КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

А.Е. СЕНЬКО

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ НЕЧЕТКИХ СТРУКТУР МУЛЬТИМНОЖЕСТВ

Проведен краткий обзор подходов к формализации понятия нечеткого мультимножества. Предложен новый подход, охватывающий все рассмотренные в обзоре модели и позволяет порождать новые структуры мультимножеств путем изменения области определения и/или области значений.

Введение. Разработка моделей нечетких мультимножеств имеет сравнительно небольшую историю, начатую, вероятно, работой Ягера [1]. Учитывая это формализм описания нечетких мультимножеств еще не является общепринятым. В разных работах одни и те же формальные конструкции из-за различной содержательной интерпретации могут называться различным образом, что затрудняет интерпретацию представляемых моделей.

В работе предложены две модели, охватывающие почти все известные на сегодня модели конечных нечетких структур мультимножеств, а также позволяют порождать новые структуры за счет изменения области определения и/или области значений. Важность удачного формального описания математических понятий отмечает Кофман [2]: «Всегда можно заменить одно математическое понятие другим. Но будет ли оно порождать свойства, которые с его помощью было бы легче обнаружить, доказать и использовать».

Обзор моделей. Ягер [1] определил понятие «нечеткое мультимножество» (fuzzy multiset) или «нечеткий портфель» (fuzzy bag) как четкое конечное подмножество декартового произведения $X \times [0,1]$, для записи которого он использовал символизм в форме обычного множества пар

$$\left\{(x_i, \mu_i)\right\}_{i=1}^{p} \qquad (1)$$

указывая в контексте, что
для $i \neq j$ может

быть, что $x_i = x_j$, а $\mu_i = \mu_j$ либо $\mu_i \neq \mu_j$. В работе [1] используется и другая форма записи нечеткого мультимножества A в виде отображения

$$C_A : X \times [0,1] \to N, \qquad (2)$$

где $N = \{0,1,2,...\}$ – множество натуральных чисел. Эта форма, на наш взгляд, обладает тем недостатком, что, если она не сопровождается вышеупомянутым контекстом, то учитывая несчетность множества $[0,1]$ у читателя может возникнуть представление о несчетности мультимножества. Модель (2) трактуется также как четкое мультимножество на области определения $X \times [0,1]$.

Отметим, что в (1) множество рассматривается как неупорядоченное, а порядок (номер пары) определяется порядком перечисления пар (p – кардинальное число, указывающее на мощность множества). Такой порядок будем называть тривиальным.

Миямото [3], основываясь на форме (1) предложил более наглядную форму записи нечеткого мультимножества, в которой объединены все пары, имеющие одинаковое значение первой компоненты упорядоченной пары (x_i, μ_i):

$$A = \left\{ \left(\mu'_{11}, \mu'_{12}, ..., \mu'_{1l_1}\right) / x_1, ... \left(\mu'_{k1}, \mu'_{k2}, ..., \mu'_{kl_k}\right) / x_k, ..., \left(\mu'_{n1}, \mu'_{n2}, ..., \mu'_{nl_n}\right) / x_n \right\}, \qquad (3)$$

где $\left(\mu'_{k1}, \mu'_{k2}, ..., \mu'_{kl_k}\right) / x_k = \left\{ \left(\mu'_{k1}, x_k\right), ..., \left(\mu'_{kl_k}, x_k\right) \right\}$.

Он же предложил для сравнения мультимножеств упорядочить значения принадлежностей и записывать мультимножество в форме

$$A = \left\{ \left(\mu''_{11}, \mu''_{12}, ..., \mu''_{1l_1}\right) / x_1, ... \left(\mu''_{k1}, \mu''_{k2}, ..., \mu''_{kl_k}\right) / x_k, ..., \left(\mu''_{n1}, \mu''_{n2}, ..., \mu''_{nl_n}\right) / x_n \right\}, \qquad (4)$$

где $\mu''_{k1} \geq \mu''_{k2} \geq ... \geq \mu''_{kl_k}$.

