КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 539.3: 519.6

В.С. ДЕЙНЕКА

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛОЙ СФЕРЫ

Построены явные выражения градиентов функционалов-невязок для реализации градиентных методов идентификации параметров задачи термоупругого деформирования полой сферы.

Введение. В работах [1, 2] на основе результатов теории оптимального управления состояниями различных многокомпонентных распределенных систем [3–5] получены явные выражения градиентов функционалов-невязок для идентификации градиентными методами О.М. Алифанова [6] параметров упругого деформирования составной полой сферы и термоупругого деформирования составного полого цилиндра, соответственно.

В этой работе аналогичные вопросы рассмотрены для идентификации параметров задачи термоупругого деформирования полой сферы.

1. Идентификация термонапряженного состояния по поверхностным смещениям.

Рассмотрим изотропную полую сферу. С учетом симметрии, следуя [7], ее термонапряженное состояние описывается уравнением

$$\frac{d\sigma_r(y)}{dr}+ \frac{2\sigma_r(y)-\sigma_\theta(y)-\sigma_\varphi(y)}{r}=0,\ r\in\Omega, \quad (1)$$

где $\quad \Omega=(r_1,r_2),\ \ 0<r_1<r_2<\infty,$

$$\sigma_r=\sigma_r(y)=(\lambda+2\mu)\frac{dy}{dr}+2\lambda\frac{y}{r}-(3\lambda+2\mu)\,\alpha T,$$

$$\sigma_\varphi=\sigma_\varphi(y)=\lambda\frac{dy}{dr}+\frac{2(\lambda+\mu)}{r}y-(3\lambda+2\mu)\,\alpha T, \quad (1')$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\theta(y) = \lambda \frac{dy}{dr} + \frac{2(\lambda+\mu)}{r} y - (3\lambda + 2\mu)\,\alpha T,$$

$y = y(r)$ – радиальное смещение точки с координатой r; λ, μ – упругие постоянные Ляме, α – коэффициент линейного расширения, T – изменение температуры $\bar{T}$ от ее начального состояния $\bar{T}_0$.

Равенство (1), с учетом (1′), легко преобразуется к виду

$$\left\{ (\lambda+2\mu)\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dy}{dr} \right) - (3\lambda+2\mu)\alpha r^2 \frac{dT}{dr} - 2(\lambda+2\mu) y \right\} = 0, \quad r \in \Omega. \qquad (2)$$

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 k \frac{dT}{dr} \right) = \bar{f}, \quad r \in \Omega. \qquad (3)$$

На внутренней и внешней поверхностях сферы заданы напряжения

$$\sigma_r(y)\Big|_{r=r_i} = -p_i, \quad i = 1, 2, \qquad (4)$$

плотность теплового потока на внутренней поверхности

$$-k\frac{dT}{dr} = u, \quad r = r_1, \qquad (5)$$

которую считаем неизвестной, а на внешней поверхности – краевое условие первого рода

$$T = \bar{u}_1, \quad r = r_2. \qquad (6)$$

Предполагаем, что на внешней поверхности сферы известно смещение

$$y(r_2) = f_0. \qquad (7)$$

Получена задача (2)–(7), состоящая в определении вещественного числа $u \in \mathcal{U} = (-\infty, +\infty)$, при котором первая компонента $y = y(u)$ классического решения $Y = Y(u) = (y(u), T(u))$ краевой задачи (2)–(6) удовлетворяет равенству (7).

Вместо классического решения $Y = (y, T)$ краевой задачи (2)–(6) будем использовать ее обобщенное решение. Для этого домножим левую часть равенства (2) на произвольную функцию $z \in V_1 = W_2^1((r_1, r_2))$ и результат проинтегрируем по отрезку $[r_1, r_2]$. С учетом ограничений (4) получим

$$-\int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{d}{dr}\left(r^2 \left((\lambda+2\mu)\frac{dy}{dr} + \frac{2\lambda}{r} y - \frac{2\lambda}{r} y - (3\lambda+2\mu)\alpha T \right)\right) - \right.$$

