КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 517.9:519.3

В.Е. КАПУСТЯН, И.С. ЛАЗАРЕНКО, И.Д. ФАРТУШНЫЙ

АСИМПТОТИКИ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрена векторная сингулярно возмущенная параболическая периодическая краевая задача в критическом случае. Изучен вопрос построения и обоснования асимптотик глобально ограниченных оптимальных управлений для модифицированной краевой задачи.

Введение. В данной работе рассматриваются задачи оптимального управления для векторных сингулярно возмущенных параболических периодических задач в критическом случае. Ограничения на управления носят глобальный (интегральный) характер. Критичность сингулярно возмущенной краевой задачи, согласно [1], состоит в том, что вырожденная задача имеет непустое ядро размерностью два. В этом случае выяснено, что для решения краевой задачи условий оптимальности точка ε=0 является полюсом конечной кратности. Сингулярность задачи сосредоточена на образующих ядра.

Для получения асимптотик указанной задачи в классе ограниченных функций нужно подправить формулировку самой задачи, удалив образующие ядра. Для полученной таким образом новой задачи стандартными алгоритмами [1] построены и обоснованы асимптотики произвольного порядка точности, которые являются и асимптотиками для исходной задачи. Случай скалярного уравнения рассмотрен в [2].

Постановка задачи. Анализ условий оптимальности. Пусть в некоторой области $Q=\{(x,t): x\in[0,1],\ t\in T=[0,2\pi]\}$ управляемый процесс описывается вектор-функцией $(y^\varepsilon(x,\ t))'=\{y_1^\varepsilon(x,\ t),\ y_2^\varepsilon(x,\ t)\}$, которая удовлетворяет краевой задаче

$$D_\varepsilon\, y^\varepsilon(x,t) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 y^\varepsilon(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial y^\varepsilon(x,t)}{\partial t} = A\, y^\varepsilon(x,t) + g(x)\, u(t) + f(x,t)\,, \quad (1)$$

$$y^\varepsilon(0,t) = y^\varepsilon(1,t) = 0,\ y^\varepsilon(x,0) = y^\varepsilon(x,2\pi)\,, \quad (2)$$

где

$$u(t) \in L_2(t); (f(x,t))' = \{f_1(x,t), f_2(x,t)\} \in L_2^2(Q);\ (g(x))' = \{g_1(x), g_2(x)\} \in L_2^2(0,1); 0 < \varepsilon << 1;$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При фиксированных ε и $u(t)$ краевая задача (1) – (2) имеет единственное решение $y^\varepsilon(x,t) \in (\overset{0}{W}{}^{2,1}_{2,per}(Q))^2$, где $\overset{0}{\mathrm{W}}{}^{2,1}_{2,\mathrm{per}}(\mathrm{Q})$ – функции из $W_2^{2,1}(Q)$ с краевыми условиями (2).

Требуется найти управление $u_*^\varepsilon(t) \in U$, доставляющее наименьшее значение функционалу

$$I(u) = 0.5\Big(\int\limits_Q \left\| y^\varepsilon(x,t) - z(x,t) \right\|_{R^2}^2 dxdt + \int\limits_T u^2(t)dt\Big)\,, \quad (3)$$

где $(z(x,t))' = \{z_1(x,t), z_2(x,t)\} \in L_2^2(Q)$, $U = \left\{ \upsilon \in L_2(T) : \|\upsilon\|_{L_2(T)} \le 1 \right\}$.

При фиксированном ε задача (1) – (3) имеет единственное решение $u_*^\varepsilon(t)$, для которого выполняется одна из альтернатив: $i)$ $\|u_*^\varepsilon\| = 1$, $ii)$ $\|u_*^\varepsilon\| < 1$. Далее предположим, что если при некотором ε_0 имеет место одна из указанных альтернатив, то она справедлива и при $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Пусть имеет место альтернатива $i)$. Тогда оптимальное управление $u_*^\varepsilon(t)$ удовлетворяет необходимым и достаточным условиям оптимальности [3].

