КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

УДК 517.9:519.6

А.В. ГЛАДКИЙ, Ю.А.ГЛАДКАЯ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЯВНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЕДИНГЕРА

Предлагается подход к численному моделированию акустических полей в подводных неоднородных волноводах, использующий явные разностные схемы для решения волнового параболического уравнения типа Шредингера. Такой подход позволяет учесть преимущества явных разностных схем и повысить эффективность вычислительных процессов, используя методику параллельных вычислений. Рассмотрены вопросы построения и исследования устойчивости явной трехслойной разностной схемы с комплекснозначными несамосопряженными операторами. Получено условие устойчивости по начальным данным.

Введение. В настоящее время значительный интерес представляют вопросы исследования особенностей распространения звуковых волн в неоднородных волноводах [1–6].

С математической точки зрения расчет звукового поля описывается краевыми задачами для эллиптического волнового уравнения Гельмгольца, численное решение которых в случае неограниченных неоднородных областей связано с известными вычислительными трудностями. Один из подходов к расчету акустических полей в неограниченных областях состоит в использовании параболических аппроксимаций, что позволяет свести решение краевых задач к решению задачи Коши для уравнений параболического типа с несамосопряженным комплекснозначным оператором.

Известно, что явные двухслойные разностные схемы решения начально-краевых задач для уравнений типа Шредингера безусловно неустойчивы.

В данной работе для численного решения волнового уравнения типа Шредингера предлагается подход к построению и исследованию устойчивости явных трехслойных разностных схем с комплекснозначными несамосопряженными операторами.

Постановка задачи. Для описания акустического поля в осесимметричном волноводе $G=\{\ r_0<r<\infty, 0<z<L, r_0>0\ \}$, где (r,z) – цилиндрические координаты и ось z направлена вертикально вниз. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для волнового уравнения типа Шредингера с комплексным несамосопряженным оператором [2, 3]

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z)) p = 0 . \qquad (1)$$

Здесь $p(r,z)$ – комплекснозначная функция; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $k_0 = 2\pi f / c_0$ – волновое число; $n(r,z) = c_0 / c(r,z)$, $\upsilon(r,z) \geq 0$ – непрерывные достаточно гладкие функции (коэффициенты преломления и поглощения соответственно).

Дифференциальное уравнение (1) является базовым для определения дальнего комплекснозначного акустического давления $P(r,z)$, создаваемого точечным гармоническим источником с координатами $(0, z_0)$. Это давление удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) + i\upsilon(r,z)) P = -\frac{\delta(r)\delta(z - z_0)}{2\pi r}$$

и при $k_0 r >> 1$ представляется в виде $P(r,z) = H_0^{(1)}(k_0 r) p(r,z)$, где $H_0^{(1)}(\cdot)$– функция Ханкеля первого рода нулевого порядка. Для волн, распространяющихся в направлениях, близких к горизонтальному, комплекснозначная амплитуда $p(r,z)$ удовлетворяет псевдодифференциальному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial r} + ik_0 p - ik_0 \left(E + Q \right)^{1/2} p = 0, \qquad (2)$$

где E – единичный оператор,

$$Qp = \left(\left(n^2(r,z) - 1 + i\upsilon(r,z) \right) E + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p .$$

Подставляя в (2) приближенное выражение оператора корня квадратного в виде $(E+Q)^{1/2} \cong E + \frac{1}{2}Q,$ получаем параболическое волновое уравнение (1).

Отметим, что область эффективного использования уравнения (1) для моделирования акустических волн ограничена углами распространения до горизонтали, не превышающими 12º.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения (1), ограничиваясь средой без потерь и мягкими границами волновода:

$$2ik_0 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(r,z) - 1) p = 0, (r,z) \in G , \qquad (3)$$

$$p_{|z=0} = 0,\ \ p_{|z=H} = 0\,, r_0 \le r < \infty, \tag{4}$$

$$p(r_0, z) = u(z),\ 0 < z < L\,. \tag{5}$$

Для численного решения задачи (3)–(5) с комплексным несамосопряженным оператором наиболее удобным является метод сеток, применение которого требует исследования устойчивости по начальным данным, по правой части, а также сходимости решения разностной схемы. Следует отметить, что при исследовании разностных схем наиболее важным является вопрос устойчивости по начальным данным.

