тому

$$c_0(F) \leq \inf_{B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X} \{c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x \in F} d(x, B)\},$$

тобто $c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$.

Отже, виконання нерівностей $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$ необхідне для ε-близькості c та c_0.

Доведемо достатність. Нехай $c_0 \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon$. Тоді для фіксованої $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ та довільної $A \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ правильні нерівності

$$c_0(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, \overline{O}_\varepsilon(F)).$$

Звідси при $A = F$ отримаємо $c_0(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq c(F) - \varepsilon$.

Якщо $c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$, то при будь-яких $B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ буде виконуватись

$$c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x \in F} d(x, B).$$

Зокрема, при $B = F$ отримаємо $c_0(F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$.

Отже, за умови $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$ маємо ε-близькість c та c_0. □

Зауваження 2.1. *Зрозуміло, що для довільної ємності $c \in \bar{M}X$ існує ε-близький елемент $c_0 \in \bar{M}_q X$ тоді і тільки тоді, коли виконано $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$. У цьому випадку можна покласти, наприклад, $c_0 = \overset{-q}{c}_\varepsilon$ чи $c_0 = \overset{+q}{c}_\varepsilon$.*

Теорема 3. *Для довільної ємності $c \in \bar{M}X$ існує ε-близький елемент c_0 підпростору $\bar{M}_q X$ (де $\varepsilon \geqslant 0$), якщо і тільки якщо нерівність*

$$c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon$$

виконано для всіх непорожніх $A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$.

Доведення. Нехай $\varepsilon \geq 0$ таке, що $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$, тобто $\overset{-q}{c}_\varepsilon(F) \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon(F)$ для довільної $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$. Остання нерівність рівносильна виконанню нерівності

$$c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{x \in F} d(x, B)$$

для кожних непорожніх замкнених підмножин A, B простору X. Зрозуміло, що при $F = B$ вона матиме вигляд

$$c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon.$$

Отже необхідною умовою для $\overset{-q}{c}_\varepsilon \leq \overset{+q}{c}_\varepsilon$ є виконання при довільних $A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$ нерівності

$$c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon.$$

Покажемо, що вона також є достатньою умовою. Дійсно, якщо $F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$, то для довільних $x \in \overline{O}_\varepsilon(A)$ та $y \in F$ істинною є нерівність $d(x, B) \leq d(x, F) + d(y, B)$. Тоді виконано

$$c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) \geq c(A) - \varepsilon - q\Big(\sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F) + \sup_{y \in F} d(y, B)\Big).$$

Звідси

$$\inf_{B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X} \{c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon + q \sup_{y \in F} d(y, B)\} \geq c(A) - \varepsilon - q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)$$

для всіх $A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X$. Отже, $\overset{+q}{c}_\varepsilon(F) \geq \overset{-q}{c}_\varepsilon(F)$, що, згідно зауваження 2.1, означає існування ε-близького елемента $c_0 \in \bar{M}_q X$. □

З останньої теореми негайно випливає, що відстань від ємності $c \in \overline{M}X$ до підпростору $\overline{M}_q X$ рівна точній нижній грані ε_q множини

$$E_q = \{\varepsilon \geq 0 \mid \forall A, B \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X : c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + q \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon\}.$$

Якщо $\varepsilon_q = \min E_q$, то найближчі до $c \in \overline{M}X$ ємності c_0 з підпростору $\overline{M}_q X$ визначаються нерівністю $\overset{-q}{c}_{\varepsilon_q} \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_{\varepsilon_q}$.

Однак наступний приклад свідчить, що мінімум множини E_q може й не існувати.

Приклад 1. *Розглянемо підпростір* $X = \{(0,-1), (0,1)\} \cup ((0;1] \times \{0\})$ *площини* $\mathbb{R}^2$ *з евклідовою метрикою і покладемо*

$$c(F) = \begin{cases} 3, & (0,1) \in F \text{ або } (1,0) \in F, \\ 0, & (0,1) \notin F \text{ і } (1,0) \notin F, \end{cases} \qquad F \underset{\mathrm{cl}}{\subset} X.$$

Очевидно, що c *— регулярна ємність, яка не є ліпшицевою з коефіцієнтом* $q = 1$. *При кожному* $\varepsilon > 1$ *нерівність*

$$c(A) \leq c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, B) + 2\varepsilon$$

істинна для всіх замкнених непорожніх підмножин A, B *простору* X, *однак для* $\varepsilon = 1$ *вона є хибною для* $A = \{(1,0)\}$, $B = \{(0,-1)\}$.

Це означає, що відстань від c *до підпростору* $\overline{M}_q X$ *рівна* 1, *але* 1*-близької до* c *ємності з* $\overline{M}_q X$ *не існує.*