$$D_\varepsilon y_*^\varepsilon(x,t) = A\, y_*^\varepsilon(x,t) - \lambda_*^\varepsilon\, g(x) \quad (g(.), p_*^\varepsilon(.,t)) + f(x,t)\,, \quad (4)$$

$$D'_\varepsilon p_*^\varepsilon(x,t) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p_*^\varepsilon(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial p_*^\varepsilon(x,t)}{\partial t} = A'\, p_*^\varepsilon(x,t) + y_*^\varepsilon\,(x,t) - z(x,t)\,, (5)$$

$$p_*^\varepsilon(0,t) = p_*^\varepsilon(1,t) = 0,\ p_*^\varepsilon(x,0) = p_*^\varepsilon(x,2\pi)\,, \quad (6)$$

причем, функция $y_*^\varepsilon(x,t)$ удовлетворяет краевым условиям (2), $u_*^\varepsilon(t) = -\lambda_*^\varepsilon\big(g(.), p_*^\varepsilon(.,t)\big)$, $p^\varepsilon(x,t) \in \left(\overset{0}{W}{}^{2,1}_{2,per}(Q)\right)^2$, где $(.,.)$ – скалярное произведение в $L_2^2(0,\ 1)$, $\lambda_*^\varepsilon \in (0,1)$. Получим априорные оценки для решений задачи (4)–(6). Точнее, имеет место

Лемма 1. Пусть $z^{\varepsilon}(x,t) \in \left(\overset{0}{W}{}^{2,1}_{2,per}(Q) \right)^2$. Тогда для единственного решения задачи (4)–(6) справедливы неравенства

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial y_*^{\varepsilon}}{\partial x} \right\| + \left\| y_*^{\varepsilon} \right\| \le C \ \ \varepsilon^{-2} \left(\|f\| + \|z\|_{\overset{0}{W}{}^{2,1}_{2,per}(Q)} \right),$$

$$\left\| \frac{\partial p_*^{\varepsilon}}{\partial x} \right\| + \left\| p_*^{\varepsilon} \right\| \le C \ \ \varepsilon^{-4} \left(\|f\| + \|z\|_{\overset{0}{W}{}^{2,1}_{2,per}(Q)} \right), \tag{7}$$

где $\| \, . \, \|$ – норма в $L_2^2(Q)$.

Доказательство. При выполнении предположения леммы задачу (1)–(6) запишем в эквивалентном виде

$$D_{\varepsilon} Y_*^{\varepsilon}(x,t) = A\, Y_*^{\varepsilon}(x,t) - \lambda_*^{\varepsilon}\, g(x)(g(.), p_*^{\varepsilon}(.,t)) + \Phi^{\varepsilon}(x,t),$$

$$Y_*^{\varepsilon}(0,t) = Y_*^{\varepsilon}(1,t) = 0, \ \ Y_*^{\varepsilon}(x,0) = Y_*^{\varepsilon}(x,2\pi),$$

$$D'_{\varepsilon} p_*^{\varepsilon}(x,\ t) = \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p_*^{\varepsilon}(x,\ t)}{\partial x^2} + \frac{\partial p_*^{\varepsilon}(x,\ t)}{\partial t} = A' \ \ p_*^{\varepsilon}(x,\ t) + Y_*^{\varepsilon}(x,\ t),$$

$$p_*^{\varepsilon}(0,t) = p_*^{\varepsilon}(1,t) = 0, \ \ p_*^{\varepsilon}(x,0) = p_*^{\varepsilon}(x,2\pi), \tag{8}$$

где $Y_*^{\varepsilon}(x,\ t) = y_*^{\varepsilon}(x,\ t) - z(x,\ t),\ \Phi^{\varepsilon}(x,\ t) = f(x,\ t) + Az(x,\ t) - D_{\varepsilon} z(x,t)$.

