КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Теория и методы оптимизации

Предложены методы декомпозиции для решения двухуровневых задач принципал-агент с лотерейными контрактами. Рассмотрены варианты декомпозиции Данцига – Вулфа на примерах.

УДК 519.8

В.М. ГОРБАЧУК, И.А. РУСАНОВ

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ ЗАДАЧИ

Введение. Любая задача с ограниченной информацией является двухуровневой – с уровнем (агентом), являющимся источником информации, и уровнем (принципалом), не являющимся источником такой информации, но зависящим от нее. При этом между уровнями возникает проблема риска злоупотребления информацией – проблема морального риска. Поскольку решения принимаются на каждом уровне, то двухуровневая задача сложнее обычной оптимизации [1].

Приложениями задачи принципал-агент являются: страхование, когда страховщик не может наблюдать уровень осторожности застрахованного лица; землепользование, когда землевладелец не может наблюдать исходное решение фермера-арендатора; управление, когда собственник фирмы не может наблюдать уровень усилий менеджера или работника [2–9].

Принципал выбирает контракт распределения рисков (схему стимулирования), максимизирующий его ожидаемую полезность при заданных ограничениях. В схеме раскрытия предпочтений [7, 10, 11] контракты включают лотереи, т. е. принципал выбирает распределение вероятности на определенном множестве переменных, а не детерминированную функцию (Д. Миррлиз, Э. Прескотт, Р. Майерсон – Нобелевские лауреаты 1996, 2004, 2007 гг.). Предложенные лотерейные контракты за счет рандомизации позволяют избегать жестких условий для предпочтений (полезностей) принципала и агента, а также для используемых ними технологий (производственных функций).

Широкое применение задачи принципал-агент сдерживают вычислительные трудности. Однако в конце прошлого тысячелетия удалось найти способы сведения задачи принципал-агент к известным задачам линейного программирования большой размерности [12]. Далее удалось найти особенности задачи принципал-агент, позволяющие эффективно применять алгоритмы декомпозиции к редуцированным задачам линейного программирования [13–15] и применять некоторые приемы динамического программирования [16]. Таким образом, современные вычислительные мощности позволят учитывать поведение каждого из 7 млрд. участников мировой экономики.

В стандартном примере приложения задачи принципал-агент владелец фирмы (принципал) делегирует ведение дел фирмы менеджеру (агенту) и не отслеживает действия менеджера, но наблюдает результат таких действий – валовую прибыль фирмы. В ряде ситуаций у принципала есть возможности несовершенного мониторинга действий менеджера [5, 6, 8, 9]. Пусть эта прибыль зависит от действий менеджера, а также от других факторов вне власти менеджера – случайных факторов. Тогда, если дела фирмы идут хорошо, то владельцу не вполне ясно, что является причиной успеха фирмы – действия менеджера или удачное стечение обстоятельств.

После того, как принципал и агент согласились на контракт, можно выделить ряд последовательных этапов проблемы морального риска:

принципал рекомендует действие агенту;

агент предпринимает скрытое (hidden) действие;

осуществляется публично наблюдаемый результат действия агента;

принципал выделяет вознаграждение агенту.

Предположим, что:

принципал наблюдает лишь конечное количество уровней валовой прибыли (результатов) фирмы: q_1, $q_2, \ldots, q_n$;

множество A действий (actions) менеджера является непустым компактным подмножеством конечномерного евклидова пространства R^n;

действие $a \in A$ менеджера влияет на распределение $p(q_i \mid a)$ вероятности (probability) результатов, $i = 1, 2, \ldots, n$;

$\forall a \in A$ менеджер знает значение экзогенной функции $p(q_i \mid a)$, но не знает результирующего исхода $q_i \in \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$;

предпочтения менеджера определяются функцией $U(a, I)$ полезности (utility) фон Неймана – Моргенштерна (von Neumann – Morgenstern), где I – вознаграждение (incentive) менеджеру от принципала (потребление менеджера);

принципал заинтересован только в чистой прибыли фирмы, т. е. валовой прибыли минус оплата менеджера;

принципал имеет функцию полезности $W(q_i - I)$.

В стандартной постановке принципал детерминированно рекомендует менеджеру действие $a \in A$ и детерминированную схему компенсации (стимулирования) $\vec{I}=(I(q_1),I(q_2),...,I(q_n))$, максимизируя по переменным a, $\vec{I}$ свою ожидаемую полезность

$$\sum_{i=1}^{n} p(q_i \mid a)W(q_i - I(q_i)) \tag{1}$$

при условии участия (participation constraint)

$$\sum_{i=1}^{n} p(q_i \mid a)U(a, I(q_i)) \geq \overline{U} \qquad \forall a \in A \tag{2}$$

и при условии совместимости стимулов (incentive compatibility constraint)

$$\sum_{i=1}^{n} p(q_i \mid a)U(a, I(q_i)) \geq \sum_{i=1}^{n} p(q_i \mid \overline{a})U(\overline{a}, I(q_i)) \ \ \forall \overline{a} \in A, \tag{3}$$

где $\overline{U}$ – отправная (reservation) цена менеджера, т. е. ожидаемый уровень полезности, который менеджер может достичь, работая в любом другом месте.

Когда множество A имеет мощность континуума, то условие (3) можно заменить более простым условием первого порядка для максимизации ожидаемой полезности агента. Для облегчения вычислений далее считаем, что множество A конечное и состоит из элементов a_j, $j=1,2,...,n$.

Для упрощения изложения предполагаем, что $p(q_i \mid a) > 0 \quad \forall a \in A$, $i=1,2,...,n$ [4, 17]. Когда контракты допускают лотереи [7, 11, 18], то принципал выбирает распределение $\pi(a)$ вероятности на множестве A. Поскольку тогда каждое действие может быть рекомендовано, то схема стимулирования обусловлена a и q_i, а принципал выбирает плотность распределения $\pi(I(q_i) \mid q_i, a)$ условной вероятности. При этом вырожденные распределения приводят к детерминированным контрактам.

Оба источника рандомизации в схеме стимулирования обеспечивают ряд преимуществ и увеличивают благосостояние, если функции полезности являются кусочно-выпуклыми. За счет рандомизации можно также ослабить условие (3), если предпочтения являются несепарабельными. Например, если действие влияет на несклонность к риску, то рандомизация может стать эффективным способом осуществления такого действия.

Непосредственная замена $p(q_i \mid a)$ на $\pi(a)$ или $\pi(I(q_i) \mid q_i, a)$ не приводит задачу (1)–(3) к задаче линейного программирования (ЛП). Этого можно достичь, вводя совместное распределение

$$\pi(I(q_i), q_i, a) = \pi(I(q_i) \mid q_i, a)\, p(q_i \mid a)\pi(a) \tag{4}$$

как переменную решения.

Поскольку принципал выбирает не совместное распределение $\pi(I(q_i), q_i, a)$, а функцию распределения $\pi(a)$ вероятности и функцию распределения $\pi(I(q_i) \mid q_i, a)$ условной вероятности, то при технологических ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),\bar{q}_l,\bar{a})=p(\bar{q}_l\mid\bar{a})\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),q_i,\bar{a})\quad\forall\bar{a}\in A,\ l=1,2,...,n, \tag{5}$$

выбор $\pi(I(q_i),q_i,a)$ равносилен неявному выбору принципалом $\pi(a)$ и $\pi(I(q_i)\mid q_i,a)$, но не $p(q_i\mid a)$.