$$\left. -2(\lambda+2\mu)y + 2r(3\lambda+2\mu)\alpha T \right\} z dr = -r^2 \sigma_r(y) z \Big|_{r_1}^{r_2} +$$

$$+\int_{r_1}^{r_2} r^2 \left\{ \sigma_r(y)\varepsilon_r(z) + \left(\lambda\frac{dy}{dr}\frac{z}{r} + (\lambda+2\mu)\frac{y}{r}\frac{z}{r} + \lambda\frac{y}{r}\frac{z}{r} - (3\lambda+2\mu)\alpha T\frac{z}{r} \right) + \right.$$

$$+\left(\lambda\frac{dy}{dr}\frac{z}{r}+\lambda\frac{y}{r}\frac{z}{r}+(\lambda+2\mu)\frac{y}{r}\frac{z}{r}-(3\lambda+2\mu)\alpha T\frac{z}{r}\right)\Bigg\}dr=-r^2\sigma_r(y)z\Big|_{r_1}^{r_2}+$$

$$+\int_{r_1}^{r_2}r^2\left(\sigma_r(y)\varepsilon_r(z)+\sigma_\varphi(y)\varepsilon_\varphi(z)+\sigma_\theta(y)\varepsilon_\theta(z)\right)dr=-r^2\sigma_r(y)z\Big|_{r_1}^{r_2}+$$

$$+\int_{r_1}^{r_2}r^2\Big\{(\lambda+2\mu)\left(\varepsilon_r(y)\varepsilon_r(z)+\varepsilon_\varphi(y)\varepsilon_\varphi(z)+\varepsilon_\theta(y)\varepsilon_\theta(z)\right)+\lambda\Big(\varepsilon_\varphi(y)\varepsilon_r(z)+$$

$$+\varepsilon_\theta(y)\varepsilon_r(z)+\varepsilon_r(y)\varepsilon_\varphi(z)+\varepsilon_\theta(y)\varepsilon_\varphi(z)+\varepsilon_r(y)\varepsilon_\theta(z)+\varepsilon_\varphi(y)\varepsilon_\theta(z)\Big)\Big\}dr-$$

$$-\int_{r_1}^{r_2}r^2(3\lambda+2\mu)\alpha T\left(\varepsilon_r(z)+\varepsilon_\varphi(z)+\varepsilon_\theta(z)\right)dr=-r^2\sigma_r(y)z\Big|_{r_1}^{r_2}+a(y,z)-$$

$$-\int_{r_1}^{r_2}r^2(3\lambda+2\mu)\alpha T\left(\varepsilon_r(z)+\varepsilon_\varphi(z)+\varepsilon_\theta(z)\right)dr\,, \qquad (8)$$

где $$\varepsilon_r(y)=\frac{dy}{dr},\quad \varepsilon_\varphi(y)=\frac{y}{r},\quad \varepsilon_\theta(y)=\frac{y}{r},$$

$$a(y,z)=\int_{r_1}^{r_2}r^2\left\{(\lambda+2\mu)\left(\frac{dy}{dr}\frac{dz}{dr}+2\frac{y}{r}\frac{z}{r}\right)+2\lambda\left(\frac{dy}{dr}\frac{z}{r}+\frac{y}{r}\frac{dz}{dr}+\frac{y}{r}\frac{z}{r}\right)\right\}dr\,.$$

Следовательно, если при фиксированном $u\in\mathcal{U}$ вектор-функция $Y=$ $=Y(u)=(y(u),T(u))$ – классическое решение краевой задачи (2)–(6), то оно $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0=W_2^1((r_1,r_2))\times\overline{V}_0^1$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(y,z_1)=l(T;z_1)\,, \qquad (9)$$

$$a_1(T,z_2)=l_1(u;z_2)\,, \qquad (10)$$

где $\overline{V}_0^1=\{v\in W_2^1(r_1,r_2):\ v(r_2)=0\}$, $a_1(T,z_2)=\int_{r_1}^{r_2}r^2k\frac{dT}{dr}\frac{dz_2}{dr}dr,$