Для задачи (8) стандартными оценками [4] получим интегральные тождества

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial Y_*^{\varepsilon}}{\partial x} \right\|^2 = -\int_Q (Y_*^{\varepsilon}(x,t))'\, \Phi^{\varepsilon}(x,t)\, dxdt + \lambda_*^{\varepsilon} \int_T (g(.), Y_*^{\varepsilon}(.,t))(g(.), p_*^{\varepsilon}(.,t))dt, \tag{9}$$

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial p_*^{\varepsilon}}{\partial x} \right\|^2 = -\int_Q (Y_*^{\varepsilon}(x,\ t))' \ \ p_*^{\varepsilon}(x,\ t)\, dx\, dt, \tag{10}$$

$$\left\| Y_*^{\varepsilon} \right\|^2 + \lambda_*^{\varepsilon} \int_0^{2\pi} (g(.), p_*^{\varepsilon}(\, .\, ,t))^2 dt = \int_Q (p_*^{\varepsilon}(x,\ t))' \ \ \Phi^{\varepsilon}(x,\ t) dx\, dt. \tag{11}$$

В тождествах (9)–(10) учтено, что $x'Ax = 0, \forall\, x \in R^2$.

Из формулы (11) получим неравенства

$$\left\| Y_*^{\varepsilon} \right\|^2 \le \left\| p_*^{\varepsilon} \right\| \, \left\| \Phi^{\varepsilon} \right\|, \tag{12}$$

$$(\lambda_*^{\varepsilon})^{1/2} \left\| (g(.),\ p_*^{\varepsilon}(.,\ t)) \right\|_{L_2(T)} \le \left\| p_*^{\varepsilon} \right\| \, \left\| \Phi_{\varepsilon} \right\|, \tag{13}$$

а из тождества (10) будем иметь оценку

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial p_*^\varepsilon}{\partial x} \right\|^2 \le \left\| Y_*^\varepsilon \right\| \left\| p_*^\varepsilon \right\| \le \left\| Y_*^\varepsilon \right\| \left\| \frac{\partial p_*^\varepsilon}{\partial x} \right\|.$$

Отсюда и формулы (12) получим

$$\left\| p_*^\varepsilon \right\| + \left\| \frac{\partial p_*^\varepsilon}{\partial x} \right\| \le \varepsilon^{-4} \left\| \Phi_\varepsilon \right\|,$$

$$\left\| Y_*^\varepsilon \right\| \le \varepsilon^{-2} \left\| \Phi_\varepsilon \right\|, \tag{14}$$

Из тождества (9) и неравенства (13), (14) находим оценку

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{\partial Y_*^\varepsilon}{\partial x} \right\|^2 \le \left\| Y_*^\varepsilon \right\| \left\| \Phi_\varepsilon \right\| + \sqrt{\lambda_*^\varepsilon} \left\| g \right\|_{L_2^2(0,1)} \left\| Y_*^\varepsilon \right\| \left\| g(.),\ p_*^\varepsilon(.,\ t) \right\|_{L_2(T)} \le C\ \varepsilon^{-4} \left\| \Phi_\varepsilon \right\|^2.$$

или

$$\varepsilon \left\| \frac{\partial Y_*^\varepsilon}{\partial x} \right\| \le C\, \varepsilon^{-2} \left\| \Phi_\varepsilon \right\|. \tag{15}$$

Так как

$$\left\| \Phi_\varepsilon \right\| \le \left\| f \right\| + \left\| z \right\| + \left\| D_\varepsilon z \right\| \le C \left(\left\| f \right\| + \left\| z \right\|_{\overset{0}{W}{}^{2,1}_{2,per}(Q)} \right),$$

$$\left\| y_*^\varepsilon \right\| \le \left\| Y_*^\varepsilon \right\| + \left\| z \right\|,$$

то отсюда и оценок (14)–(15) получим нужный результат.

Из леммы следует, что точка $\varepsilon = 0$ для условий оптимальности (4)–(6) является полюсом. Поэтому искать их решение в классе ограниченных по ε функций не представляется возможным.

Выясним более детальную структуру зависимости решения задачи (4)–(6) от параметра ε.

Теорема 1. Предположим, что вектор-функции $f(x,t), z(x,t)$ исходной задачи 2π периодичны по t, т.е. для них выполняется равенство

$$\lim_{t \to 0+} \int_0^1 h_i(x,t)\, \varphi_i(x) dx = \lim_{t \to 2\pi-} \int_0^1 h_i(x,t)\, \varphi_i(x) dx,$$

$$\forall \varphi_i(x) \in L_2(0,1),\ i = \overline{1,2},$$

где символ h принимает значения f, z.

