

**Вычислительный  
эксперимент**

*Рассматривается алгоритм приближенного вычисления интегралов по сфере или поверхностям вращения на основе использования поверхностной трехмерной спиральной кривой для выполнения триангуляции поверхности интегрирования с целью получения квадратурной формулы асимптотического типа.*

© В.М. Колодяжный, Д.А. Лисин,  
В.А. Рвачев, 2010

УДК 519.95

В.М. КОЛОДЯЖНЫЙ, Д.А. ЛИСИН, В.А. РВАЧЕВ

**КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА  
АСИМПТОТИЧЕСКОГО ТИПА  
ДЛЯ СФЕРЫ И ПОВЕРХНОСТЕЙ  
ВРАЩЕНИЯ**

**Введение.** Построение атомарной функции трех переменных [1–2] предусматривает применение процедуры вычисления поверхностного интеграла по сфере единичного или произвольного радиуса. Доказательство существования соответствующих атомарных функций требует реализации такой процедуры интегрирования по поверхности сферы, которая асимптотически сходится к точному значению интеграла. Применение квадратурных формул гауссовского типа, например, квадратичной формулы гауссовского типа 131-го порядка для единичной сферы, которая инвариантна относительно группы октаэдра с инверсией [3–4], не удовлетворяют схеме доказательства. В статье рассматривается алгоритм построения квадратурной формулы вычисления поверхностных интегралов по сфере асимптотического типа, который расширяется на случай замкнутых поверхностей, что формируются в результате вращения непрерывных кривых вокруг оси.

**Атомарные радиальные базисные функции.** Рассматриваемая в работе процедура интегрирования поверхностных интегралов применяется при построении атомарных радиальных базисных функций трех переменных, которые являются финитными бесконечно дифференцируемыми решениями функционально-дифференциальных уравнений вида

$$Lu(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \iint_{\partial\Omega_k} u[3(x_1 - \xi_1), 3(x_2 - \xi_2), 3(x_3 - \xi_3)] d\omega + \mu u(3x_1, 3x_2, 3x_3),$$

где  $L$  – дифференциальный оператор вида  $\Delta = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2 + \partial^2 / \partial x_3^2$ ,  $\Delta \pm \delta^2, \Delta \Delta$ ;  $\partial\Omega_k$  – сфера соответствующего радиуса:  $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = r_k^2$ ;  $\lambda_k$  и  $\mu$  – параметры, определяемые в процессе решения уравнения,  $\delta$  – параметр оператора Гельмгольца;  $N$  – параметр, зависящий от вида дифференциального оператора  $L$ .

**Вычисление площади сферы.** Пусть в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3(x_1, x_2, x_3) d\omega$  задана сфера  $S: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$  и необходимо определить  $\iint_S f(x_1, x_2, x_3) d\omega$ , где  $\omega \in S$ . При выполнении триангуляции поверхности приближенное значение искомого поверхностного интеграла определяется по формуле  $\sum_{i=1}^M f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) \Delta T_i$ , где  $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$  – координаты точек пересечения медиан треугольника  $\Delta T_i$ . Задача состоит в отыскании алгоритма триангуляции поверхности, который позволил бы совершать предельный переход в используемой квадратурной формуле при устремлении  $M$  к бесконечности.

Такой алгоритм предлагается и реализуется на примере процедуры вычисления площади сферы. Без ограничений общности считаем, что сфера имеет единичный радиус. Процедура триангуляции сферы, т.е. определение координат вершин треугольников, которые будут плотно покрывать исходную поверхность, выполняется по следующей схеме. На поверхности шара (сфере) формируем спиралевидную кривую, которая начинается в одном из полюсов и оканчивается в противоположном.

