КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

В.В. СЕМЕНОВ

МЕТОДЫ ГРАДИЕНТНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Исследованы некоторые свойства векторных задач на выпуклой допустимой области. Установлены необходимые и достаточные условия эффективности и существования решений. Построен и обоснован метод решения, являющийся обобщением и развитием методов линеаризации и градиентного типа для указанного класса задач.

Введение. Последние десятилетия характеризуются быстрым развитием теории выбора и принятия решений. Почти все сложные задачи принятия решений являются многокритериальными. Векторные задачи оптимизации широко используются как математические модели формирования и поиска вариантов решений в экономике, технике, социальной сфере и других областях. При этом особое значение приобретает теория принятия решений при наличии многих критериев.

Одним из основных, фундаментальных понятий этой теории является понятие оптимального по Парето или эффективного решения. Оно является обобщением понятия точки максимума (минимума) числовой функции на случай нескольких функций: решение Парето-оптимальное, если значение любого из критериев можно улучшить только за счет ухудшения значений других критериев [1]. Название указанного понятия связано с именем итальянского экономиста и социолога В. Парето (1848−1923), который одним из первых начал его использовать при математическом исследовании процесса рыночного обмена товаров. Свойствам и методам поиска Парето-оптимальных решений посвящено достаточно много литературы. Эти вопросы рассматриваются также во многих работах по теории игр, математической экономике, теории статистических решений, исследовании операций, теории оптимального управления и других научных дисциплин, в которых изучаются различные много критериальные модели принятия рациональных решений.

Данная работа посвящена установлению необходимых и достаточных условий оптимальности и существования эффективных (Парето-оптимальных) решений задач векторной оптимизации, построению и обоснованию метода решения поставленной задачи, который является развитием метода проекции градиента для задач с векторным критерием. Сообщение о полученных результатах сделано в [2].

Достоинство и актуальность разработанного в работе метода состоит в том, что он, в отличие от большинства методов векторной оптимизации, не является диалоговым, т.е. не требует вмешательства человека в процесс решения задачи.

1. Постановка задачи. Основные определения. Пусть заданы вещественные пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Пространство $\mathbb{R}^m$ частично упорядочено конусом $K \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим $K^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : (y, z) \geq 0, \forall y \in K \right\}$ – сопряженный к нему конус. Пусть X – замкнутое выпуклое множество из $\mathbb{R}^n$. Векторная функция $f : X \to \mathbb{R}^m$ – непрерывно дифференцируемая на X.

Рассмотрим задачу векторной оптимизации следующего вида:

$$f(x) \to \min_{x \in X} . \tag{1}$$

Решениями этой задачи будем считать точки $\bar{x} \in X$ такие, что $f(X) \cap \left(f(\bar{x}) - K \setminus \{0\} \right) = \varnothing$, которые традиционно будем называть оптимальными по Парето. Множество Парето оптимальных точек $\bar{x}$ обозначим $E_K(X)$. Часто, кроме нахождения элементов множества $E_K(X)$, рассматриваются задачи поиска строго, слабо эффективных точек, которые определяются соответственно следующим образом:

$$\bar{x} \in SE_K(X) \iff f\left(X \setminus (\bar{x}) \right) \cap \left(f(\bar{x}) - K \right) = \varnothing , \tag{2}$$

$$\bar{x} \in WE_K(X) \iff f(X) \cap \left(f(\bar{x}) - \operatorname{int} K \right) = \varnothing . \tag{3}$$

Если в формулах (1)–(3) вместо X подставить $X \cap O(\bar{x})$, где $O(\bar{x})$ – некоторая окрестность точки $\bar{x}$, то эффективную точку $\bar{x}$ называем соответственно локально эффективным, локально строго эффективным и локально слабо эффективным решением. Соответствующие множества обозначаются: $locE_K(X)$, $locSE_K(X)$ и $locWE_K(X)$. Очевидно, что справедливы включения $SE_K(X) \subseteq E_K(X) \subseteq WE_K(X)$ и $locSE_K(X) \subseteq locE_K(X) \subseteq locWE_K(X)$. Отсюда следует, что если $SE_K(X) \neq \varnothing$, то не непустые и остальные из указанных тут эффективных множеств, а необходимое условие локальной слабой эффективности будет необходимым условием локальной строгой эффективности.