За принципом раскрытия (revelation), рекомендованное действие a является решением задачи максимизации ожидаемой полезности агента, т. е. $\forall\bar{a}\in A$

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i)\mid q_i,a)\,p(q_i\mid a)U(a,I(q_i))\geq\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i)\mid q_i,a)\,p(q_i\mid\bar{a})U(\bar{a},I(q_i))\ .$$

Используя равенство

$$\pi(I(q_i),q_i\mid a)=\pi(I(q_i)\mid q_i,a)\,p(q_i\mid a), \tag{6}$$

в последнем неравенстве, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),q_i\mid a)U(a,I(q_i))\geq\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),q_i\mid a)\frac{p(q_i\mid\bar{a})}{p(q_i\mid a)}U(\bar{a},I(q_i))\quad\forall\bar{a}\in A,$$

где $\pi(I(q_i),q_i\mid a)\dfrac{p(q_i\mid\bar{a})}{p(q_i\mid a)}$ – совместная вероятность того, что агент получает $(I(q_i),q_i)$ при рекомендованном принципалом действии a и фактическом действии $\bar{a}$ агента. Умножая обе части равенства (6) на $\pi(a)>0$, получаем в силу равенства (4) соотношение

$$\pi(I(q_i),q_i\mid a)\pi(a)=\pi(I(q_i)\mid q_i,a)\,p(q_i\mid a)\pi(a)=\pi(I(q_i),q_i,a).$$

Используя это в последнем неравенстве, линеаризуем его по $\pi(I(q_i),q_i,a)$:

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),q_i,a)U(a,I(q_i))\geq\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),q_i,a)\frac{p(q_i\mid\bar{a})}{p(q_i\mid a)}U(\bar{a},I(q_i))$$
$$\forall\bar{a}\in A,\ \forall a\in A. \tag{7}$$

Если $\pi(a)=0$, то действие a не рекомендуется, а ограничения для таких действий тривиально удовлетворяются.

Кроме того, вероятностные ограничения гарантируют то, что $\pi(I(q_i),q_i,a)$ является вероятностной мерой:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{a\in A}\pi(I(q_i),q_i,a)=1, \tag{8}$$

$$\pi(I(q_i),q_i,a)\geq 0\quad\forall a\in A,\ i=1,2,...,n. \tag{9}$$

В постановке задачи принципал-агент, где контракты допускают лотереи, принципал рекомендует не a и $\vec{I}$ для максимизации своей ожидаемой полезности (1), а выбирает функцию совместного распределения $\pi(I(q_i),q_i,a)$, для максимизации ожидаемой полезности

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{a\in A}\pi(I(q_i),q_i,a)W(q_i-I(q_i)) \tag{10}$$

при технологических ограничениях (5), условии совместимости стимулов (7) вместо (3), вероятностных ограничениях (8), (9), а также при условии участия

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{a\in A}\pi(I(q_i),q_i,a)U(a,I(q_i))\geq \overline{U} \tag{11}$$

вместо (2).

Задача (5), (7)–(9), (10), (11) является задачей максимизации линейной функции при конечном количестве линейных ограничений. Решая эту задачу для каждого допустимого значения $\overline{U}$, можно найти границу (frontier) Парето. Для задачи ЛП множество допустимых решений является выпуклым. Тогда при слабой вогнутости целевой функции множество допустимых полезностей также является выпуклым, а границу Парето можно найти, используя задачу планировщика (planner) максимизации по $\pi(I(q_i),q_i,a)$ взвешенной суммы полезностей принципала и агента

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{a\in A}\pi(I(q_i),q_i,a)[\lambda U(a,I(q_i))+(1-\lambda)W(q_i-I(q_i))] \tag{12}$$

при условиях (5), (7)–(9) и без условия участия, где $\lambda\in[0,1]$ – вес агента.

Заметим, что условие совместимости стимулов (3), в отличие от условия (7), не обязательно задает выпуклое множество и поэтому не задает всю границу Парето. Задача (5), (7)–(9), (12) также является задачей ЛП. Решая эту задачу для каждого $\lambda\in[0,1]$, можно найти границу Парето.

Для поиска границы Парето можно использовать допустимые значения полезностей принципала и агента в задаче (5), (7)–(9), (10), (11).

Покажем, что задача принципал-агент имеет структуру, позволяющую применять вариант декомпозиции Данцига – Вулфа [19], разбивающий исходную задачу на подзадачи, которые можно решать отдельно, существенно снижая требования к размерности (памяти) исходной задачи.