Разностная схема. На сетке

$$\overline{\omega}_{\tau h} = \overline{\omega}_\tau \times \overline{\omega}_h = \omega_{\tau h} \cup \gamma_{\tau h}\,,\ \omega_{\tau h} = \omega_\tau \times \omega_h\,,$$

$$\overline{\omega}_h = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{0, N},\ h = L/N\},\ \overline{\omega}_\tau = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ m = 0,1,2,...,\}\,,$$

$$\omega_\tau = \{r = r_m = r_0 + m\tau,\ m = 1,2,...,\}, \omega_h = \{z = z_k = kh,\ k = \overline{1, N-1},\ h = L/N\}\,,$$

дифференциальной задаче (3)–(5) поставим в соответствие явную трехслойную разностную схему

$$2ik_0\, y_{\overset{\circ}{r}} + y_{\bar{z}z} + b(z,r)y = 0,\ (z,r) \in \omega_{\tau h}\,, \tag{6}$$

$$y(z,0) = y_0(z),\ z \in \omega_h\,, \tag{7}$$

$$y(0,r) = 0,\ y(L,r) = 0, r \in \omega_\tau\,. \tag{8}$$

Здесь $\gamma = \tau / h, b(r,z) = k_0^2 (n^2(r,z) - 1)$ и приняты следующие обозначения теории разностных схем [7]:

$$y = y_k^m = y(r_m, z_k),\ \ \hat{y} = y_k^{m+1},\ \ \check{y} = y_k^{m-1},\ \ y_{\overset{\circ}{r}} = (\hat{y} - \check{y})/2\tau,$$

$$y_z = (y_{k+1} - y_k)/h,\ \ y_{\bar{z}} = (y_k - y_{k-1})/h,$$

$$y_{\bar{z}z} = \frac{1}{h}(y_z - y_{\bar{z}}) = \frac{1}{h^2}\left(y_{k+1}^m - 2y_k^m + y_k^m\right).$$

Следует отметить, что в случае уравнения теплопроводности аналогичная явная трехслойная разностная схема (схема Ричардсона) является абсолютно неустойчивой [7].

Пользуясь разложением в ряд Тейлора легко показать, что для погрешности аппроксимации уравнения (6) справедливо соотношение

$$\psi = 2ik_0\, p_{\overset{\circ}{r}} + p_{\bar{z}z} + b(z,r)p = O(\tau^2 + h^2)\,.$$

Таким образом, задача (6)–(8) является явной трехслойной разностной схемой. Отметим, что при расчетах, кроме решения при r_0, необходимо иметь значение решения $y^1 = y(\tau, z), z \in \omega_h$, которое можно получить каким-либо другим методом.

Перейдем к анализу устойчивости разностной схемы (6)–(8) по начальным данным.

Пусть $\mathcal{H}$ – пространство сеточных комплекснозначных функций, заданных на $\overline{\omega}_h$ и равных нулю при $z = 0, z = L$. Сеточная функция $y = y(r)$ определена на $\overline{\omega}_\tau$ со значениями в $\mathcal{H}$: $y(r) = \{y(r,z), z \in \overline{\omega}_h\}$, $y^m = y(r_m)$.

Введем скалярное произведение и норму в $\mathcal{H}$:

$$(y,v) = (y^m, v^m) = \sum_{z \in \omega_h} hy\overline{v}, \; \|y\| = (y,y)^{1/2}, \tag{9}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Введем далее гильбертово пространство $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ как прямую сумму, т.е. элементами пространства $\mathcal{H}^2$ являются векторы вида $y_m = (y^m, y^{m+1})$, $y^m, y^{m+1} \in \mathcal{H}$ с покоординатными операциями сложения и умножения. Устойчивость трехслойной схемы (6)–(8) будем изучать в энергетическом пространстве $\mathcal{H}_D^2$ с метрикой, порожденной некоторым (возможно зависящим от r) самосопряженным положительным оператором $D = D_m = D(r_m)$, действующим в $\mathcal{H}^2$:

$$(y,v)_D = (Dy, v), \; \|y\|_D = (y,y)_D^{1/2}, \; y, v \in \mathcal{H}^2.$$

Следуя [7], под устойчивостью по начальным данным будем понимать выполнение оценки

$$(D_{m+1} y_{m+1}, y_{m+1}) \le \rho^2 (D_m y_m, y_m), \; m = 0,1,2,...,$$

где величина ρ^m равномерно ограничена константой, не зависящей от параметров сетки.

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon(r,z) = n^2(r,z) - 1, \; -\varepsilon_0 \le \varepsilon(r,z) \le \varepsilon_1, \; \varepsilon_0 \ge 0, \varepsilon_1 \ge 0 \; .$$

Имеет место

Теорема. Разностная схема (6)–(8) устойчива по начальным данным при выполнении условия

$$\tau \le \frac{2k_0 h^2}{4 + k_0^2 \varepsilon_0^2}, \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \ne 0. \tag{10}$$

Для доказательства перепишем задачу (6)–(8) в операторной форме:

$$\alpha\hat{y} + \overline{\alpha}\breve{y} + Ay = 0, r \in \omega_r, \tag{11}$$

где y^0, y^1 заданы, $y^m = y(r_m) \in \mathcal{H}$, а комплексный параметр α и оператор A определяются выражениями

$$\alpha = -\frac{ik_0}{\tau}, \ Ay = -y_{\overline{z}z} - k_0^2 \varepsilon(r, z) y, \ y \in \mathcal{H}. \tag{12}$$

Линейный разностный оператор A самосопряжен в смысле скалярного произведения (9).

Запишем уравнение (11) в виде

$$\alpha\hat{y} + \frac{1}{2}Ay = -\overline{\alpha}\breve{y} - \frac{1}{2}Ay$$

и возведем скалярно обе части равенства в квадрат. Тогда получим тождество

$$|\alpha|^2 \|\hat{y}\|^2 + \operatorname{Re}(\alpha\hat{y}, Ay) = |\alpha|^2 \|\breve{y}\|^2 + \frac{1}{2}(\overline{\alpha}\breve{y}, Ay) + \frac{1}{2}(Ay, \overline{\alpha}\breve{y}),$$

в правой части которого прибавим и вычтем величину $|\alpha|^2 \|y\|^2$. Отсюда, учитывая самосопряженность оператора A, свойства $(Ay, \overline{\alpha}\breve{y}) = (\alpha Ay, \breve{y}) = (\alpha y, A\breve{y})$, получаем соотношение

$$|\alpha|^2 \|\hat{y}\|^2 + \operatorname{Re}(\alpha\hat{y}, Ay) + |\alpha|^2 \|y\|^2 = |\alpha|^2 \|\breve{y}\|^2 + \operatorname{Re}(\alpha y, A\breve{y}) + |\alpha|^2 \|y\|^2,$$

которое можно переписать так:

$$\left\|\alpha\hat{y} + \frac{1}{2}Ay\right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4}A^2\right)y, y\right) = \left\|\alpha y + \frac{1}{2}A\breve{y}\right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4}A^2\right)y, y\right).$$

Это означает, что квадратичная форма

$$\Xi_m = \left\|\alpha\hat{y} + \frac{1}{2}Ay\right\|^2 + \left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4}A^2\right)y, y\right) \tag{13}$$

неотрицательна при выполнении неравенства

$$\left(\left(|\alpha|^2 E - \frac{1}{4}A^2\right)y, y\right) \geq 0, \;\; y \in \mathcal{H}. \tag{14}$$

