ISSN 2075-9827
Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (1), 66–71
doi:10.15330/cmp.7.1.66-71

http://www.journals.pu.if.ua/index.php/cmp
Карпатські матем. публ. 2015, Т.7, №1, С.66–71

Дільний В.М.[1], Війчук Т.І.[2]

ПРО ОДНУ РЕАЛІЗАЦІЮ ПРИНЦИПУ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Отримано твердження про наслідування поведінки суми функцій на дійсній півосі кожним з доданків при певних умовах на ці функції та їх перетворення Лапласа.

Ключові слова і фрази: принцип невизначеності, простір Гарді, перетворення Фур'є.

[1] Ivan Franko National University, 1 Universytetska str., 79000, Lviv, Ukraine
[2] Ivan Franko State Pedagogical University, 24 Franka str., 82100, Drohobych, Ukraine
E-mail: dilnyi@ukr.net (Дільний В.М.), taras.viychuk@gmail.com (Війчук Т.І.)

Вступ

С. Мандельбройт (див. [1–3]) одержав теорему, яка стверджує, що коли функція f належить простору L^1 на одиничному колі, показник збіжності її спектру λ менший одиниці і для кожного $\rho > \lambda(1-\lambda)^{-1}$ виконується

$$\int_0^{\varepsilon} |f(re^{it})|dt = O(\exp(-\varepsilon^{-\rho})), \quad \varepsilon \to 0,$$

то $f \equiv 0$. Інакше кажучи, якщо функція із простору L^1 має досить "негустий" спектр, то вона є тотожнім нулем. Це можна інтерпретувати також як твердження про те, що функція та її перетворення Фур'є не можуть одночасно бути дуже малими. Такого типу твердження відомі також як "принцип невизначеності в гармонічному аналізі" і отримали досить повний виклад в монографії [3]. Метою цього дослідження є отримання твердження про наслідування поведінки на дійсній півосі суми функцій кожним з доданків при певних умовах на ці функції та їх перетворення Лапласа (чи Фур'є).

1 Основний результат

Введемо позначення $D_{\alpha,\beta} = \{z : \mathrm{Re} z < 0, \alpha < \mathrm{Im} z < \beta\}$, $D^*_{\alpha,\beta} = \mathbb{C}\backslash\overline{D}_{\alpha,\beta}$, $\alpha < \beta$. Через $E^p[D_{\alpha,\beta}]$ та $E^p_*[D_{\alpha,\beta}]$, $1 \le p < +\infty$, позначимо простори функцій f, аналітичних відповідно в $D_{\alpha,\beta}$ і $D^*_{\alpha,\beta}$, для яких

$$\sup\left\{\int_\gamma |f(z)|^p|dz|\right\} < +\infty,$$

УДК 517.5
2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D10, 30H10, 35S30.

де супремум береться за всіма відрізками γ, що лежать відповідно в $D_{\alpha,\beta}$ і $D^*_{\alpha,\beta}$. Функції f з цих просторів мають майже скрізь [4] на ∂D_σ кутові граничні значення, які ми теж позначаємо через $f(z)$ і $f \in L^p[\partial D_{\alpha,\beta}]$. Також для фіксованого $\sigma > 0$ позначимо $D_1 = D_{-2\sigma,0}$, $D_1^* = D^*_{-2\sigma,0}$, $D_3 = D_{0,2\sigma}$, $D_3^* = D^*_{0,2\sigma}$.

Теорема 1. *Нехай*

$$q_j(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \Omega_j(x) e^{-xw} dx, j \in \{1;3\}, \tag{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln|\Omega_j(x)|}{x} = -\infty, \quad j \in \{1;3\}, \tag{2}$$

$$(\Omega_1(x) + \Omega_3(x))\, e^{ax\ln x} \in L^2(0;+\infty),\, a > 0, \tag{3}$$

причому q_1, q_3 *є такими цілими функціями, що* $q_1 \in E^2_*[D_1]$, $q_3 \in E^2_*[D_3]$. *Тоді для кожної незростаючої функції* $\varkappa : (0;+\infty) \to (-\infty;0)$, *такої що* $\varkappa(x) = O(x)$, $x \to +\infty$, *при деякому* $c \in \mathbb{R}$

$$\Omega_1(x) \in L^2(0;+\infty) e^{cz} e^{x\varkappa(x)} \exp\left\{\frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}}\right\}, \tag{4}$$

$$\Omega_3(x) \in L^2(0;+\infty) e^{cz} e^{x\varkappa(x)} \exp\left\{\frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}}\right\}.$$

Умови (2) і (3) зустрічаються в теорії циклічних функцій у вагових просторах Гарді [7]. Нижче показано, що умова (2) є істотною в теоремі 1. Нам не відомо, чи можна послабити інші умови на функції Ω_1, Ω_3 або їх перетворення Фур'є.

2 Доведення основного результату

Б. Винницький [5] розглянув простір $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), \sigma \geq 0, 1 \leq p < +\infty$, аналітичних в $\mathbb{C}_+ := \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ функцій, для яких

$$\sup_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|} dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Функції з цього простору мають майже скрізь на $i\mathbb{R}$ кутові граничні значення, які також позначаємо через f і $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$. Для випадку $\sigma = 0$, як показав А.М. Седлецький в [11], $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ співпадає з простором Гарді в правій півплощині $H^p(\mathbb{C}_+)$.

Лема 1 ([5]). *Рівність*

$$G(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_\sigma} g(w) e^{zw} dw$$

визначає бієкцію між просторами $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+) \ni G$ *і* $E^2_*[D_\sigma] \ni g$. *Також справджується двоїста формула*

$$g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} G(x) e^{-xw} dx.$$

Зауважимо, що в формулюванні теореми 1 умови $q_1 \in E_*^2[D_1]$, $q_3 \in E_*^2[D_3]$ можуть бути замінені еквівалентними їм внаслідок леми 1 умовами $\Omega_1(z)e^{-i\sigma z} \in H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$, $\Omega_3(z)e^{i\sigma z} \in H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$.

Доведення теореми 1. З леми 1 випливає, що для функцій, визначених рівністю (1), при виконанні умов $q_1 \in E_*^2[D_1]$, $q_3 \in E_*^2[D_3]$ справджуються рівності

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_j} q_j(w)e^{zw}dw, \quad j \in \{1;3\}.$$

Покажемо, що функція q_1 є цілою. Справді, з умови (2) маємо, що $|\Omega_1(x)| = e^{x\eta(x)}$, причому $\eta(x) \to -\infty$ при $x \to -\infty$. Тому інтеграл в правій частині рівності (1) при $j = 1$ збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті з $\mathbb{C}$. Аналогічно з умови (2) маємо, що q_3 — ціла. Розглянемо функцію $\Omega_2 = -\Omega_1 - \Omega_3$. Тоді визначимо q_2 рівністю (1), поклавши в ній $j = 2$. Легко бачити, що на множині визначення функцій справедлива рівність $q_2 = -q_1 - q_3$ і тому q_2 — теж ціла. Звідси одержимо зображення

$$\Omega_1(z) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_1} (q_2(w) + q_3(w))e^{zw}dw.$$

Але за означенням просторів маємо $E_*^2[D_3] \subset E^2[D_1]$, тому $q_3 \in E^2[D_1]$. З цього випливає, що $q_3(w)e^{wz} \in E^1[D_1]$ для кожного $z \in \mathbb{C}_+$, тому з [9] одержимо

$$\int\limits_{\partial D_1} q_3(w)e^{zw}dw = 0, z \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси маємо

$$\Omega_1(z) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial D_1} q_2(w)e^{zw}dw.$$

Оскільки, як відмічено вище, q_2 є цілою функцією, то і функція $q_2(w)e^{zw}$ — ціла для кожного $z \in \mathbb{C}_+$. Тому вона аналітична в замиканнні кожного прямокутника $M_{\varkappa(x)} := \{w : w \in D_1, \operatorname{Re}z > \varkappa(x)\}$. Скориставшись інтегральною теоремою Коші для $M_{\varkappa(x)}$, маємо

$$\int\limits_{\partial M_{\varkappa(x)}} q_2(w)e^{zw}dw = 0.$$

Тому для кожного $z \in \mathbb{C}_+$ справджується формула

$$\Omega_1(z) = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial(D_1 \backslash M_{\varkappa(x)})} q_2(w)e^{zw}dw, z \in \mathbb{C}_+.$$

Звідси для $x > 0$ маємо

$$|\Omega_1(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\partial(D_1 \backslash M_{\varkappa(x)})} |q_2(w)|e^{xu}|dw| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(I_1 + I_2 + I_3),$$

де $w = u + iv$, $k < 0$. З властивостей просторів $E^2_*[D_{\alpha,\beta}]$ випливає [5], що $q_1(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$ і $q_3(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$. Тому також $q_2(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$. Тоді з нерівності Шварца, врахувавши, що $q_2(u - 2i\sigma) \in L^2(-\infty; 0)$, для $x > 0$ одержимо

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} |q_2(u - 2i\sigma)| e^{xu} du \le \left(\int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} |q_2(u - 2i\sigma)|^2 du \cdot \int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} e^{2xu} du \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le \left(\int\limits_{-\infty}^{0} |q_2(u - 2i\sigma)|^2 du \cdot \frac{\exp(2x\varkappa(x))}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c_1}{\sqrt{x}} \exp(x\varkappa(x)).$$

Аналогічно одержимо нерівність

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{\varkappa(x)} |q_2(u)| e^{xu} du \le \frac{c_2}{\sqrt{x}} \exp(x\varkappa(x)),\ x > 1.$$

Далі, скориставшись теоремою Фубіні, маємо

$$I_2 = \int\limits_{-2\sigma}^{0} |q_2(\varkappa(x) + iv)| e^{x\varkappa(x)} dv = \exp(x\varkappa(x)) \int\limits_{-2\sigma}^{0} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \Omega_2(t) e^{-t(\varkappa(x)+iv)} dt \right| dv$$
$$\le \frac{\exp(x\varkappa(x))}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2\sigma}^{0} \int\limits_{0}^{+\infty} \left| \Omega_2(t) e^{-t\varkappa(x)} \right| dt dv$$
$$\le \frac{\exp(x\varkappa(x))}{\sqrt{2\pi}} 2\sigma \left(\int\limits_{0}^{+\infty} \left| \Omega_2(t) e^{at\ln t} \right|^2 dt \cdot \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2at\ln t - 2t\varkappa(x)} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\le c_3 \exp(x\varkappa(x)) \left(\exp\left\{ -\frac{\varkappa(x)}{2a} \right\} \exp\left\{ \frac{2a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}} \right\} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= c_3 \exp\left\{ x\varkappa(x) - c_4\varkappa(x) + \frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{2a}} \right\}.$$

Передостанній перехід випливає (див. [8, с. 323]) з асимптотичної рівності

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2at\ln t - 2t\varkappa(x)} dt = \sqrt{\frac{\pi}{ae}} \exp\left\{ -\frac{\varkappa(x)}{2a} \right\} \exp\left\{ \frac{2a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}} \right\} (1 + o(1)),\ x \to +\infty.$$

Тому для деяких невід'ємних сталих c_5, c_6 маємо

$$|\Omega_1(x)| \le c_5 e^{x\varkappa(x) - c_6\varkappa(x)} \exp\left\{ \frac{a}{e} e^{-\frac{\varkappa(x)}{a}} \right\}, \quad x > 0, \tag{5}$$

з чого випливає перша з доводжуваних формул, а друга доводиться аналогічно. $\square$

3 Аналіз основної теореми

Цікавим для застосувань є випадок, коли останній множник в (4) дає незначний вклад в оцінку. Зокрема, коли $\varkappa(x) = \frac{2\sigma}{\pi} \ln x$ і $a = \frac{2\sigma}{\pi}$, можна одержати точніше твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (2) *та* (3), *причому* $q_1 \in E_*^2[D_1]$, $q_3 \in E_*^2[D_3]$. *Тоді знайдеться таке* $c \in \mathbb{R}$, *що*

$$\Omega_1(z)e^{-i\sigma z}e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+), \quad \Omega_3(z)e^{i\sigma z}e^{\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z}e^{-cz} \in H^2(\mathbb{C}_+), \tag{6}$$

де $\ln z$ *— головне значення логарифма в* $\mathbb{C}_+$.

Доведення. Скористаємось теоремою типу Фрагмена-Ліндельофа (див. [9, 10]) для функції $\varphi_1(z) = \Omega_1(z)\exp\left\{-\frac{2\sigma}{\pi}z\ln z\right\}e^{-i\sigma z}e^{-c_5 z}$. Справді, з (5) одержимо $\varphi_1(x)e^{-\varepsilon x} \in L^2(0;+\infty)$, $\varepsilon > 0$. Оскільки також за умовами теореми і лемою 1 $\Omega_1(z)e^{-i\sigma z} \in H_\sigma^2(\mathbb{C}_+)$, то для кожного $\gamma \in (1;2]$

$$(\forall \varepsilon > 0): \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} \left|\varphi_1(re^{i\varphi})\right|^2 \exp\left\{-\varepsilon r^\gamma\right\} dr \right\} < +\infty.$$

Легко бачити також, що $\varphi_1 \in L^2[i\mathbb{R}]$. З цього випливає, що $\varphi_1 \in H^2(\mathbb{C}_+)$. Цим доведено виконання першої з умов (6), а друга доводиться аналогічно. □

Зауваження 1. *Теорема 1 перестає справджуватися, якщо опустити в ній умову* (2).

Доведення. Розглянемо функцію $f(w) = \exp(-e^{-\frac{\pi}{2\sigma}w})e^w$. Очевидно, $f \in E^2[D_\sigma]$. Позначимо

$$F_j(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{l_j} f(w)e^{-wz}dw,\ j \in \{1;2;3\},$$

де l_1, l_2, l_3 — сторони ∂D_σ (відповідно півпряма, що лежить під дійсною віссю, відрізок $[-i\sigma, i\sigma]$ і півпряма, що лежить над дійсною віссю), орієнтація яких узгоджена з додатнім обходом ∂D_σ. За теоремою Пелі-Вінера функція F_2 належить простору Пелі-Вінера W_σ^2, тобто є цілою функцією, для якої виконується умова

$$\sup_{0<\varphi<2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F_2(re^{i\varphi})|^p e^{-pr\sigma|\sin\varphi|}dr \right\} < +\infty.$$

Також позначимо $\Omega_j(z) = \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}z\log z\right)F_j(z)$, $j \in \{1;2;3\}$. Тоді теж будемо мати $\Omega_2 = -\Omega_1 - \Omega_3$ і тому умова (3) виконується. Також справджуються зображення

$$\Omega_1(z) = \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}z\log z\right) \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-e^{-\frac{\pi}{2\sigma}(u-i\sigma)}\right) e^{u-i\sigma}e^{-(u-i\sigma)z}du,$$

$$\Omega_3(z) = \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}z\log z\right) \int_{0}^{-\infty} \exp\left(-e^{-\frac{\pi}{2\sigma}(u+i\sigma)}\right) e^{u+i\sigma}e^{-(u+i\sigma)z}du,$$

тобто

$$\Omega_1(z) = \exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}z\log z\right) e^{-i\sigma}e^{i\sigma z} \int_{-\infty}^{0} \exp\left(-ie^{-\frac{\pi u}{2\sigma}}\right) e^u e^{-uz}du,$$

$$\Omega_3(z) = -\exp\left(-\frac{2\sigma}{\pi}z\log z\right) e^{i\sigma}e^{-i\sigma z} \int_{-\infty}^{0} \exp\left(ie^{-\frac{\pi u}{2\sigma}}\right) e^u e^{-uz}du.$$

В [6] показано, що для деякої сталої $c \in \mathbb{R}$ виконується $\Omega_1(z)e^{i\sigma z}e^{-cz} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$, $\Omega_3(z)e^{-i\sigma z}e^{-cz} \in H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$. Тому з леми 1 випливає, що Ω_1 і Ω_3 задовільняють всім умови теореми 1 крім, можливо, умови (2). Але (див. [7]) для цієї пари функцій твердження теореми не справджується. Отже, для них умова (2) не виконується. □

4 Висновки

Нами одержано оцінки на дійсній осі для пари функцій при незначних обмеженнях (2) на кожну з них та жорстких обмеженнях на їх суму (3). Показано, що для часткового випадку $\varkappa(x) = \frac{2\sigma}{\pi}\ln x$, $a = \frac{2\sigma}{\pi}$ кожна з функцій в певному сенсі наслідує поведінку суми на дійсній осі. Також одержано оцінки вказаних функцій у правій півплощині. Вказано на істотність умови (2) теореми 1. Одержані результати можуть бути використані в теорії аналітичних функцій, зокрема при дослідженні просторів типу Гарді.

References

[1] Mandelbrojt S. Quasianalytical classes of functions. Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1937. (in Russian)

[2] Levin B.Ja. Distribution of zeros of entire functions. Gostekhizdat, Moscow, 1956. (in Russian)

[3] Jöricke B., Khavin V.P. The uncertainty principle in harmonic analysis. In: Commutative harmonic analysis III, Itogi nauki i tekhniki, Ser. Sovrem. Probl. Mat., Fundam. Napravleniya, 72. VINITI, Moscow, 1991.

[4] Vynnyts'kyi B., Dil'nyi V. *On necessary conditions for the existence of solutions of one convolution-type equation*. Mat. Stud. 2001, **16** (1), 61–70. (in Ukrainian)

[5] Vinnitskii B. *On zeros of functions analytic in a half plane and completeness of systems of exponents*. Ukrainian Math. J. 1994, **46** (5), 514–532. doi:10.1007/BF01058515 (translation of Ukrain. Mat. Zh. 1994, **46** (5), 484–500. (in Ukrainian))

[6] Vinnitskii B. *Solutions of gomogeneous convolution equation in one class of functions analytical in a semistrip*. Mat. Stud. 1997, **7** (1), 41–52. (in Ukrainian)

[7] Dilnyi V. *On Cyclic Functions In Weighted Hardy Spaces*. Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. 2011, **7** (1), 19–33.

[8] Martirosian V. *On a Theorem of Djrbashian of the Phragmen-Lindelof Type*. Math. Nachr. 1989, **144** (1), 21–27. doi:10.1002/mana.19891440103

[9] Fedoryuk.M. Asymptotics, integrals and series. Nauka, Moscow, 1987. (in Russian)

[10] Vynnyts'kyi B., Dil'nyi V. *On solutions of homogeneous convolution equation generated by singularity*. Mat. Stud. 2003, **19** (2), 149–155.

[11] Sedletskii A.M. *An equivalent definition of spaces in the half-plane and some applications*. Math. Sb. USSR 1975, **25** (1), 69–76. doi:10.1070/SM1975v025n01ABEH002198

Надійшло 11.01.2014

Dilnyi V.M., Viychuk T.I. *A realization of the uncertainty principle*. Carpathian Math. Publ. 2015, **7** (1), 66–71.

We obtain the statement about the imitation behavior of the sum of functions on the real half-line by each of the summands under some conditions for these functions and their Laplace transforms.

Key words and phrases: the uncertainty principle, Hardy space, Fourier transform.