$$l(T;z_1)=\int_{r_1}^{r_2}r^2\,(3\lambda+2\mu)\,\alpha T\left(\frac{dz_1}{dr}+\frac{2z_1}{r}\right)dr+r_1^2p_1z_1(r_1)-r_2^2p_2z_1(r_2)\ ,$$

$$l_1(u;z_2)=\int_{r_1}^{r_2}r^2\overline{f}\,z_2dr+r_1^2uz_2(r_1)\,.$$

Определение 1. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (2)–(6) называется решение задачи (9), (10), т.е. вектор-функция $Y = (y, T) \in V$, которая $\forall z \in V$ удовлетворяет системе тождеств (9), (10), где $V = W_2^1(r_1, r_2) \times \bar{V}_1$, $\bar{V}_1 = \{ v \in W_2^1(r_1, r_2) : v(r_2) = \bar{u}_1 \}$.

Теорема 1. При каждом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ обобщенное решение $Y = (y, T)$ краевой задачи (2)–(6) существует и единственное в V.

Справедливость теоремы устанавливается, следуя [8], на основе леммы Лакса–Мильграма [9].

Задачу (9), (10), (7) будем решать с помощью градиентных методов О.М. Алифанова [6]. Функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(y(u; r_2) - f_0 \right)^2. \tag{11}$$

Тем самым получена задача (9)–(11), состоящая в определении элемента u, минимизирующего на $\mathcal{U}$ функционал-невязку (11) при ограничениях (9), (10). Эту задачу будем решать приближенно с помощью градиентных методов [6], где (n+1)-е приближение u_{n+1} решения $u \in \mathcal{U}$ находим по формуле

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n p_n, \quad n = 0, 1, \ \ldots \ , n^*, \tag{12}$$

начинается с некоторого начального приближения $u_0 \in \mathcal{U}$, где направление спуска p_n и коэффициент β_n определим используя следующие выражения:

– для метода минимальных ошибок

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\| e_n \|^2}{\| J'_{u_n} \|^2}, \tag{13}$$

– для метода скорейшего спуска

$$p_n = J'_{u_n}, \quad \beta_n = \frac{\| J'_{u_n} \|^2}{\| AJ'_{u_n} \|^2}, \tag{14}$$

– для метода сопряженных градиентов

$$p_n = J'_{u_n} + \gamma_n p_{n-1}, \ \ \gamma_0 = 0, \ \ \gamma_n = \frac{\| J'_{u_n} \|^2}{\| J'_{u_{n-1}} \|^2}, \ \ \beta_n = \frac{(J'_{u_n}, p_n)}{\| Ap_n \|^2}, \tag{15}$$

где J'_{u_n} – градиент функционала $J(u)$ в точке $u = u_n$, $e_n = Au_n - f_0$, $Au_n =$ $= y(u_n; r_2)$.

Введем обозначения

$$\pi(u,v)=(\bar{Y}(u)-\bar{Y}(0),\ \ \bar{Y}(v)-\bar{Y}(0)),$$
$$L(v)=(f_0-\bar{Y}(0),\bar{Y}(v)-\bar{Y}(0)),\tag{16}$$

где $\bar{Y}(v)=Av$. Так как

$$2J(v)=\pi(v,v)-2L(v)+(f_0-\bar{Y}(0),\ \ f_0-\bar{Y}(0)),$$

то

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda}=\pi(u,v-u)-L(v-u)=$$
$$=(\bar{Y}(u)-f_0,\ \ \bar{Y}(v)-\bar{Y}(u))=\langle J'_u,v-u\rangle.\tag{17}$$

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (9)–(11) введем в рассмотрение следующую сопряженную задачу:

$$-r^2\frac{d}{dr}\sigma_r(\psi)-r(2\sigma_r(\psi)-\sigma_\theta(\psi)-\sigma_\varphi(\psi))=0,\ \ r\in\Omega,$$

$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_2}=\frac{1}{r_2^2}(y(u_n;r_2)-f_0),$$

$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_1}=0,\tag{18}$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2k\frac{dp}{dr}\right)-r^2(3\lambda+2\mu)\alpha\left(\varepsilon_r(\psi)+\varepsilon_\varphi(\psi)+\varepsilon_\theta(\psi)\right)=0,\ \ r\in\Omega,$$

$$-k\frac{dp}{dr}\bigg|_{r=r_1}=0,\qquad p(r_2)=0,$$

где $\sigma_r(\psi)=(\lambda+2\mu)\dfrac{d\psi}{dr}+2\lambda\dfrac{\psi}{r},\quad \sigma_\varphi(\psi)=\lambda\dfrac{d\psi}{dr}+\dfrac{2(\lambda+\mu)}{r}\psi,\quad \sigma_\theta(\psi)=$

$$=\lambda\frac{d\psi}{dr}+\frac{2(\lambda+\mu)}{r}\psi,\ \varepsilon_r(\psi)=\frac{d\psi}{dr},\ \ \varepsilon_\varphi(\psi)=\frac{\psi}{r},\ \ \varepsilon_\theta(\psi)=\frac{\psi}{r}.$$

Определение 2. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (18) называется вектор-функция $Y=Y(u)=(y(u),T(u))\in V_0$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\psi,z_1)=(y(u_n;r_2)-f_0)z_1(r_2),\tag{19}$$

$$a_1(p,z_2)=\int_{r_1}^{r_2}r^2(3\lambda+2\mu)\alpha\, z_2\left(\frac{d\psi}{dr}+\frac{2\psi}{r}\right)dr.\tag{20}$$

Выбирая в тождестве (19) вместо функции z_1 разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, а в (20) вместо z_2 – разность $T(u_{n+1})-T(u_n)$, с учетом (9), (10) получаем

$$(y(u_n;r_2)-f_0)(y(u_{n+1};r_2)-y(u_n;r_2))=a(y(u_{n+1})-y(u_n),\quad \psi)-$$
$$-\int_{r_1}^{r_2} r^2(3\lambda+2\mu)\quad \alpha(T(u_{n+1})-T(u_n))\left(\frac{d\psi}{dr}+\frac{2\psi}{r}\right)\ dr+$$
$$+a_1(T(u_{n+1})-T(u_n),p)=l_1(u_{n+1};p)-l_1(u_n;p)=r_1^2\Delta u_n p(r_1). \qquad (21)$$

С учетом (17) на основании (21) имеем $\left\langle J'_{u_n},\Delta u_n\right\rangle=\Delta u_n r_1^2 p(r_1)$. Следовательно,

$$J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n, \qquad (22)$$

где $\tilde{\psi}_n=r_1^2 p(r_1),\quad \left\|J'_{u_n}\right\|=r_1^2\,|\,p(r_1)\,|$.

Наличие градиента J'_{u_n} позволяет использовать метод минимальных ошибок (12), (13) для определения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (9)–(11).

Решив задачу определения вектор-функции $Y=Y(J'_{u_n})=(y(J'_{u_n}),T(J'_{u_n}))$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет тождествам

$$a(y,z_1)=l(T(J'_{u_n});z_1),$$
$$a_1(T,z_2)=l_1(J'_{u_n};z_2), \qquad (23)$$

получим $AJ'_{u_n}=y(J'_{u_n};r_2)$, что позволит использовать метод скорейшего спуска (12), (14) для нахождения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (9)–(11). Определив направление спуска p_n с помощью выражений (15), можем решить задачу вида (23), где вместо J'_{u_n} используем p_n. Это позволит использовать метод сопряженных градиентов (12), (15) для нахождения (n+1)-го приближения u_{n+1} решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (9)–(11).

2. Идентификация термонапряженного состояния полой сферы по смещениям ее внутренней точки.

Пусть при каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ термоупругое состояние полого сферического тела описывается краевой задачей (2)–(6), т.е. обобщенной задачей (9), (10). Предполагаем, что во внутренней точке $d_1\in(r_1,r_2)$ известно смещение, заданное равенством

$$y(d_1)=f_1. \qquad (24)$$

В этом случае функционал-невязка имеет вид

$$J(u)=\frac{1}{2}(y(u;d_1)-f_1)^2. \tag{25}$$

Имеют место выражения вида (16), (17), где $\bar{Y}(v)=y(v;d_1)$, $y(v;r)$ – первая компонента решения $Y=(y,T)$ задачи (9), (10) при $u=v$.

Для каждого приближения u_n решения $u\in\mathcal{U}$ задачи (9), (10), (25) сопряженная задача имеет вид

$$-r^2\frac{d}{dr}\sigma_r(\psi)-r(2\sigma_r(\psi)-\sigma_\theta(\psi)-\sigma_\varphi(\psi))=0,\quad r\in\Omega_d,$$

$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_i}=0,\quad i=1,2,$$

$$[\psi]\Big|_{d_1}=0,\quad [\sigma_r(\psi)]\Big|_{d_1}=-\frac{1}{d_1^2}(y(u_n;d_1)-f_1), \tag{26}$$

$$-\frac{d}{dr}\left(r^2k\frac{dp}{dr}\right)-r^2(3\lambda+2\mu)\alpha\left(\varepsilon_r(\psi)+\varepsilon_\varphi(\psi)+\varepsilon_\theta(\psi)\right)=0,\quad r\in\Omega_d,$$

$$[p]\Big|_{d_1}=0,\quad \left[k\frac{dp}{dr}\right]\Bigg|_{d_1}=0,$$

$$-k\frac{dp}{dr}\Bigg|_{r=r_1}=0,\quad p(r_2)=0,$$

где компонента $\sigma_r(\psi)$ определена в п. 1, $\Omega_d=\Omega_1\cup\Omega_2$, $\Omega_1=(r_1,d_1)$, $\Omega_2=(d_1,r_2)$.

Определение 3. Обобщенным решением краевой задачи (26) называется вектор-функция $Y^*=(\psi,p)\in V_d$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in V_d$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(\psi,z_1)=(y(u_n;d_1)-f_1)\quad z_1(d_1), \tag{27}$$

$$a_1(p,z_2)-\int_\Omega r^2(3\lambda+2\mu)z_2\alpha\left(\frac{d\psi}{dr}+\frac{2\psi}{r}\right)dr=0, \tag{28}$$

где

$$V_d=\{v=(v_1,v_2):\ v_i\Big|_{\Omega_j}\in W_2^1(\Omega_j),\ [v_i]\Big|_{r=d_1}=0,\ i,j=1,2,\ v_2(r_2)=0\}.$$

Выбирая в тождестве (27) вместо функции z_1 разность $y(u_{n+1})-y(u_n)$, а в (28) вместо z_2 – разность $T(u_{n+1})-T(u_n)$, с учетом (9), (10), (17) получаем

$$\left\langle J'_{u_n}, \Delta u_n \right\rangle = \ (y(u_n; d_1) - f_1)(y(u_{n+1}; d_1) - y(u_n; d_1)) =$$
$$= a(y(u_{n+1}) - y(u_n), \psi) - \int_{\Omega} r^2 (3\lambda + 2\mu) \quad \alpha(T(u_{n+1}) - T(u_n)) \left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{2\psi}{r} \right) dr +$$
$$+ a_1(T(u_{n+1}) - T(u_n), p) = l_1(u_{n+1}; p) - l_1(u_n; p) = \Delta u_n r_1^2 p(r_1).$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = r_1^2 p(r_1)$.

Замечание 1. Если кроме условия (24) также имеем условие (7), то функционал-невязка имеет вид

$$J(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{1} (y(u; d_i) - f_i)^2, \ d_0 = r_2. \tag{29}$$

В этом случае имеем задачу (9), (10), (29).

Введем обозначения

$$\pi(u, v) = (\bar{y}(u) - \bar{y}(0), \quad \bar{y}(v) - \bar{y}(0)),$$
$$L(v) = (\bar{f} - \bar{y}(0), \quad \bar{y}(v) - \bar{y}(0)),$$

где $\bar{y}(v) = (y(v; d_0), y(v; d_1)), \quad \bar{f} = (f_0, f_1)$. Так как

$$2J(v) = \pi(v, v) - 2L(v) + \left\| \bar{f} - \bar{y}(0) \right\|^2,$$

то

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda(v - u)) - J(u)}{\lambda} = \pi(u, v - u) - L(v - u) =$$
$$= (\bar{y}(u) - \bar{f}, \quad \bar{y}(v) - \bar{y}(u)) = \langle J'_u, v - u \rangle. \tag{30}$$

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathcal{U}$ задачи (9), (10), (29) сопряженная задача имеет вид (26), где вместо второго выражения, отражающего задание краевых условий, примем

$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_1} = 0, \quad \sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_2} = \frac{1}{r_2^2} \left(y(u_n; r_2) - f_0 \right).$$

Для этой краевой задачи обобщенная задача состоит в нахождении вектор-функции $Y^* = (\psi, p) \in V_d$, которая $\forall z \in V_d$ удовлетворяет тождествам

$$a(\psi, z_1) = \sum_{i=0}^{1} (y(u_n; d_i) - f_i) \quad z_1(d_i),$$

$$a_1(p,z_2)-\int_\Omega r^2(3\lambda+2\mu)\alpha \quad z_2\left(\frac{d\psi}{dr}+\frac{2\psi}{r}\right)dr=0. \tag{31}$$

На основании (31) с учетом (30) получаем $J'_{u_n}=\tilde{\psi}_n=r_1^2 p(r_1)$.

3. Восстановление коэффициента линейного расширения по поверхностным смещениям. При неизвестном коэффициенте линейного расширения α компоненты $\sigma_r,\sigma_\varphi,\sigma_\theta$ (1′) тензора напряжений принимают вид

$$\sigma_r(y)=(\lambda+2\mu)\frac{dy}{dr}+2\lambda\frac{y}{r}-(3\lambda+2\mu)uT\,,$$

$$\sigma_\varphi(y)=\lambda\frac{dy}{dr}+\frac{2(\lambda+\mu)}{r}y-(3\lambda+2\mu)uT,$$

$$\sigma_\theta(y)=\lambda\frac{dy}{dr}+\frac{2(\lambda+\mu)}{r}y-(3\lambda+2\mu)\,uT, \tag{32}$$

где неотрицательная вещественная постоянная $u\in\mathcal{U}=[0,+\infty)$ подлежит определению.

Учитывая (32), на основании (2) уравнение равновесия принимает вид

$$-\left\{(\lambda+2\mu)\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right)-(3\lambda+2\mu)ur^2\frac{dT}{dr}-2(\lambda+2\mu)y\right\}=0,\quad r\in\Omega. \tag{33}$$

Изменение температуры T удовлетворяет уравнению (3). На внутренней и внешней поверхностях полой сферы заданы напряжения (4), а изменение температуры T удовлетворяет смешанным краевым условиям

$$-k\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=r_1}=\beta,\quad T(r_2)=\bar{u}_1, \tag{34}$$

где β, $\bar{u}_1$ – заданные вещественные числа.

Предполагаем, что на внешней поверхности сферы известны смещения, заданные равенством (7).

Тем самым получена задача (33), (34), (3), (4), (7), состоящая в определении неотрицательного числа $u\in\mathcal{U}$, при котором первая компонента y решения $Y=(y,T)$ краевой задачи (33), (34), (3), (4) удовлетворяет равенству (7).

При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ вместо классического решения $Y=(y,T)$ краевой задачи (33), (34), (3), (4) будем использовать ее обобщенное решение.

Определение 4. При каждом фиксированном $u\in\mathcal{U}$ обобщенным решением краевой задачи (33), (34), (3), (4) называется вектор-функция $Y=(y,T)\in V$, которая $\forall z=(z_1,z_2)\in V_0$ удовлетворяет системе тождеств

$$a(y,z_1)=l(u,T;z_1), \tag{35}$$

$$a_1(T, z_2) = l_1(z_2), \tag{36}$$

где билинейные формы $a(\cdot,\cdot)$, $a_1(\cdot,\cdot)$ определены в п. 1,

$$l(u, T; z_1) = \int_{r_1}^{r_2} r^2 (3\lambda + 2\mu) u T \left(\frac{dz_1}{dr} + \frac{2z_1}{r} \right) dr + r_1^2 p_1 z_1(r_1) - r_2^2 p_2 z_1(r_2),$$