Каждая локальная подзадача $j=1,2,...,n$ учитывает только переменные, относящиеся к действию a_j, и свои вероятностные ограничения (5), (7)–(9):

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),\overline{q}_l,a_j)(1-p(\overline{q}_l\mid a_j))-\sum_{i=1,\,q_i\neq\overline{q}_l}^{n}\pi(I(q_i),q_i,a_j)\,p(\overline{q}_l\mid a_j)=0,$$

$$l=1,...,\ n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),q_i,a_j)\left[U(a_j,I(q_i))-\frac{p(q_i\mid\overline{a}_k)}{p(q_i\mid a_j)}U(\overline{a}_k,I(q_i))\right]\geq 0,\ k=1,2,...,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(I(q_i),q_i,a_j)=1,$$

$$\pi(I(q_i),q_i,a_j)\geq 0,\ i=1,2,...,\ n.$$

Ограничение (8), нормирующее решение подзадачи к полезности ex post, не вписывается в стандартный алгоритм декомпозиции Данцига – Вулфа. Поскольку правые части остальных ограничений нулевые, то такая нормировка не влияет на отношения полезностей. Решение подзадачи в стандартном алгоритме оценивает как часть целевой функции, так и часть ее аргументов.

Множество решений $\pi(I(q_i),q_i,a_j)$, удовлетворяющих ограниченям (5), (7), (8), (9), является выпуклым множеством с конечным числом крайних точек. Поскольку это множество ограничено в силу ограничений (8), (9), то оно является выпуклой оболочкой этих крайних точек. Обозначим P_j множество таких крайних точек.

Так как в локальных подзадачах j целевые функции линейные, то множество допустимых значений полезностей принципала x_{jW} и агента x_{jU} можно представлять выпуклыми оболочками $X_j=\{x_{jW},x_{jU}\}$ полезностей в точках P_j.

Обозначая $\pi(x_{jW},x_{jU})$ вероятность выбора пары (x_{jW},x_{jU}), координирующая (master) задача состоит в максимизации по $\pi(x_{jW},x_{jU})\geq 0$ ожидаемой полезности принципала

$$\sum_{j=1}^{n}\pi(x_{jW},x_{jU})\,x_{jW} \tag{13}$$

при условии участия

$$\sum_{j=1}^{n}\pi(x_{jW},x_{jU})\,x_{jU}\geq \overline{U}, \tag{14}$$

вероятностных ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}\pi(x_{jW},x_{jU})=1 \tag{15}$$

и блочном ограничении

$$(x_{jW},x_{jU})\in X_j. \tag{16}$$

Координирующая задача ЛП (13)–(16) содержит связующие ограничения (14) и (15). Обозначим ϕ двойственную переменную для ограничения (14), а φ – двойственную переменную для ограничения (15). Тогда можно выписать условия оптимальности

$$x_{jU}-\phi x_{jU}\leq\varphi\ \ \forall j=1,2,...,n. \tag{17}$$

Несмотря на кажущуюся простоту координирующей задачи (13)–(16), эта задача содержит много переменных и требует поиска декомпозиции. Алгоритм Данцига – Вулфа преодолевает проблему размерности путем вычисления только нужных пар $(x_{jW}, x_{jU}) \in X_j$.

Шаг 1. Начальным приближением алгоритма является некоторое допустимое решение координирующей задачи (13)–(16). Обозначим $\tilde{X}_j \subset X_j$ множество крайних точек этого допустимого решения.

Шаг 2. Находим решение координирующей задачи (13)–(16) с $\tilde{X}_j$ вместо X_j. Такая задача имеет небольшую размерность и базисное допустимое решение по предположению.

Шаг 3. Используя базисное допустимое решение, находим двойственные переменные.