Пусть B − некоторое выпуклое замкнутое ограниченное множество из $\mathbb{R}^m$. Множество B можно выбрать следующим образом: $B = K^* \cap S_0^1\left(\mathbb{R}^m\right)$, где S_0^1 – шар радиуса 1 с центром в точке 0. Можно записать, что $K^* = \text{con}(\text{conv } B)$. Определим опорную функцию σ_B множества B: $\sigma_B(y) \overset{def}{=} \max_{z\in B}(y,z)$ и определим свойства этой функции: $\sigma_B(\lambda y) = \lambda\sigma_B(y)$; $\sigma_B(x+y) \le \sigma_B(x) + \sigma_B(y)$; $\sigma_B(x) - \sigma_B(y) \le \|x-y\|_{\mathbb{R}^m}$; $-K = \{y:\ \sigma_B(y) \le 0\}$; $-\text{int}\, K = \{y:\ \sigma_B(y) < 0\}$.

2. Существование решений. Используя принцип Вейерштрасса–Гильберта «компактность + непрерывность = существование», получим такие результаты:

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) X – компактное множество из $\mathbb{R}^n$; 2) $f: X \to \mathbb{R}^m$ – непрерывна.

Тогда множество $E_K(X)$ оптимальных по Парето точек $\overline{x}$ не пустое.

Доказательство. Выберем некоторый вектор $k^* \in \mathbb{R}_+^m$, очевидно, что $(k^*, k)_{\mathbb{R}^m} > 0\ \forall k \in K \setminus \{0\}$. Докажем существование решений оптимизационной задачи $(k^*, f(x))_{\mathbb{R}^m} \to \inf_{x\in X}$. Рассмотрим минимизирующую последовательность (x_p), $x_p \in X$, $\lim_{p\to\infty}(k^*, f(x_p))_{\mathbb{R}^m} = \inf_{x\in X}(k^*, f(x))_{\mathbb{R}^m}$. Поскольку X – компакт, то можно считать, что $x_p \underset{p\to\infty}{\to} x^* \in X$ в $\mathbb{R}^n$. С учетом непрерывности $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеем: $f(x_p) \underset{p\to\infty}{\to} f(x^*)$ в $\mathbb{R}^m$ и $(k^*, f(x^*))_{\mathbb{R}^m} \le \inf_{x\in X}(k^*, f(x))_{\mathbb{R}^m}$. Покажем, что x^* является точкой из множества оптимальных по Парето решений. Пусть (от противного) существует $y \in X$, такая, что выполняется включение: $f(y) - f(x^*) \in -(K \setminus \{0\})$. Но, согласно выбору вектора k^*, справедливо неравенство $(k^*, f(y))_{\mathbb{R}^m} < (k^*, f(x^*))$. Полученное противоречие доказывает теорему.

3. Необходимые условия оптимальности. Напомним конструкцию конуса касательных направлений. Замкнутый конус $T(x_0 \mid X) = \lim_{\alpha\to+0} \sup \dfrac{X - x_0}{\alpha} =$

$= \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \exists(\alpha_k > 0,\ z_k \in X),\ \alpha_k \underset{k\to\infty}{\to} +0,\ \dfrac{z_k - x_0}{\alpha_k} \underset{k\to\infty}{\to} z \right\}$ называется конусом касательных направлений.