Координаты  $(x, y, z)$  точек на сфере выписываем в сферической системе координат  $(\varphi, \vartheta, r)$ :  $x = r \sin \varphi \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \vartheta$ ,  $z = r \cos \varphi$ . Учитывая, что  $r = 1$ , для определения координат точки на поверхности достаточно задать значения лишь углов  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  и  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ , т.е.  $(\varphi, \vartheta, 1)$ . Координаты точек, которые определяют полюсы сферы, получают следующие значения  $(0, 0, 1)$  и  $(2\pi, \pi, 1)$ . Координаты точек на поверхности, которые будут располагаться на кривой спиралевидного вида, будем определять на основе следующего алгоритма. Пусть параметр  $k$  задает количество оборотов спиралевидной кривой, параметр  $m$  определяет количество точек, которые принадлежат одной скрутке этой кривой:  $k \in \{1, N\}$ ,  $m \in \{1, M\}$ , где  $N$  и  $M$  целые числа; параметры  $k$  и  $m$  участвуют в процедуре дискретизации спирали, которая формируется на сфере. Шаги дискретизации значений угла  $\varphi$  определяются величиной  $\Delta \varphi = 2\pi / k$ , а угла  $\vartheta$  – величиной  $\Delta \vartheta = \pi / (k \cdot m)$ . Координаты искомым точек на поверхности

определяем по следующим формулам:  $\varphi = i\Delta\varphi$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $\vartheta = ij\Delta\vartheta$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ . Точки  $(\varphi, \vartheta, 1)$  расположены на поверхностной спирали. Из этих точек формируются вершины треугольников, которыми покрываем поверхность (сферу). Процедура построения треугольников состоит из двух этапов. Создаются

1) треугольники, которые расположены на сфере вблизи полюсов сферы и формируются в промежутке поверхности, что ограничивается первой скруткой спирали, вытекающей из полюса с координатами  $(0, 0, 1)$ , и на сфере в промежутке поверхности скрутки спирали, втекающей в полюс с координатами  $(2\pi, \pi, 1)$ , – координаты вершин совокупности таких треугольников:

$$(0, 0, 1), (\varphi_i, \vartheta_i, 1), (\varphi_{i+1}, \vartheta_{i+1}, 1), \text{ где } \varphi_i = i\Delta\varphi, \vartheta_i = i\Delta\vartheta, i = 0, 1, \dots, k;$$

$$(2\pi, \pi, 1), (\varphi_i, \vartheta_i, 1), (\varphi_{i+1}, \vartheta_{i+1}, 1), \text{ где } \varphi_i = i\Delta\varphi, \vartheta_i = im\Delta\vartheta, i = 0, 1, \dots, k;$$

2) треугольники, которые формируются в промежутке поверхности, ограниченной двумя последовательными скрутками спирали, – координаты вершин совокупности таких треугольников следующие:

$$(\varphi_i, \vartheta_j, 1), (\varphi_{i+1}, \vartheta_j, 1), (\varphi_i, \vartheta_{j+1}, 1) \text{ и } (\varphi_{i+1}, \vartheta_j, 1), (\varphi_i, \vartheta_{j+1}, 1), (\varphi_{i+1}, \vartheta_{j+1}, 1),$$

где  $\varphi_i = i\Delta\varphi$ ,  $\vartheta_i = im\Delta\vartheta$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ ;  $j = 1, 2, \dots, m$ .

На рис. 1 показаны возможные варианты расположения на поверхности сферы треугольников, которые получаются при практической реализации описанного алгоритма триангуляции (на начальной скрутке спиралевидной спирали и последующем пространстве между двумя скрутками спирали).

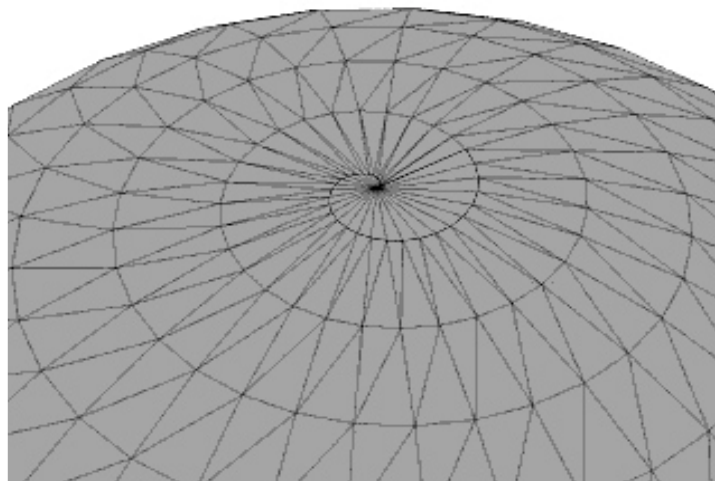


РИС. 1. Реализация алгоритма триангуляции поверхности сферы на начальной скрутке спиралевидной кривой и последующем пространстве между двумя скрутками спирали

Рассматриваемая процедура триангуляции проста в управлении, так как для получения новой триангуляционной сетки достаточно заменить величины только двух параметров –  $m$  и  $k$ . Заметим, что выбор этих параметров влияет на качество приближения при расчете площади поверхности.