Поскольку все последующие, введенные автором, операции над нечеткими мультимножествами, основаны на этом преобразовании, отметим, что основанием для такого преобразования является отсутствие содержательного (нетривиального) отношения порядка на множестве принадлежностей $\left(\mu'_{k1}, \mu'_{k2}, ..., \mu'_{kl_k}\right)$. Другими словами, при отсутствии содержательного отношения порядка, введенные автором операции и отношения адекватны. При наличии такого отношения порядка на множестве принадлежностей модель, основанная на преобразовании (4), может оказаться не адекватной.

В работе Тарасова [4] отмечены следующие подходы для описания нечетких мультимножеств.

1. Введенное Ягером описание функции, порождающей нечеткое мультимножество A:

$$\mu_A : X \times [0,1] \to N, \; A = \left\{ (x_i, \alpha_i) \right\}_{i=1}^{m}, \; \alpha_i \in [0,1]. \qquad (5)$$

Отмечается, что каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие значение α с кратностью n. Число n показывает, сколько раз появляется пара (x, α). Это позволяет рассматривать такое множество пар, как n неточных копий x и трактовать значение α как степень сходства с эталоном. Из текста не очевидно, что одному и тому же значению x может быть поставлено в соответствие много значений α. К тому же, в качестве не вполне ясного замечания, сказано, что такое расширение обычных мультимножеств не всегда пригодно (причины и условия непригодности определения, данного Ягером, не указаны).

2. Альтернативное (по сравнению с подходом Ягера) описание отображения, приведенное в работе Сиропулоса [5]:

$$\varphi : X \to [0,1] \times N, \tag{6}$$

которое названо мультинечетким множеством (Multi-Fuzzy Set).

3. Модель Миямото (3), приводящее к выполнению условий для множеств уровня α:

$$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha,$$

$$(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha.$$

4. Расширение описания нечеткого мультимножества, когда значение кратности описывается нечеткими числами [6].

5. Предложенное Тарасовым определение

$$A : X \times N \to [0,1]. \tag{7}$$

Это определение не сопровождается условием $\forall x \in X \ \exists! n \in N$, что позволяет рассматривать в области определения различные пары (a, n_1) и (a, n_2), в том числе и бесконечные последовательности таких пар.

В работе [4] не рассмотрена работа Сиропулоса [7], в которой предлагается рассматривать нечеткое мультимножество $A : X \to N \times [0,1]$ как совокупность двух отображений $A = (A_m, A_\mu)$. Первое $A_m : X \to N$ называется функцией кратности (multiplicity function), второе $A_\mu : X \to [0,1]$ называется функцией принадлежности. Таким образом, если $A(x) = (n, \alpha)$, то $A_m(x) = n$, $A_\mu(x) = \alpha$, $\alpha \in [0,1]$.

Определение нечетких структур мультимножеств. В отличие от [7] в данной работе предлагается использовать определение конечного нечеткого мультимножества с помощью двух различных композиций функций кратности и функций принадлежности.

Далее используются следующие обозначения: A, $\underset{\sim}{A}$ – обычное и нечеткое (в смысле Заде или Гогена) множество, соответственно; $\hat{A}$ – конечное (четкое) мультимножество; $\underset{\sim}{\hat{A}}$ – конечная нечеткая структура мультимножеств.

Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ – (четкое) множество элементов. Пусть $N_h = \{0,1,...,h\}$ – множество натуральных чисел, не превышающих заданного значения h.

Определение 1. Конечным мультимножеством $\hat{M}$ назовем отображение

$$\hat{M} : X \to N_h . \qquad (8)$$

Отображение $\hat{M}$ будем называть функцией кратности или характеристической функцией мультимножества, значение функции кратности обозначать $k(x)$, а область определения отображения $\hat{M}$ – множеством базовых элементов или основой мультимножества [8]. В отличие от [9] мы не различаем функцию кратности и характеристическую функцию мультимножества.

Носитель $\operatorname{supp}\hat{M}$ мультимножества $\hat{M}$ – подмножество множества базовых элементов: $\operatorname{supp}\hat{M} = \{x \mid k(x) > 0\}$.

Пусть $F : \mathrm{Z} \to [L]$ – отображение четкого мультимножества (либо его частного случая – обычного множества) в упорядоченное множество принадлежностей, представляющее собой решетку либо произведение решеток $L = L_1 \times L_2 \times ... \times L_p$. В случае, когда Z – обычное множество, а $L = L_1$ такая структура представляет собой нечеткое множество по Гогену.

Рассмотрим некоторые особенности следующих моделей:

$$\underset{\sim}{\hat{A}} = M\left(F\left(X\right)\right), \qquad (9)$$

$$\underset{\sim}{\hat{B}} = F\left(M\left(X\right)\right). \qquad (10)$$

1. Пусть $L = [0,1]$. Тогда в соответствии с (9) отображение $F : X \to [0,1]$ представляет собой нечеткое множество, введенное Заде: $F(X) = \underset{\sim}{A}$. Тогда

$$\underset{\sim}{\hat{A}} = M\left(F\left(X\right)\right) = M\left(\underset{\sim}{A}\right) = \left\{k_1 \cdot (x_1, \alpha_1), ..., k_i \cdot (x_i, \alpha_i), ..., k_n \cdot (x_n, \alpha_n)\right\} \qquad (11)$$

представляет собой совокупность повторяющихся пар с общим для них значением принадлежности. Такая структура называется в [10] нечетким мультимножеством (Fuzzy Multiset).

В соответствии с (10) отображение $M : X \to N$ порождает обычное мультимножество $\hat{B} = M_{\hat{B}}(X) = \{k_1 \cdot x_1, ..., k_i \cdot x_i, ..., k_n \cdot x_n\}$, где $k_i = M_{\hat{B}}(x_i)$ – значение функции кратности или количество повторений элемента x_i. Отображение $F : \hat{B} \to [0,1]$ порождает мультинечеткое множество:

$$\underset{\sim}{\hat{B}} = F\left(M\left(X\right)\right) = \left\{\left(x_1, \{\alpha_{1j}\}_{j=1}^{k_1}\right), ..., \left(x_i, \{\alpha_{ij}\}_{j=1}^{k_i}\right), .., \left(x_n, \{\alpha_{nj}\}_{j=1}^{k_n}\right)\right\}. \qquad (12)$$

Отметим, что структура (11) – частный случай структуры (12). Другими словами, в мультинечетком множестве для произвольного элемента x_i с кратностью k_i значения принадлежности могут как повторяться, так и быть различными.

Так как множество $\left\{\alpha_{ij}\right\}_{j=1}^{k_i}$ – неупорядочено, модель (12) изоморфна модели (3), рассмотренной в работе Миямото. В отличие от (3) в (12) использованы традиционные обозначения: (a,b) – для упорядоченной пары и $\{\ \}$ – для неупорядоченного множества.

Это тривиально упорядоченное мультимножество. Поэтому для мультимножества $\hat{\underset{\sim}{A}}$ вида (12) допустим переход к форме (4) и допустимы все операции и отношения, введенные Миямото в [3].

2. Пусть $L=[0,1]^p=\underbrace{[0,1]\times\ldots\times[0,1]}_{p}$. В соответствии с (9) первое отображение $F: X \to [0,1]^p$ порождает векторнозначное нечеткое множество [10]:

$$F(X)=\vec{\underset{\sim}{A}}=\left\{(x_1,\vec{\alpha}_1),\ldots,(x_i,\vec{\alpha}_i),\ldots,(x_n,\vec{\alpha}_n)\right\},$$

где $\vec{\alpha}_i=\left(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{ij},\ldots,\alpha_{ip}\right)$ – вектор размерности $p=\text{const}$. Тогда второе отображение $M\left(\vec{\underset{\sim}{A}}\right)$ порождает следующую конечную нечеткую структуру:

$$\hat{\underset{\sim}{A}}=M\left(F(X)\right)=M\left(\vec{\underset{\sim}{A}}\right)=\left\{k_1\cdot(x_1,\vec{\alpha}_1),\ldots,k_i\cdot(x_i,\vec{\alpha}_i),\ldots,k_n\cdot(x_n,\vec{\alpha}_n)\right\}, \quad (13)$$

которая называется векторнозначным мультинечетким множеством (Vector Multi-Fuzzy Set).

В соответствии с (10) порождается следующая конечная нечеткая структура:

$$\hat{\underset{\sim}{B}}=F\left(M(X)\right)=\left\{\left\{x_1,\left\{\vec{\alpha}_{1j}\right\}_{j=1}^{k_1}\right\},\ldots,\left\{x_i,\left\{\vec{\alpha}_{ij}\right\}_{j=1}^{k_i}\right\},\ldots,\left\{x_n,\left\{\vec{\alpha}_{nj}\right\}_{j=1}^{k_n}\right\}\right\}. \quad (14)$$

Такая структура до настоящего времени, скорее всего, не рассматривалась.

3. Если $L=[0,1]\times[0,1]$ – упорядоченное множество значений нечеткого признака, измеренного в шкале порядка, получим интуиционистское нечеткое множество Анастасова [3].

Другие новые нечеткие структуры и их особенности будут рассмотрены в последующих работах.

Выводы. Проведенный обзор и анализ работ показал существенное отличие подходов различных авторов к формализации понятия нечеткого мультимножества. Предложен новый подход к формализации этого понятия, охватывающий все рассмотренные в обзоре случаи формализации конечных нечетких структур мультимножеств.

О.Є. Сенько

МОДЕЛЮВАННЯ СКІНЧЕННИХ НЕЧІТКИХ СТРУКТУР МУЛЬТИМНОЖИН

Проведено короткий огляд підходів до формалізації поняття нечіткої мультимножини. Запропоновано новий підхід, який охоплює всі розглянуті в огляді моделі та дозволяє породжувати нові структури мультимножин за допомогою зміни області визначення і/або області значень.

A.E. Sen'ko

MODELLING OF FUZZY FINITE MULTISET STRUCTURES

The brief review of approaches to formalization the concept of an fuzzy multiset is carried out. The new approach, which covers all the models considered in the review is offered and allows to generate new structures of multisets by changing the domain and/or range is offered.

1. *Yager R.* On the Theory of Bags // International Journal of General Systems. – 1986. – Vol. 13. – P. 23–27.
2. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.
3. http://www.springerlink.com/content/mld3a4eqe1exlyj/
4. *Тарасов В.Б.* От параметризированных нечетких множеств к нечетким мультимножествам уровня // Нечеткие системы и мягкие вычисления. Сб. науч. тр. II Всеросийской науч. конф. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – С. 40–48.
5. *Syropoulos A.* Mathematics of Multisets // Multiset Processing. Lecture Notes in Computer science. – Berlin: Springer Verlag, 2001. – Vol. 2235. – P. 347 – 358.
6. *Rocacher D.* On FuzzyBags and Their Application to Flexibile Querying // Fuzzy Sets and systems. – 2003. – Vol. 140. – P. 93–110.
7. http://www.csi-india.org/web/csi/themearticle3-10
8. *Буй Д.Б., Богатирьова Ю.О.* Сучасний стан теорії мультимножин // Вісник Київського університету, Серія: фізико-математичні науки. – 2010. – № 1. – С. 51–58.
9. *Петровский А.Б.* Основные понятия теории мультимножеств. – М.: Едиториал УРСС. – 2003. – 248 с.
10. http://ieexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?reload=true&arnumber=5584821&contentType=Conference+Publications

Получено 15.10.2012

Об авторе:

Сенько Александр Евгеньевич,
ведущий инженер-программист Института кибернетики имени В.М. Глушкова
НАН Украины.