Теорема 2. Пусть $\overline{x}$ – оптимальная по Парето точка $\left(\overline{x} \in E_K\left(X\right)\right)$. Тогда

$$\nabla f\left(x\right)\left(x-\overline{x}\right) \notin -\operatorname{int} K \quad \forall x \in X .$$

Доказательство. Покажем, что $\forall x \in X \quad x-\overline{x} \in T\left(\overline{x} \mid X\right)$. Рассмотрим последовательность $x_k = \left(1-\beta_k\right)x + \beta_k \overline{x} \in X$, $\beta_k \in \left(0,1\right)$, $\beta_k \to 1$. Имеем $\dfrac{x_k - \overline{x}}{1-\beta_k} = x - \overline{x}$. Отсюда следует, что $x-\overline{x} \in T\left(\overline{x} \mid X\right)$. По определению множеств $E_K\left(X\right)$ и $T\left(\overline{x} \mid X\right)$: $f\left(x\right) - f\left(\overline{x}\right) \notin -\operatorname{int} K \ \forall x \in X$, $f\left(x_k\right) - f\left(\overline{x}\right) = (f\left(\overline{x} + x_k - \overline{x}\right) - f\left(\overline{x}\right)) \notin -\operatorname{int} K \ \forall k > k_0$. Далее $\nabla f\left(\overline{x}\right)\left(\dfrac{x_k - \overline{x}}{\alpha_k}\right) + o\left(1\right)\left\|\dfrac{x_k - \overline{x}}{\alpha_k}\right\|_{\mathbb{R}^n} \notin -\operatorname{int} K$. Сделав граничный переход при $k \to \infty$ с учетом замкнутости множества $\mathbb{R}^n \setminus \left(-\operatorname{int} K\right)$, получим $\nabla f\left(\overline{x}\right)\left(x-\overline{x}\right) \notin -\operatorname{int} K$. Теорему доказано.

Из того, что $-\operatorname{int} K = \left\{y : \sigma_B\left(y\right) < 0\right\}$, можно записать эквивалентное приведенному необходимое условие оптимальности: $\sigma_B\left(\nabla f\left(x\right)\left(x-\overline{x}\right)\right) \geq 0 \ \forall x \in X$.

Отметим, что условия, являющиеся необходимыми для эффективности в определенном смысле, являются необходимыми для эффективности и в более узком смысле. Например, необходимое условие слабой эффективности будет и необходимым условием для других двух видов эффективности.

4. Алгоритм и доказательство его сходимости. Для нахождения приближенного решения задачи (1) предлагается следующий итерационный процесс:

1) положим $s = 0$;

2) пусть $x_s \in X$ $-s$-е приближение;

3) находим $\overline{x}_s$ − решение экстремальной задачи:

$$\sigma_B\left(\nabla f\left(x_s\right)\left(x - x_s\right)\right) + \frac{1}{2}\left\|x - x_s\right\|^2 \to \min ;$$

4) если $\overline{x}_s = x_s$, то $x^s \in X$ считается решением задачи, иначе положим $x_{s+1} = x_s + \rho_s\left(\overline{x}_s - x_s\right)$, $\rho_s \in \left(0,1\right)$ переходим к пункту 2.

Алгоритм генерирует последовательности точек из допустимого множества. При $\overline{x}_s = x_s$ в точке $x_s \in X$ выполнено необходимое условие минимума и завершение итерационного процесса корректно. Далее предполагаем, что последовательность $\left\{x_s\right\}$ бесконечна и (из этого следует) все ее точки лежат снаружи множества решений. При построении $\left\{x_s\right\}$ будем считать, что ρ_s выбираются следующим образом:

$$\rho_s \in (0,1), \quad \rho_s \underset{s\to\infty}{\to} 0, \quad \sum_{s=1}^{\infty} \rho_s = +\infty . \tag{4}$$

Сформулируем условия, выполнение которых для алгоритма, гарантирует его сходимость [4].

Теорема 3. Предположим, что:

1) существует компакт $K \subset X$: $x_n \in K\ \forall n \in \mathbb{R}$;

2) для любой сходящейся подпоследовательности $\left(x_{n_k}\right)$ выполнены условия:

а) если $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x' \in X^*$, то $\rho\left(x_{n_k+1}, x_{n_k}\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0$;

б) если $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x'' \notin X^*$, то $\exists \delta_0 > 0:\ \forall \delta \in (0, \delta_0]\ \tau_k < +\infty$,

где $\tau_k = \min\limits_{n>n_k}\left\{n:\ \rho\left(x_n, x_{n_k}\right) > \delta\right\}$;

3) существует непрерывная на множестве граничных точек последовательности (x_n) функция $W(\cdot)$, такая, что для любой последовательности из 2, а) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} W\left(x_{\tau_k}\right) < \lim\limits_{k\to\infty} W\left(x_{n_k}\right)$;

4) множество $W^* = W(X^*) = \{W(x): x \in X^*\}$ имеет всюду плотное дополнение.

Тогда последовательность $(W(x_n))$ имеет границу и все граничные точки последовательности (x_n) принадлежат связному компактному подмножеству X^*.

Теорема 4. Если выполнено условие (4), множество $f(X^*)$ имеет всюду плотное дополнение, то все граничные точки последовательности $\{x_s\}$, построенной алгоритмом, образуют связное компактное подмножество X^*, а числовая последовательность $\{f(x_s)\}$ имеет границу.

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы про достаточные условия сходимости итерационных алгоритмов. За построением все члены последовательности $\{x_s\}$ принадлежат компакту X. Рассмотрим подпоследовательность $\left\{x_{s_k}\right\}$: $x_{s_k} \underset{k\to\infty}{\to} x^* \in X^*$. Справедливо неравенство

$$\left\|x_{s_k+1} - x_{s_k}\right\| = \rho_{s_k}\left\|\overline{x}_{s_k} - x_{s_k}\right\| \le \rho_{s_k} diam(X) \underset{k\to\infty}{\to} 0 .$$

Пусть $\left\{x_{s_k}\right\}$ – последовательность, сходящаяся к $x'' \notin X^*$. Покажем, что существует такое $\delta_0 > 0$, что для всех k и $\delta \in (0, \delta_0]$:

$\tau_k = \min\limits_{s>s_k}\left\{s:\ \left\|x_s - x_{s_k}\right\| > \delta\right\} < +\infty$.

Предположим обратное: $\forall\ \delta_0>0\ \exists\ k_0=k_0(\delta_0)$: $\left\|x_s-x_{s_{k_0}}\right\|\le\delta_0$ как только $s>s_{k_0}$. Тогда из неравенства треугольника имеем: $x_s\in\bar S_{\delta_0}\left(x_{s_{k_0}}\right)\Rightarrow$ $\Rightarrow x_{s_k}\in\bar S_{\delta_0}\left(x_{s_{k_0}}\right)\Rightarrow x''\in\bar S_{\delta_0}\left(x_{s_{k_0}}\right)\Rightarrow x_s\in\bar S_{2\delta_0}(x'')\ \ \forall\, s>s_{k_0}$.

Положим $W(\cdot)=\sigma_B(f(x))$. Из условия теоремы следует, что $W(\cdot)$ – непрерывная на X функция, множество $W^*=\{W(x):\ x\in X^*\}$ имеет всюду плотное дополнение. Рассмотрим разницу $W(x_{s+1})-W(x_s)=\sigma_B(f(x_{s+1}))-$

$$-\sigma_B(f(x_s))=\sigma_B\left(f\left(x_s+\rho_s(\bar x_s-x_s)\right)\right)-\sigma_B(f(x_s))=$$
$$=\sigma_B\left(f(x_s)+\rho_s\nabla f(x_s)(\bar x_s-x_s)+o(\rho_s)\right)-\sigma_B(f(x_s))\le$$
$$\le\rho_s\sigma_B\left(\nabla f(x_s)(\bar x_s-x_s)\right)+o(\rho_s),$$

где $s>s_{k_0}$. Оценим выражение $\sigma_B\left(\nabla f(x_s)(\bar x_s-x_s)\right)$, где $\bar x^s$ определяется решением задачи

$$\sigma_B\left(\nabla f(x_s)(x-x_s)\right)+\frac{1}{2}\|x-x_s\|^2\to\min,\ x\in X\ . \tag{5}$$