Шаг 4. Вместо нахождения коэффициентов при всех небазисных переменных, т. е. нахождения всех крайних точек каждой подзадачи, в каждой подзадаче находим только крайнюю точку, максимизирующую целевую функцию. При ограничениях каждой локальной подзадачи (5), (7), (8), (9) можно решать подзадачу максимизации по $\pi(I(q_i), q_i, a_j)$ свертки

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(I(q_i), q_i, a_j)[U(a_j, I(q_i)) - \phi W(q_i - I(q_i))]. \tag{18}$$

Если (x^*_{jW}, x^*_{jU}) – решение подзадачи (5), (7), (8), (9), (18), то $(x^*_{jW}, x^*_{jU}) \in X_j$, причем

$$x_{jU} - \phi x_{jW} \le x^*_{jU} - \phi x^*_{jW} \quad \forall (x_{jU}, x_{jW}) \in X_j.$$

Шаг 5. Тогда, если условиям оптимальности (17) удовлетворяет пара (x^*_{jW}, x^*_{jU}), то им удовлетворяют все пары $(x_{jW}, x_{jU}) \in X_j$, т. е. пара (x^*_{jW}, x^*_{jU}) является оптимальным решением координирующей задачи.

Шаг 6. Если же пара (x^*_{jW}, x^*_{jU}) не удовлетворяет условиям (17), то решение координирующей задачи не содержится среди крайних точек множества $\tilde{X}_j$. К каждому множеству $\tilde{X}_j$ добавляем ранее вычисленное решение подзадачи j и возвращаемся на шаг 1.

Пример. Пусть в экономике континуум агентов, каждый из которых имеет вогнутую по $I(q_i)$ и выпуклую по a функцию полезности

$$U(a, I(q_i)) = \sqrt{I(q_i)} + 0.8\sqrt{2-a}, \tag{19}$$

где потребление принимает 201 значение

$$I(q_i) = 0 + 0.01t, \; t = 1, 2, ..., 200, \tag{20}$$

а уровень усилий (действие) имеет 77 значений

$$a = 0.05 + 0.025T, \; T = 1, 2, ..., 76. \tag{21}$$

Каждый агент может лишь прикладывать усилия на своем собственном участке, скрытые от остальных. При этом результат усилий видят все, который принимает два значения:

$$q_1 = 0.5, \quad q_2 = 1.5\,. \tag{22}$$

Технология производства каждого агента задается функцией плотности распределения вероятности отдачи от его усилий:

$$p(q_i = 1.5\,|\,a) = \begin{cases} \dfrac{1-(a-1)^{0.2}}{2}, a<1, \\ \dfrac{1+(a-1)^{0.2}}{2}, a \ge 1, \end{cases} \tag{23}$$

$$p(q_i = 0.5\,|\,a) = 1 - p(q_i = 1.5\,|\,a)\,. \tag{24}$$

Заметим, что $p(q_i = 1.5\,|\,a)$ обладает возрастающей отдачей от масштаба при $a \ge 1$ и уменьшающейся отдачей от масштаба при $a < 1$.

Так как эти вероятности независимы, то нет агрегированной неопределенности, а при отсутствии входящих и выходящих потоков экономики ресурсное ограничение имеет вид полезности нейтрального к риску принципала:

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=1}^{201}\sum_{T=1}^{77}\pi(I_t, q_i, a_T)(I_t - q_i) \le 0\,. \tag{25}$$

Считая ex ante агентов идентичными, задача состоит в максимизации по $\pi(I_t, q_i, a_T)$ ожидаемой полезности репрезентативного агента

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{t=1}^{201}\sum_{T=1}^{77}\pi(I_t, q_i, a_T)U(I_t, a_T) \tag{26}$$

при ресурсном ограничении (25), условии совместимости стимулов (7), технологических ограничениях (5) и вероятностных ограничениях (8), (9). Эта задача эквивалентна максимизации полезности репрезентативного агента, когда принципал довольствуется отправным уровнем своей полезности.

Поскольку простейшая задача (5), (7)–(9), (19)–(26), моделирующая поведение экономических участников (агентов), имеет более 300000 переменных и более 6000 ограничений, то требует применения декомпозиции.