В этом случае квадратичную форму (13) можно записать в виде скалярного произведения $\Xi_m = (D_m y_m, y_m)$, где $y_m = (y^m, y^{m+1}) \in \mathcal{H}^2$, а самосопряженный и неотрицательный оператор D_m, действующий в пространстве $\mathcal{H}^2$, является квадратной операторной матрицей второго порядка:

$$D_m = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 E & \frac{1}{2}\alpha A \\ \frac{1}{2}\bar{\alpha} A & |\alpha|^2 E \end{pmatrix}.$$

Тогда на каждом шаге выполняется энергетическое тождество

$$(D_m y_m, y_m) = (D_m y_{m-1}, y_{m-1}), \;\; y_m \in \mathcal{H}^2,$$

которое означает, что ошибка, допущенная на некотором шаге, не возрастает.

Если в (14) выполняется строгое неравенство, то выражение $\sqrt{(D_m y_m, y_m)}$ определяет норму в пространстве $\mathcal{H}^2$, что обеспечивает устойчивость разностной схемы (6)–(8) в этой норме. Легко видеть, что условие неотрицательности квадратичной формы (13) означает выполнение неравенства $\|A\| \leq 2|\alpha|$. Учитывая, что $\|A\| \leq \lambda_{N-1} + k_0^2 \varepsilon_0, |\alpha| = k_0 / \tau$, где $\lambda_{N-1} \leq 4/h^2$ – максимальное собственное значение оператора $-y_{\bar{z}z}$, приходим к условию устойчивости (10).

Заключение. В работе рассматривается подход к численному моделированию акустических полей, описываемых волновым уравнением типа Шредингера. Исследованы вопросы построения и устойчивости трехслойных явных разностных схем с комплекснозначными несамосопряженными операторами, получено условие устойчивости по начальным данным. Предложенная методика легко обобщается на случай разрывных коэффициентов преломления, других краевых условий и позволяет повысить эффективность вычислительных процессов, используя методику параллельных вычислений.

А.В. Гладкий, Ю.А. Гладка

ПРО СТІЙКІСТЬ ЯВНОЇ ТРИШАРОВОЇ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ
ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Розглянуто підхід до чисельного моделювання акустичних полів у підводних неоднорідних хвилеводах, що використовує явні різницеві схеми для розв'язання хвильового параболічного рівняння типу Шредінгера. Запропонована явна тришарова різницева схема з комплексними несамоспряженими операторами, досліджена її стійкість та отримана умова стійкості за початковими даними.

A.V. Gladky, J.A .Gladka

ON A STABILITY OF THE EXPLICIT THREE-LEVEL DIFFERENCE SCHEME
FOR THE SCHROEDINGER-TYPE EQUATION

An approach to numerical modeling of acoustic fields in the underwater non-homogeneous waveguides is considered. Explicit three-level difference schemes are used for solving wave parabolic equations of Shroedinger type. The explicit three-level difference scheme with complex non-self-conjugate operator is suggested. The stability of this scheme is investigated. The stability condition on initial data is obtained.

1. *Бреховских Л.М. , Лысанов Ю.П.* Теоретические основы акустики океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 264 с.
2. *Распространение* волн и подводная акустика // Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. Пападакиса. – М.: Мир, 1980. – 230 с.
3. *Lee D., McDaniel S.T.* Ocean acoustic propagation by finite difference method // Comput. Math. Appl. – 1987. – **14**. – P. 305–423.
4. *Lee D., Pierse A.D., Shang E.C.* Parabolic equation development in the twentieth century // J. Comput. Acoust. – 2000. – **1**, N 4. – P. 527–637.
5. *Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В.* Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. – Киев: Наук. думка, 2001. – 452 с.
6. *Завадский В.Ю.* Моделирование волновых процессов. – М.: Наука, 1991. – 248 с.
7. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. – М.: Наука, 1973. – 416 с.

Получено 09.12.2009

Об авторах:

Гладкий Анатолий Васильевич,

доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Гладкая Юлия Анатольевна,

доцент Киевского национального торгово-экономического университета.