Поскольку $x''\notin X^*$, то $\exists\alpha_1>0$ и точка $\bar x\in X$ такие, что $\|\bar x-x''\|^2\ge\alpha_1^2>0$. Из последнего неравенства следует, что $\exists\alpha>0$ и $\bar x\in X$: $\sigma_B\left(\nabla f(x'')(\bar x-x'')\right)<\alpha<0$, поскольку $\sigma_B\left(\nabla f(x_s)(\bar x_s-x_s)\right)\le-\|\bar x_s-x_s\|^2$, что следует из (5). Из непрерывности $\nabla f(\cdot)$ и скалярного произведения, следует, что найдутся такие окрестности $S_{\delta_1}(\bar x)$, $S_{\delta_2}(x'')$, что для любых точек $x_1\in S_{\delta_1}(\bar x)$, $x_2\in S_{\delta_2}(x'')$ имеет место неравенство: $\sigma_B\left(\nabla f(x_2)(x_1-x_2)\right)<\alpha<0$. Пусть $\tilde x$ – любая точка из $\operatorname{int}X$, тогда $[\tilde x,\bar x)\subset\operatorname{int}X$, поскольку X выпуклое и $\bar x\in X$. Возьмем любую точку $\tilde{\tilde x}\in[\tilde x,\bar x)\cap S_{\delta_1}(\bar x)$. При том, что $\left\{x_{s_k}\right\}$ сходится к x'' при больших k имеет место неравенство $\sigma_B\left(\nabla f\left(x_{s_k}\right)\left(\tilde{\tilde x}-x_{s_k}\right)\right)<\alpha<0$. Возьмем $2\delta_0<\delta_1$. Тогда справедливо неравенство $\sigma_B\left(\nabla f(x_s)\left(\tilde{\tilde x}-x_s\right)\right)<\alpha<0,$ $s>s_{k_0}$. Поскольку $\bar x_s=\arg\min\limits_{x\in X}\left(\sigma_B\left(\nabla f(x_s)(x-x_s)\right)+\frac{1}{2}\|x-x_s\|^2\right)$, то справедливо неравенство $\sigma_B\left(\nabla f(x_s)(\bar x_s-x_s)\right)+\frac{1}{2}\|\bar x_s-x_s\|^2\le\sigma_B\left(\nabla f(x_s)\left(\tilde{\tilde x}-x_s\right)\right)+\frac{1}{2}\left\|\tilde{\tilde x}-x_s\right\|^2$, откуда $\|\bar x_s-x_s\|^2\le\left\|\tilde{\tilde x}-x_s\right\|^2$.

Следовательно $\sigma_B\left(\nabla f\left(x_s\right)\left(\bar{x}_s - x_s\right)\right) \le \sigma_B\left(\nabla f\left(x_s\right)\left(\tilde{\bar{x}} - x_s\right)\right) < \alpha < 0$.

Тогда $W\left(x_{s+1}\right) - W\left(x_s\right) < \alpha\rho_s + o\left(\rho_s\right),\ s > s_{k_0}$. Взяв s_{k_0} достаточно большим, получим

$$W\left(x_{s+1}\right) - W\left(x_s\right) < \frac{\alpha}{2}\rho_s,\ s > s_{k_0}. \tag{6}$$

Просуммируем неравенства (6) при $s = \overline{s_k, r},\ k > k_0$,

$$W\left(x_r\right) - W\left(x_{s_k}\right) < \frac{\alpha}{2}\sum_{s=s_k}^{r-1}\rho_s. \tag{7}$$

Осуществив граничный переход в (7) при $r \to \infty$ и учтя $\sum\limits_{s=s_k}^{\infty}\rho_s = +\infty$, получим противоречие с ограниченностью на компакте X непрерывной функции $W(\cdot)$. Таким образом, существует такое $\delta_0 > 0$, что для всех k и $\delta \in \left(0, \delta_0\right]$: $\tau_k = \min\limits_{s > s_k}\left\{s:\ \left\|x_s - x_{s_k}\right\| > \delta\right\} < +\infty$. Однако, выбирая достаточно маленькое $\delta_0 > 0$ и большое k_0, возможно повторить доказательство оценки (7) для $s_k \le s \le \tau_k$. С другой стороны $\delta_0 < \left\|x_{\tau_k} - x_{s_k}\right\| < \sum\limits_{s=s_k}^{\tau_k - 1}\left\|x_{s+1} - x_s\right\| \le \operatorname{diam}\left(X\right)\sum\limits_{s=s_k}^{\tau_k - 1}\rho_s$.

Потому $\sum\limits_{s=s_k}^{\tau_k - 1}\rho_s > \dfrac{\delta_0}{\operatorname{diam}\left(X\right)}$. Учитывая последнее неравенство в (5), получаем $W\left(x_{\tau_k}\right) - W\left(x_{s_k}\right) < \dfrac{\alpha\delta_0}{2\operatorname{diam}\left(X\right)}$, откуда $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, W\left(x_{\tau_k}\right) < \lim\limits_{k\to\infty} W\left(x_{s_k}\right)$.

Таким образом, необходимые условия теоремы 3 выполнены, следовательно все граничные точки последовательности $\left\{x_s\right\}$ принадлежат X^* и числовая последовательность $\left\{f\left(x_s\right)\right\}$ имеет границу. Связность и компактность множества граничных точек следует из того, что $\left\|x_{s+1} - x_s\right\| = \rho_s\left\|\bar{x}_s - x_s\right\| \le \rho_s \operatorname{diam}\left(X\right) \underset{s\to\infty}{\to} 0$ и утверждение [5, с. 76]: если последовательность точек $\left\{x_k\right\}$ метрического пространства E вложена в некоторый компакт K, $\rho_E\left(x_{k+1}, x_k\right) \underset{k\to\infty}{\to} 0$, то множество L граничных точек $\left\{x_k\right\}$ является связным компактом. Теорему доказано.

Заключение. Получены достаточные условия существования решений и необходимые условия Парето оптимальности для исследуемого класса векторных оптимизационных задач. Построен и обоснован новый метод, который является развитием метода проекции градиента для задач векторной оптимизации. Доказана сходимость предложенного метода. Достоинство и актуальность разработанного в роботе метода состоит в том, что он, в отличие от большинства методов векторной оптимизации не является диалоговым, т. е. не требует вмешательства человека в процесс решения задачи.

В.В. Семенов

МЕТОДИ ГРАДІЄНТНОГО ТИПУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Досліджені деякі властивості векторних задач на опуклій допустимій області. Встановлені необхідні і достатні умови існування та ефективності розв'язків. Побудовано і обгрунтовано метод розв'язання, який є узагальненням і розвитком методів лінеаризації та градієнтного типу дла вказаного класу задач.

V.V. Semenov

GRADIENT-TYPE METHODS FOR SOLVING VECTOR OPTIMIZATION PROBLEMS

The properties of vector problems on convex feasible region are investigated. Necessary and sufficient conditions for the existence and efficiency of solutions are stipulated. The solution method, which is a generalization and development of linearization and gradient methods for this class of problems is constructed and justified.

1. *Подиновский В.В.*, *Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.– М.: Наука, 1982. – 255 с.
2. *Семенов В.В.* Про деякі методи градієнтного типу для розв'язування векторних задач опуклої оптимізації // Abstracts, Intern. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». 21–25 May 2007, Chernivtsy, Ukraine. – Chernivtsy – 2007. – P. 265–267.
3. *Семенов В.В.* Застосування градієнтних методів для розв'язування екстремальних задач на передопуклих множинах // Abstracts, Intern. Conf. «Problems of decision making under uncertainties». – 2006, Aluschta. – P. 162–164.
4. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. – М: Наука, 1976. – 239 с.
5. *Семенов В.В.* Модификация метода условного градиента для решения экстремальных задач на одном классе невыпуклых множеств // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – № 1 (87). – 2002. – С. 72–76.

Получено 25.11.2009

Об авторе:

Семенов Виктор Викторович,
аспирант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
e-mail: hunt.semen@gmail.com