$$l_1(z_2) = \int_{r_1}^{r_2} r^2 \bar{f} z_2 dr + \beta r_1^2 z(r_1), \quad V = \{v = (v_1, v_2) \in (W_2^1(\Omega))^2 : v_2(r_2) = \bar{u}_1\},$$

$$V_0 = \{v = (v_1, v_2) \in (W_2^1(\Omega))^2 : \ v_2(r_2) = 0\}.$$

Функционал-невязка имеет вид (11). Задачу (35), (36), (11) будем решать с помощью градиентных методов (12).

Для каждого приближения u_n решения $u \in \mathscr{U}$ задачи (35), (36), (11) сопряженная задача имеет вид

$$-\left\{ (\lambda + 2\mu) \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) - 2(\lambda + 2\mu)\psi \right\} = 0, \quad r \in \Omega,$$

$$\sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_1} = 0, \quad \sigma_r(\psi)\Big|_{r=r_2} = \frac{1}{r_2^2}(y(u_n; r_2) - f_0), \tag{37}$$

где компонента $\sigma_r(\psi)$ определена в п. 1.

Определение 5. Обобщенным решением краевой задачи (37) называется функция $\psi \in V_1 = W_2^1(\Omega)$, которая $\forall z_1 \in V_1$ удовлетворяет тождеству

$$a(\psi, z_1) = (y(u_n) - f_0)\, z_1\Big|_{r=r_2}. \tag{38}$$

Заменив в (38) функцию z_1 разностью $y(u_{n+1}) - y(u_n)$, с учетом (35) получаем

$$(y(u_n; r_2) - f_0)(y(u_{n+1}; r_2) - y(u_n; r_2)) = a(\psi, y(u_{n+1}) - y(u_n)) =$$

$$= l(u_{n+1}, T; \psi) - l(u_n, T; \psi) = \Delta u_n \int_{r_1}^{r_2} r^2 (3\lambda + 2\mu) T \left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{2\psi}{r} \right) dr.$$

Следовательно, $J'_{u_n} = \tilde{\psi}_n$, где $\tilde{\psi}_n = \int_{r_1}^{r_2} r^2 (3\lambda + 2\mu) T \left(\frac{d\psi}{dr} + \frac{2\psi}{r} \right) dr$.

Заключение. Построены явные выражения градиентов функционалов-невязок для реализации градиентных методов идентификации параметров задачи термоупругого деформирования полой сферы.

В.С. Дейнека

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ПОРОЖНИСТОЇ СФЕРИ

Побудовані явні вирази градієнтів функціоналів-нев'язок для реалізації градієнтних методів ідентифікації параметрів задачі термопружного деформування порожнистої сфери.

V.S. Deineka

IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF A HOLLOW SPHERE THERMOELASTIC STATE PROBLEM

The explicit expressions of the functional-residuals gradients for realization of parameters identification gradient methods for a hollow sphere thermoelastic deformation problem are constructed.

1. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация напряженно-деформированного состояния составного сферического тела // Проблемы управления и информатики. – 2009. – № 4. – С. 5–31.
2. *Сергиенко И.В., Дейнека В.С.* Идентификация термонапряженного состояния составного цилиндра // Там же. – 2009. – № 5. – С. 25–52.
3. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2003. – 506 с.
4. *Дейнека В.С.* Оптимальное управление эллиптическими многокомпонентными распределенными системами. – Киев: Наук. думка, 2005. – 364 с.
5. *Sergienko I.V., Deineka V.S.* Optimal Control of Distributed Systems with Conjugation Conditions. – New York: Kluwer Academic Publishers, 2005. – 400 p.
6. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
7. *Коваленко А.Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
8. *Дейнека В.С., Сергиенко И.В.* Модели и методы решения задач в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 2001. – 606 с.
9. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

Получено 22.01.2010

Об авторе:

Дейнека Василий Степанович,

доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН Украины,
заведующий отделом Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.

e-mail vdeineka@ukr.net