Программный продукт, в котором реализован данный алгоритм интегрирования, предусматривает различные способы отображения (визуализации) самого процесса интегрирования при вычислении площади поверхности или поверхностного интеграла. Примеры таких отображений показаны на рис. 2, 3.

Результат расчетов площади сферы единичного радиуса с 16 значащими цифрами приведены в табл. 1, 2. Площадь сферы определяется по формуле  $S = 4\pi r^2$ , приближенное значение которой при  $r=1$  составляет величину 12,56637061435917.

В табл. 1, 2 рассмотрены разные соотношения количества оборотов спирали на сфере и количества точек, выбираемых на одном обороте (одной скрутке) спирали. Из результатов табл. 1 следует, что выбор значений параметров  $m$  и  $k$ , при которых  $k : m = 1 : 1$ , соответствуют худшим результатам при расчетах площади сферы, чем в случае, когда  $k : m = 2 : 3$  (табл. 2).

На рис. 2 последовательно на поверхности сферы воспроизводятся треугольники, площади которых в текущий момент расчета формируют соответствующее слагаемое квадратурной формулы.

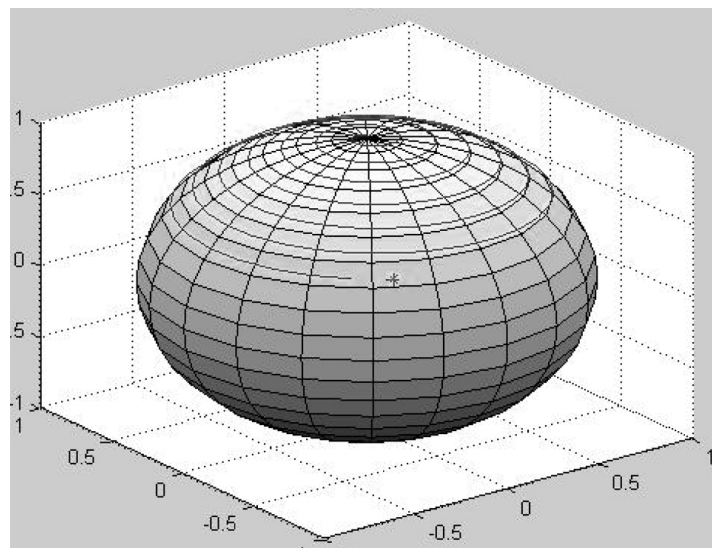


РИС. 2. Отображение информации о процессе интегрирования по поверхности шара в виде динамической спирали, которая пошагово изменяется, указывая на правую нижнюю точку  $(\varphi_i, \vartheta_{j+1}, 1)$  треугольника на сфере