Для того, чтобы решение задачи (4 –(6) было ограниченным относительно параметра ε, что эквивалентно выполнению векторных равенств

$$\int_T y_*^\varepsilon(x,t)\exp(-k\,i\,t)\,dt = \alpha_k^\varepsilon(x)\,,$$

$$\int_T p_*^\varepsilon(x,t)\exp(-k\,i\,t)\,dt = \beta_k^\varepsilon(x)\ \forall x\in[0,1], |k|=1\,, \tag{16}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_T r_1(x,t)\cos t\,dt + \int_T r_2(x,t)\sin t\,dt = 0\,,$$

$$\int_T r_1(x,t)\sin t\,dt - \int_T r_2(x,t)\cos t\,dt = 0\,, \tag{17}$$

почти для всех x, где символ r принимает значения f и z, а функции $\alpha_k^\varepsilon(x), \beta_k^\varepsilon(x)$ – решение сингулярно возмущенной системы

$$\varepsilon^2\frac{d^2\alpha_k^\varepsilon(x)}{dx^2} - k\,i\,\alpha_k^\varepsilon(x) = A\,\alpha_k^\varepsilon(x) - \lambda_*^\varepsilon\,g(x)(g,\beta_k^\varepsilon) + \Xi\,f_{k,2}(x)\,,$$

$$\alpha_k^\varepsilon(0) = \alpha_k^\varepsilon(1) = 0\,; \tag{18}$$

$$\varepsilon^2\frac{d^2\beta_k^\varepsilon(x)}{dx^2} + k\,i\,\beta_k^\varepsilon(x) = A'\,\beta_k^\varepsilon(x) + \alpha_k^\varepsilon(x) - \Xi\,z_{k,2}(x)\,,$$

$$\beta_k^\varepsilon(0) = \beta_k^\varepsilon(1) = 0,\ |\,k\,| = 1\,, \tag{19}$$

причем $\Xi' = (i,1), i^2 = -1,$

$$f_{k,2}(x) = \int_T f_2(x,\ t)\ \exp(-kit)\ dt,\ z_{k,2}(x) = \int_T z_2(x,\ t)\ \exp(-kit)dt\,.$$

При этом для решения задачи (4)–(5) имеют место оценки

$$\varepsilon^2\left\|\frac{\partial^2 R^\varepsilon}{\partial x^2}\right\| + \varepsilon\left\|\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial R^\varepsilon}{\partial t}\right\| + \left\|R^\varepsilon\right\| \le C(\|f\| + \|z\|)\,, \tag{20}$$

где символ R^ε принимает значения $y_*^\varepsilon,\ p_*^\varepsilon$.

Доказательство. При выполнении предположений теоремы задача (4), (2), (5), (6) имеет альтернативное представление

$$\varepsilon^2\frac{d^2\alpha_k^\varepsilon(x)}{dx^2} - k\,i\,\alpha_k^\varepsilon(x) = A\,\alpha_k^\varepsilon(x) - \lambda_*^\varepsilon\,g(x)(g,\beta_k^\varepsilon) + f_k(x)\,,$$

$$\alpha_k^\varepsilon(0) = \alpha_k^\varepsilon(1) = 0\,; \tag{21}$$

$$\varepsilon^2 \frac{d^2\beta_k^\varepsilon(x)}{dx^2} + k\, i\, \beta_k^\varepsilon(x) = A'\,\beta_k^\varepsilon(x) + \alpha_k^\varepsilon(x) - z_k(x),$$

$$\beta_k^\varepsilon(0) = \beta_k^\varepsilon(1) = 0, \tag{22}$$

где $\alpha_k^\varepsilon(x), \beta_k^\varepsilon(x), f_k(x), z_k(x)$ – коэффициенты Фурье вектор-функций $y_*^\varepsilon(x,\ t),\ p_*^\varepsilon(x,\ t),\ f(x,\ t),\ z(x,\ t)$ по системе $\{\exp(kit)\}$, $k = 0,\ \pm 1,$ $\pm 2,\ \ldots$. Из формул (21)–(22) при $k = 0$ получим систему интегральных тождеств

$$\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\|^2 = \lambda_*^\varepsilon(g, \beta_0^\varepsilon)\int_0^1 (\alpha_0^\varepsilon(x))' A' g(x)dx - \int_0^1 (\alpha_0^\varepsilon(x))' A' f_0(x)dx, \tag{23}$$

$$\left\|\beta_0^\varepsilon\right\|^2 = -\int_0^1 (\beta_0^\varepsilon(x))' A(\alpha_0^\varepsilon(x) - z_0(x))dx, \tag{24}$$

$$\varepsilon^2 \left\|\frac{d\alpha_0^\varepsilon}{dx}\right\|^2 = -\int_0^1 (\alpha_0^\varepsilon(x))' f_0(x)dx + \lambda_*^\varepsilon(g, \alpha_0^\varepsilon)(g, \beta_0^\varepsilon), \tag{25}$$

$$\varepsilon^2 \left\|\frac{d\beta_0^\varepsilon}{dx}\right\|^2 = -\int_0^1 (\beta_0^\varepsilon(x))'(\alpha_0^\varepsilon(x) - z_0(x))dx, \tag{26}$$

$$\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\|^2 + \lambda_*^\varepsilon(g, \beta_0^\varepsilon)^2 = \int_0^1 (\beta_0^\varepsilon(x))' f_0(x)dx + \int_0^1 (\alpha_0^\varepsilon(x))' z_0(x)dx, \tag{27}$$

где через $\|\,.\,\|$ обозначено норму в $L_2^2(0, 1)$.

Из формулы (27) вытекают оценки

$$\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\|^2 \le \left(\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\| + \left\|\beta_0^\varepsilon\right\|\right)\left(\left\|f_0\right\| + \left\|z_0\right\|\right), \tag{28}$$

$$\left(\lambda_*^\varepsilon\right)^{1/2}\left|\left(g,\ \beta_0^\varepsilon\right)\right| \le \left(\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\| + \left\|\beta_0^\varepsilon\right\|\right)^{1/2}\left(\left\|f_0\right\| + \left\|z_0\right\|\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Тогда из (24), (28) получим

$$\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\|^2 \le \left(\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\| + \left\|\beta_0^\varepsilon\right\|\right)\left(\left\|f_0\right\| + \left\|z_0\right\|\right) \le 2\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\|\left(\left\|f_0\right\| + \left\|z_0\right\|\right) + \left(\left\|f_0\right\| + \left\|z_0\right\|\right)^2.$$

Отсюда следуют оценки

$$\left\|\alpha_0^\varepsilon\right\| + \left\|\beta_0^\varepsilon\right\| \le C\ \left(\left\|f_0\right\| + \left\|z_0\right\|\right). \tag{30}$$

Тождество (23) с учетом (29)–(30) снова приводит к оценке (30). Тождества (25)–(26) показывают, что точка $\varepsilon = 0$ является простым полюсом для первых производных нулевых составляющих решений условий оптимальности. Таким образом, нулевые составляющие решений условий оптимальности ограничены относительно ε. Аналогичные оценки получаются и при $|k| > 1$.

Построим решение системы (21) – (22) при $k = 1$. С этой целью положим

$$A_{1,1}^{\varepsilon}(x) = \alpha_{1,1}^{\varepsilon}(x) - i\,\alpha_{1,2}^{\varepsilon}(x),\ \overline{G}(x) = g_1(x) - i\,g_2(x),\ F_1(x) = f_{1,1}(x) - i\,f_{1,2}(x).$$

Тогда, согласно (21), функция $A_{1,1}^{\varepsilon}(x)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 A_{1,1}^{\varepsilon}(x)}{dx^2} = -\lambda_*^{\varepsilon}\,\overline{G}(x)\left(g, \beta_1^{\varepsilon}\right) + F_1(x),$$

$$A_{1,1}^{\varepsilon}(0) = A_{1,1}^{\varepsilon}(1) = 0,$$

которое задается формулой

$$A_{1,1}^{\varepsilon}(x) = \frac{\lambda_*^{\varepsilon}(g, \beta_1^{\varepsilon})}{\varepsilon^2}\wp_{1,1}(x, \overline{G}) - \frac{1}{\varepsilon^2}\wp_{1,1}(x, F_1), \tag{31}$$

где

$$\wp_{1,1}(x, \Psi) = x\int_0^1 \Psi(\xi)(1-\xi)d\xi - \int_0^x \Psi(\xi)(x-\xi)d\xi,\ \forall\Psi \in L_2(0,1).$$

Положим далее

$$B_{1,1}^{\varepsilon}(x) = \beta_{1,1}^{\varepsilon}(x) - i\,\beta_{1,2}^{\varepsilon}(x),\ \ Z_1(x) = z_{1,1}(x) - i\,z_{1,2}(x).$$

Тогда, согласно (22), функция $B_{1,1}^{\varepsilon}(x)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 B_{1,1}^{\varepsilon}(x)}{dx^2} = A_{1,1}^{\varepsilon}(x) - Z_1(x), \quad B_{1,1}^{\varepsilon}(0) = B_{1,1}^{\varepsilon}(1) = 0,$$

которое имеет вид

$$B_{1,1}^{\varepsilon}(x) = \frac{\lambda_*^{\varepsilon}(g, \beta_1^{\varepsilon})}{\varepsilon^4}\wp_{1,2}(x, \overline{G}) - \frac{1}{\varepsilon^4}\wp_{1,2}(x, F_1) + \frac{1}{\varepsilon^2}\wp_{1,1}(x, Z_1), \tag{32}$$

где

$$\wp_{1,2}(x, \Psi) = -\wp_{1,1}(x, \wp_{1,1}(.,\Psi)).$$

Положим далее

$$A_{1,2}^{\varepsilon}(x) = \alpha_{1,1}^{\varepsilon}(x) + i\,\alpha_{1,2}^{\varepsilon}(x),\ \ F_2(x) = f_{1,1}(x) + i\,f_{1,2}(x).$$

Тогда функция $A_{1,2}^{\varepsilon}(x)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 A_{1,2}^{\varepsilon}(x)}{dx^2} - 2\,i\,A_{1,2}^{\varepsilon}(x) = -\lambda_*^{\varepsilon}\,G(x)\left(g, \beta_1^{\varepsilon}\right) + F_2(x),$$

$$A_{1,2}^{\varepsilon}(0) = A_{1,2}^{\varepsilon}(1) = 0\,. \tag{33}$$

Если $\left(g, \beta_1^{\varepsilon}\right) < \infty$, то $\left\|A_{1,2}^{\varepsilon}\right\| < \infty, \forall \varepsilon$. Действительно, для решения задачи (33) справедливо интегральное тождество

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{dA_{1,2}^{\varepsilon}(x)}{dx} \right\|^2 + 2\,i \left\| A_{1,2}^{\varepsilon} \right\|^2 = \lambda_*^{\varepsilon} \left(g, \beta_1^{\varepsilon}\right) \int_0^1 G(x)\, \overline{A}_{1,2}^{\varepsilon}(x) dx - \int_0^1 \overline{A}_{1,2}^{\varepsilon}(x) F_2(x) dx\,,$$

которое эквивалентно двум тождествам

$$\varepsilon^2 \left\| \frac{dA_{1,2}^{\varepsilon}(x)}{dx} \right\|^2 = \lambda_*^{\varepsilon} \operatorname{Re} \left(\left(g, \beta_1^{\varepsilon}\right) \int_0^1 G(x)\, \overline{A}_{1,2}^{\varepsilon}(x) dx \right) - \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \overline{A}_{1,2}^{\varepsilon}(x) F_2(x) dx \right),$$

$$2 \left\| A_{1,2}^{\varepsilon}(x) \right\|^2 = \lambda_*^{\varepsilon} \operatorname{Im} \left(\left(g, \beta_1^{\varepsilon}\right) \int_0^1 G(x)\;\; \overline{A}_{1,2}^{\varepsilon}(x) dx \right) - \operatorname{Im} \left(\int_0^1 \overline{A}_{1,2}^{\varepsilon}(x) F_2(x) dx \right).$$

Выписанные тождества дают нужную оценку. Тогда ограниченное по ε решение задачи (33) задается формулой

$$A_{1,2}^{\varepsilon}(x) = -\lambda_*^{\varepsilon} \left(g, \beta_1^{\varepsilon}\right) \wp_{2,1}^{\varepsilon}(x, G) + \wp_{2,1}^{\varepsilon}(x, F_2)\,, \tag{34}$$

где

$$\wp_{2,1}^{\varepsilon}(x, \Psi) = \frac{1}{\varepsilon^2 \left(\lambda_1^{\varepsilon} - \lambda_2^{\varepsilon}\right)} \int_0^x \left(\exp\left(\lambda_1^{\varepsilon}(x - \xi)\right) - \exp\left(\lambda_2^{\varepsilon}(x - \xi)\right) \right) \Psi(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{\exp\left(\lambda_1^{\varepsilon} x\right) - \exp\left(\lambda_2^{\varepsilon} x\right)}{\varepsilon^2 \left(\lambda_1^{\varepsilon} - \lambda_2^{\varepsilon}\right) \left(\exp\left(\lambda_1^{\varepsilon}\right) - \exp\left(\lambda_2^{\varepsilon}\right)\right)} \int_0^1 \left(\exp\left(\lambda_1^{\varepsilon}(1 - \xi)\right) - \exp\left(\lambda_2^{\varepsilon}(1 - \xi)\right) \right) \Psi(\xi) d\xi,$$

$$\lambda_1^{\varepsilon} = \frac{1 + i}{\varepsilon},\ \lambda_2^{\varepsilon} = -\lambda_1^{\varepsilon}\,.$$

Положим

$$B_{1,2}^{\varepsilon}(x) = \beta_{1,1}^{\varepsilon}(x) + i\, \beta_{1,2}^{\varepsilon}(x),\ Z_2(x) = z_{1,1}(x) + i\, z_{1,2}(x)\,.$$

Тогда функция $B_{1,2}^{\varepsilon}(x)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 B_{1,2}^{\varepsilon}(x)}{dx^2} + 2\,i\, B_{1,2}^{\varepsilon}(x) = A_{1,2}^{\varepsilon}(x) - Z_2(x)\,,$$

$$B_{1,2}^{\varepsilon}(0) = B_{1,2}^{\varepsilon}(1) = 0\,. \qquad (35)$$

Тогда ограниченное по ε решение задачи (35) задается формулой

$$B_{1,2}^{\varepsilon}(x) = -\lambda_*^{\varepsilon}\left(g,\beta_1^{\varepsilon}\right)\wp_{2,2}^{\varepsilon}\left(x,\ \wp_{2,1}^{\varepsilon}\left(.,G\right)\right) + \wp_{2,2}^{\varepsilon}\left(x,\ \wp_{2,1}^{\varepsilon}\left(.,F_2\right)\right) - \wp_{2,2}^{\varepsilon}\left(x,Z_2\right), \qquad (36)$$

где

$$\wp_{2,2}^{\varepsilon}(x,\Psi) = \frac{1}{\varepsilon^2\left(\lambda_3^{\varepsilon}-\lambda_4^{\varepsilon}\right)}\int_0^x\left(\exp\left(\lambda_3^{\varepsilon}\left(x-\xi\right)\right)-\exp\left(\lambda_4^{\varepsilon}\left(x-\xi\right)\right)\right)\Psi\left(\xi\right)d\xi -$$

$$-\frac{\exp\left(\lambda_3^{\varepsilon}x\right)-\exp\left(\lambda_4^{\varepsilon}x\right)}{\varepsilon^2\left(\lambda_3^{\varepsilon}-\lambda_4^{\varepsilon}\right)\left(\exp\left(\lambda_3^{\varepsilon}\right)-\exp\left(\lambda_4^{\varepsilon}\right)\right)}\int_0^1\left(\exp\left(\lambda_3^{\varepsilon}\left(1-\xi\right)\right)-\exp\left(\lambda_4^{\varepsilon}\left(1-\xi\right)\right)\right)\Psi\left(\xi\right)d\xi,$$

$$\lambda_3^{\varepsilon} = \frac{-1+i}{\varepsilon},\ \lambda_4^{\varepsilon} = -\lambda_3^{\varepsilon}.$$

Комплексное число $\left(g,\beta_1^{\varepsilon}\right)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\left(G,\ B_{1,1}^{\varepsilon}\right) = \left(g,\beta_1^{\varepsilon}\right) + i\int_0^1\left(g_2(x)\beta_{1,1}^{\varepsilon}\left(x\right) - g_1(x)\beta_{1,2}^{\varepsilon}\left(x\right)\right)dx\,,$$

$$\left(\overline{G},\ B_{1,2}^{\varepsilon}\right) = \left(g,\beta_1^{\varepsilon}\right) - i\int_0^1\left(g_2(x)\beta_{1,1}^{\varepsilon}\left(x\right) - g_1(x)\beta_{1,2}^{\varepsilon}\left(x\right)\right)dx\,.$$

Тогда находим явное представление для числа $\left(g,\beta_1^{\varepsilon}\right)$ и функций $\alpha_{1,i}^{\varepsilon}(x), \beta_{1,i}^{\varepsilon}(x), i=\overline{1,2}.$ Из анализа формул для указанных представлений относительно параметра ε приходим к условиям (17) (для $k=-1$ результаты аналогичны.) Неравенство (20) следует из вышевыписанных оценок для коэффициентов Фурье решения системы оптимальности и равенства Парсеваля.

Заключение. Из доказанной теоремы следует, что асимптотика решения исходной задачи находится как сумма асимптотик решений задач для ее коэффициентов Фурье (асимптотики строятся стандартно методом погранфункций [1]). При этом приходится оперировать с рядами, составленными из комплекснозначных функций. Если же ограничиться применением метода погранфункций в пространственно-временной области, то от исходных условий оптимальности следует перейти к их модификации, заменив периодичность по времени для искомых функций условиями (16). Легко видеть, что так построенные асимптотики будут и асимптотиками для исходной задачи. В обоих случаях для обоснования так полученных асимптотик используется неравенство (20).

В.О. Капустян, І.С. Лазаренко, І.Д. Фартушний

АСИМПТОТИКИ ОБМЕЖЕНИХ ОПТИМАЛЬНИХ КЕРУВАНЬ
ДЛЯ ВЕКТОРНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ЗАДАЧ
У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Розглядаються задачі оптимального керування для векторних сингулярно збурених параболічних періодичних критичних крайових задач. У класі обмежених функцій побудовані й обґрунтовані асимптотики довільного порядку точності.

V.O. Kapustyan, I.S. Lazarenko, I.D. Fartushnuy

ASYMPTOTICS OF OSCILLATING GLOBALLY BOUNDED OPTIMAL CONTROLS
FOR THE VECTORIAL SINGULAR PERTURBED PARABOLIC PERIODIC
PROBLEMS IN CRITICAL CASE

Optimal oscillating control problems for the vectorial singular-perturbed parabolic periodic critical boundary-value problems are considered. The asimptotic forms of arbitrary order are constructed in the class of bounded functions.

Получено 07.04.2009

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 208 с.
2. *Капустян В.О., Фартушний І.Д.* Асимптотики розділених глобально обмежених оптимальних керувань для сингулярно збурених параболічних періодичних задач у критичному випадку. // Наукові вісті НТУУ „КПІ”. – 2007. – № 3. – С. 57 – 66.
3. *Лионс Ж.- Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. – М.: Мир, 1972. – 412 с.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Об авторах:

Капустян Владимир Емельянович,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
математическое моделирование экономических систем НТУУ „КПИ”,
e-mail: kapustyanv@ukr.net

Лазаренко Ирина Сергеевна,

ассистент кафедры математического моделирования экономических систем НТУУ „КПИ",

Фартушный Иван Дмитриевич,
старший преподаватель кафедры математического моделирования
экономических систем НТУУ „КПИ".
e-mail: nhtyth@mail.ru