Розглянемо, за яких умов можна гарантувати існування найменшого елемента у E_q. Якщо спадна послідовність елементів $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ множини E_q збігається до ε_0, то для збіжностей $c(\overline{O}_{\varepsilon_n}(F)) \to c(\overline{O}_{\varepsilon_o}(F))$ та $\sup\limits_{x \in \overline{O}_{\varepsilon_n} F} d(x, B) \to \sup\limits_{x \in \overline{O}_{\varepsilon_o} F} d(x, B)$ достатньою є напівнеперервна згори щодо метрики Гаусдорфа залежність множини $\overline{O}_\varepsilon A$ від ε для кожної замкненої непорожньої $A \subset X$, тобто збіжність $d_H(\overline{O}_{\varepsilon'} A, \overline{O}_\varepsilon A) \to 0$ при $\varepsilon' \searrow \varepsilon$. Нагадаємо, що це виконано при компактності (X, d), але компактність не є необхідною — для внутрішності одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$ дана властивість теж істинна. Тоді множина E_q замкнена щодо границь незростаючих послідовностей і непорожня, бо містить $\operatorname{diam} X$. Тому в E_q існує мінімальний елемент ε_q, який згідно зауваження 2.1 і є шуканою відстанню $\hat{d}(c, M_q X)$. Для цього ε_q, застосувавши теорему 2, легко побудувати найближчу до c (оптимальну) ємність $c_0 \in M_q X$, тобто таку, що $\hat{d}(c, c_0) = \varepsilon_q$ (наприклад, такими є $\overset{-q}{c}_\varepsilon$ та $\overset{+q}{c}_\varepsilon$ при $\varepsilon = \varepsilon_q$).

Розглянемо той випадок, коли множина E_q не обов'язково містить найменший елемента. Зрозуміло, що якщо $\varepsilon_q = \inf E_q$, то $\hat{d}(c, \overline{M}_q X) = \varepsilon_q$. Тоді всі $\varepsilon' > \varepsilon_q$ будуть належати до множини E_q, а це означає (згідно Теореми 2), що для довільного $\varepsilon' > \varepsilon_q$ існує $\varepsilon'-$близька до c ємність $c' \in \overline{M}_q X$, але ε_q-близької ємності із підпростору $\overline{M}_q X$ може й не існувати. Проте ємність $c_q \in \overline{M}_q X$, для якої $\hat{d}(c, c_q) = \varepsilon_q$, існує, про що стверджує наступна теорема.

Зауважимо, що при $\varepsilon' > \varepsilon > \varepsilon_q$ маємо

$$\overset{-q}{c}_{\varepsilon'} \leqslant \overset{-q}{c}_{\varepsilon} \leqslant \overset{+q}{c}_{\varepsilon} \leqslant \overset{+q}{c}_{\varepsilon'},$$

тому існують точні грані

$$\overset{-q}{c} = \sup_{\varepsilon > \varepsilon_q} \overset{-q}{c}_\varepsilon, \quad \overset{+q}{c} = \inf_{\varepsilon > \varepsilon_q} \overset{+q}{c}_\varepsilon,$$

які належать до $\overline{M}_q X$, причому $\overset{-q}{c_\varepsilon} \leqslant \overset{-q}{c} \leqslant \overset{+q}{c} \leqslant \overset{+q}{c_\varepsilon}$ для кожного $\varepsilon > \varepsilon_q$. Звідси випливає, що $\overset{-}{c}_q$ та $\overset{+}{c}_q$ є ε-близькими до c для всіх $\varepsilon > \varepsilon_q$, отже, відстань між кожною з них та c рівна ε_q.

Неважко записати явний вигляд оптимальних ємностей, отримавши наступне твердження.

Теорема 4. *Функції $\overset{-q}{c}$ та $\overset{+q}{c}$, визначені формулами*

$$\overset{-q}{c}(F) = \max\{\sup_{\substack{A \subset X \\ \mathrm{cl}}} \{c(A) - \varepsilon_q - q \cdot \lim_{\varepsilon \to \varepsilon_q + 0} \sup_{x \in \overline{O}_\varepsilon(A)} d(x, F)\}, 0\}$$

та

$$\overset{+q}{c}(F) = \inf_{\substack{B \subset X \\ \mathrm{cl}}} \{\lim_{\varepsilon \to \varepsilon_q + 0} c(\overline{O}_\varepsilon(B)) + \varepsilon_q + q \sup_{x \in F} d(x, B)\}$$

для замкненої $F \neq \varnothing$, і $\overset{-q}{c}(\varnothing) = \overset{+q}{c}(\varnothing) = 0$, є відповідно найбільшою і найменшою з ємностей з $\overline{M}_q X$, найближчих до ємності c.

REFERENCES

[1] Choquet G. *Theory of Capacity*. Ann. Inst. Fourier 1953–1954, **5**, 131–295.

[2] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R. *Capacity functor in the category of compacta*. Sb. Math. 2008, **199** (2), 159–184. doi:10.1070/SM2008v199n02ABEH003914

[3] Nykyforchyn O.R., Repovš D. *Inclusion hyperspaces and capacities on Tyhonoff spaces: functors and monads.* Topology Appl. 2010, **157** (15), 2421–2434. doi:10.1016/j.topol.2010.07.032

[4] Cherkovsky T.M. *Metric spaces of regular capacities.* Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 166–176. (in Ukrainian) doi:10.15330/cmp.6.1.166-176.

Надійшло 17.10.2014

Hlushak I.D. *Approximation of capacities on metric spaces with Lipschitz capacities*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (2), 196–202.

For arbitrary capacity on a space with a bounded metric, existence proved and explicit formulae obtained for closest capacities that are Lipschitz continuous with a given Lipschitz constant.

Key words and phrases: Hausdorff distance, capacity regular with respect to metric, Lipschitz capacity.

Глушак И.Д. *Приближение емкостей на метрических пространствах липшицевыми емкостями* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т.6, №2. — С. 196–202.

Для произвольной емкости на пространстве с ограниченной метрикой доказано существование получен явный вид ближайших к ней емкостей, липшицевых с данным коэффициентом.

Ключевые слова и фразы: расстояние Хаусдорфа, регулярная относительно метрики емкость, липшицева емкость.