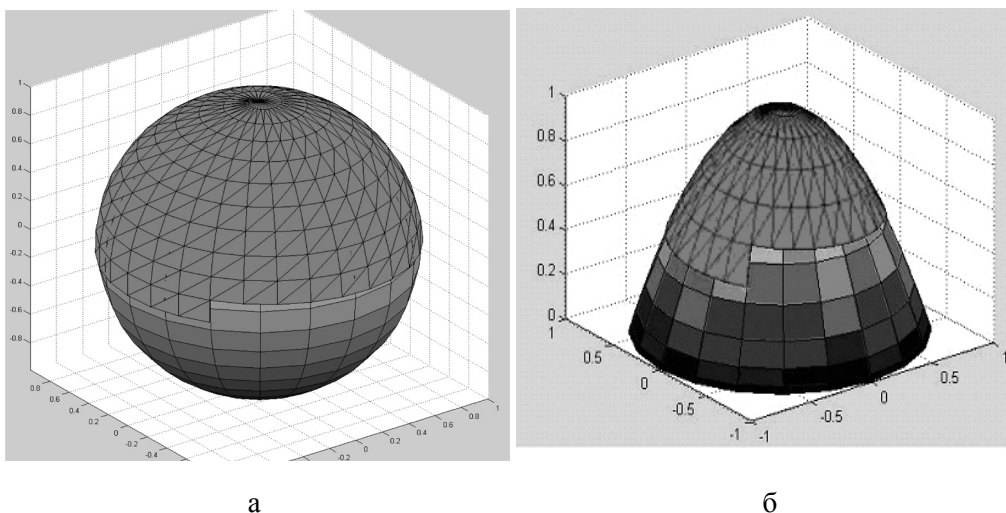


РИС. 3. Отображение информации о процессе интегрирования по поверхности шара в виде треугольников на сфере (а) и на поверхности тела вращения (б), для которых в текущий момент времени выполняется расчет площади

Предлагаемый метод вычисления поверхностных интегралов может применяться и в случае, когда поверхность интегрирования является поверхностью вращения, для которой известно уравнение описывающей поверхность кривой. На рис. 2, б представлен вариант триангуляции поверхности параболоида вращения.

ТАБЛИЦА 1. Расчеты площади поверхности шара единичного радиуса при одинаковом количестве оборотов и количества точек на одном обороте спирали

Количество оборотов спирали, $k$	Количество точек на одной скрутке спирали, $m$	Площадь сферы, вычисляемая по предлагаемому алгоритму, $k = m$
10	10	
20	20	12,42547216354158
40	40	12,53091999078062
80	80	12,55749353371516
160	160	12,56415042627891
320	320	12,56581550892169
640	640	12,56623183428060
1280	1280	12,56633591910255
2560	2560	12,56636194052888
5120	5120	12,56636844590069

ТАБЛИЦА 2. Расчеты площади поверхности шара единичного радиуса при различном количестве оборотов и количества точек на одном обороте спирали

Количество оборотов спирали, $k$	Количество точек на одной скрутке спирали, $m$	Площадь сферы, вычисляемая по предлагаемому алгоритму, $m = 1,5k$
8	12	12,05697742329874
16	24	12,43536291104473
32	48	12,53337378862397
64	96	12,55810542511927
130	195	12,56436638817540
260	390	12,56586949424821
520	780	12,56624533020032
1040	1560	12,56633929305193
2100	3150	12,56636306163893
4200	6300	12,56636869388224

**Интегрирование поверхностного интеграла по сфере.** Для демонстрации возможностей предлагаемого алгоритма при интегрировании поверхностных интегралов рассмотрим интеграл от функции  $f(M)$  – непрерывной функции точки,  $M \in R^3$ , на поверхности  $S$ , уравнение которой  $z = \varphi(x, y)$  – по поверхности  $S$ . Интеграл по поверхности  $S$  приводится к интегралу по плоской области  $\sigma_{xy}$ :  $\iint_S f(M) dS = \iint_{\sigma} \frac{f(N)}{|\cos(n, Z)|} d\sigma_{xy}$ , где  $d\sigma_{xy}$  – проекция  $dS$  на плоскость  $XOY$ ;  $\cos(n, Z) = 1/\pm\sqrt{1 + [\partial\varphi(x, y)/\partial x]^2 + [\partial\varphi(x, y)/\partial y]^2}$ ;  $n$  – нормаль к поверхности  $S$ ; считая, что  $\cos(n, Z)$  отличен от нуля и  $f(N)$  в точке  $N$  области  $\sigma$  совпадает со значением заданной на поверхности  $S$  функции  $f(M)$  в той точке  $M \in S$ , проекция которой совпадает с  $N \in \sigma$ .

Пусть  $f(M) = |z|^3$ . Легко установить, что

$$\iint_{S: x^2+y^2+z^2=R^2} |z|^3 dS = 2R \iint_{\sigma: x^2+y^2=R^2} (R^2 - x^2 - y^2) d\sigma_{xy} = 2R \int_0^{2\pi} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr d\varphi = \pi R^5.$$

В случае, когда  $R = 1$ , приближенные значения рассматриваемого интеграла, при различных соотношениях выбора параметров  $m$  и  $k$ , и обеспечении шестнадцатью значащими цифрами результата, приведены в табл. 3 и 4.