В.М. Горбачук, І.А. Русанов

ДЕКОМПОЗИЦІЯ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДВОРІВНЕВОЇ ЗАДАЧІ

Запропоновані методи декомпозиції для розв’язання дворівневих задач принципал-агент з лотерейними контрактами. Розглянуті варіанти декомпозиції Данцига – Вулфа на прикладах.

V.M. Gorbachuk, I.A. Rusanov

DECOMPOSITION FOR SOLVING BILEVEL PROGRAM

Decomposition methods for solving bilevel principal-agent problems with lottery contracts are suggested. The variants of Dantzig – Wolfe decomposition have been analyzed with examples.

1. *Горбачук В.М.* Методи індустріальної організації. – К.: А. С. К., 2010. – 224 с.
2. *Горбачук В.М.*, *Конакова Е.Н.*, *Русанов И.А.* Модернизация и частные компании, дополняющие государственные функции // Моделювання та інформатизація соціально-економічного розвитку України. – 2010. – Вип. 11. – С. 233–244.
3. *Горбачук В.М.*, *Русанов И.А.* Регулирование монополии при асимметричной информации // Компьютерная математика. – 2010. – № 1. – С. 3–10.
4. *Grossman S.*, *Hart O.* An analysis of the principal agent problem // Econometrica. – 1983, January. – P. 7–45.
5. *Harris M.*, *Raviv A.* Optimal incentive contracts with imperfect information // J. of economic theory. – 1979. – **20**. – P. 231–259.
6. *Holmstrom B.* Moral hazard and observability // Bell journal of economics. – 1979. – **10**. – P. 74–91.
7. *Mirrlees J.* The theory of moral hazard and unobservable behaviour: part I // Review of economic studies. – 1999, January. – P. 3–21.
8. *Shavell S.* On moral hazard and insurance // Quarterly j. of economics. – 1979. – **93.** – P. 541–562.
9. *Shavell S.* Risk sharing and incentives in the principal agent relationship // Bell j. of economics. – 1979. – **10.** – P. 55–73.
10. *Myerson R.B.* Optimal coordination mechanisms in generalized principal-agent problems // J. of mathematical economics. – 1982, June. – P. 67–81.
11. *Prescott E.S.*, *Townsend R.M.* Pareto optima and competitive equilibria with adverse selection and moral hazard // Econometrica. – 1984, January. – P. 21–54.
12. *Prescott E.S.* Computing moral-hazard problems using the Dantzig–Wolfe decomposition algorithm // Federal Reserve Bank of Richmond working paper 98-6. – 1998. – 28 p.
13. *Гамецкий А.Ф.*, *Соломон Д.И.* Исследование операций. Т. 1. – Кишинэу: Еврика, 2004. – 456 с.
14. *Лаптин Ю.П.*, *Журбенко Н.Г.* Некоторые вопросы решения блочных нелинейных задач оптимизации со связанными ограничениями // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 2. – С. 47–55.
15. *Шор Н.З.* Применение обобщенного градиентного спуска в блочном программировании // Кибернетика. – 1967. – № 3. – С. 53–55.
16. *Prescott E.S.* Computing solutions to moral-hazard programs using the Dantzig–Wolfe decomposition algorithm // J. of economic dynamics and control. – 2004. – **28.** – P. 777–800.
17. *Горбачук В.М.*, *Бойко В.В.*, *Русанов И.А.* Проектирование контрактов в условиях риска // Теория оптимальных решений. – 2011. – № 1. – С. 3–9.
18. *Townsend R.M.* The medieval village economy: a study of the Pareto mapping in general equilibrium models. – Princeton, NJ: Princeton University Press, 1993. – 180 p.
19. *Dantzig G.B.*, *Wolfe P.* The decomposition principle for linear programs // Operations research. – 1960. – **8.** – P. 101–111.

Получено 19.04.2010

Об авторах:

Горбачук Василий Михайлович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
GorbachukVasyl@netscape.net

Русанов Иван Анатольевич,
директор Фонда поддержки инфраструктурных мероприятий.
IRusanov@FAPIM.ru