Аналитически вычисленное значение интеграла при рассматриваемой точности результата соответствует величине 3.141592653589793.

ТАБЛИЦА 3. Приближенные значения поверхностного интеграла по поверхности шара единичного радиуса при одинаковом количестве оборотов и количества точек на одном обороте спирали

Количество оборотов спирали, $k$	Количество точек на одной скрутке спирали, $m$	Приближенное значение интеграла, $k = m$
10	10	2.891178592584516
20	20	3.077037131311679
40	40	3.125407662054767
80	80	3.137553492451510
160	160	3.140584542284629
320	320	3.141340884945218
640	640	3.141529746927820
1280	1280	3.141576931558283
2560	2560	3.141588723673713
5120	5120	3.141591671185323

ТАБЛИЦА 4. Приближенные значения поверхностного интеграла по поверхности шара единичного радиуса при различном количестве оборотов и количества точек на одном обороте спирали

Количество оборотов спирали, $k$	Количество точек на одной скрутке спирали, $m$	Приближенное значение интеграла, $m = 1,5k$
8	12	2.850317680675072
16	24	3.066059712787389
32	48	3.122692044425243
64	96	3.136886024318035
80	160	3.138892727968388
100	200	3.139866377850510
130	260	3.140572167731049
160	320	3.140919397892284
640	1280	3.141550668209549
1280	2560	3.141582161386922

**Заключение.** Квадратуры для приближенного вычисления поверхностных интегралов, которые строятся по предлагаемому алгоритму, могут использоваться не только при построении атомарных функций трех переменных, порождаемых различными дифференциальными операторами [2], но при численном интегрировании поверхностных интегралов тел вращения при решении задач математического моделирования.

*В.М. Колодяжний, Д.О. Лисін, В.О. Рвачев*

КВАДРАТУРНА ФОРМУЛА АСИМПТОТИЧНОГО ТИПУ ДЛЯ СФЕРИ  
ТА ПОВЕРХОНЬ ОБЕРТАННЯ

Розглядається алгоритм наближеного обчислення інтегралів по сфері або поверхні обертання на основі використання поверхневої тривимірної спіральної кривої для здійснення триангуляції поверхні інтегрування з метою отримання квадратурної формули асимптотичного типу.

*V.M. Kolodyazhny, L.O. Lisin, V.O. Rvachov*

QUADRATURE FORMULA OF ASYMPTOTIC TYPE FOR THE SPHERE  
AND SURFACES OF REVOLUTION

Algorithm for approximate calculation of integrals on the sphere or on the surfaces of revolution based on the use of three-dimensional spiral curve to perform triangulation of the surface of integration in order to obtain quadrature formula of asymptotic type is considered.

1. Колодяжний В.М., Рвачев В.А. Атомарные функции трех переменных, инвариантные относительно группы вращения // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 6. – С. 118–130.
2. Колодяжний В.М., Рвачев В.А. Атомарные функции. Обобщения на случай многих переменных и перспективные направления практических приложений // Там же. – 2007. – № 6. – С. 155–177.
3. Лебедев В.И., Лайков В.Н. Квадратурная формула для сферы 131-го порядка точности // Докл. РАН. – 1999. – 366, № 6. – С. 741–745.
4. Владимиров В.С., Лайков В.Н. Ядерная энергетика и математика; / В 2 т. Современные проблемы вычислительной математики и математического моделирования.– М.: Наука, 2005. – Т. 2. – С. 5–37.

Получено 14.04.2010

**Об авторах:**

*Колодяжний Владимир Максимович,*

доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики  
Харьковского национального автомобильно-дорожного университета,

*e-mail: kolodyazhny@univer.kharkov.ua*

*Лисин Денис Александрович,*

аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины,

*e-mail: lisin.d.a@mail.ru*

*Рвачев Владимир Алексеевич,*

доктор физико-математических наук,

профессор Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ».