

Методами інтегральних перетворень Ганкеля 2-го роду і Фур'є побудовано аналітичний розв'язок задачі фільтраційної консолідації у багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах вологомістких пористих частинок. Експериментально досліджеобчислювальна на збіжність розв'язку у вигляді вкладених сум за різними послідовностями спектральних значень. Здійснено чисельне моделювання і аналіз динаміки просторово-розподілених полів тисків у рідині неоднорідного циліндричного середовища мікропористих частинок.

© М.Р. Петрик, В.С. Дейнека, Є.І. Воробієв, 2013 УДК 519.6

М.Р. ПЕТРИК, В.С. ДЕЙНЕКА, Є.І. ВОРОБІЄВ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ В НЕОДНОРІДНИХ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ДИСПЕРСНИХ МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Вступ. Розглядаються процеси фільтраційної консолідації та фільтраційного відтиску (solid-liquid pressing) в багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах волого містких пористих частинок біологічної природи. Структура таких середовищ рослинного походження містить розгалужену систему вологомістких клітин, міжклітинних порожнин, мікропор, через які здійснюється масоперенос [1-6]. При фільтраційному відтиску в попередньо сформованому пласті з тонких частинок біологічного матеріалу, що піддається механічному стискуванню, виникають внутрішні й зовнішні градієнти тисків відповідно в частинках і міжчастинковому просторі, які спричиняють відтоки рідини з пласту та частинок. При цьому внутрішні потоки рідини спрямовані від середини мікропор вологомістких частинок до їх поверхонь. Далі формуються проміжні (транзитні) потоки, спрямовані від зовнішніх поверхонь частинок у макропори міжчастинкового простору (extraparticle spaces). В макропорах міжчастинкового простору виникають відтоки рідини назовні пласту середовища. Відповідна феноменологічна модель такої фільтраційної консолідації та відтиску рідини з частинок в однорідній і одновимірній постанов-

ці для матеріалів клітинної	няннях балансу маси у внутрічастинковому
структури розглянута в [1, 4].	просторі (intraparticle spaces), включаючи
Остання грунтується на	

внутрішній і клітинний простори, та міжчастинковий простір. Згідно з цією моделлю, потік рідини з мікропорів частинок розглядається як такий, що є незначним у порівнянні з потоком з мікропорів частинок назовні (в макропори) та потоком назовні пласту фільтраційного середовища. Розглянута в [2] модель включає припущення про псевдостатичність потоку між внутрічастинковим і міжчастинковим просторами, що визначає інтенсивність потоку з середини частинки назовні і є прямо пропорційним різниці тисків всередині і назовні частинки.

В роботі побудовано математичну модель у припущенні шаруватості циліндричної області фільтраційної консолідації, схематизація якої показана на рис. 1. Фільтрувальне середовище поступає вздовж вісі z на вхід робочої області (межа $z = l_0$), де через фільтрувальну мембрану (положення r = R) відбувається розділення твердої та рідинної фаз. Остання проходить крізь пори фільтрувальної перепони, а непроникна тверда фаза здійснює рух вздовж вісі z у напрямі виходу з циліндричного робочого каналу (межа z = l).



РИС. 1. Схематизація робочої області середовища фільтраційної консолідації

Математична постановка задачі. З урахуванням отриманого в [2–5] диференціального рівняння консолідації сформулюємо наступну задачу фільтрації та відтиску дисперсних середовищ з урахуванням неоднорідностей властивостей консолідації осаду вздовж напряму руху фільтрувального середовища шляхом апроксимації неоднорідної області (l_0, l) кусково-однорідною: побуду-

ємо обмежений в області $D = \{(t, r, z): t > 0, r \in (R_0, R);$

$$z \in \bigcup_{k=1}^{n+1} (l_{k-1}, l_k), \ 0 \le l_0 < l_1 < \dots < l_{n+1} < \infty \} \text{ розв'язок системи рівнянь:}$$
$$\frac{1}{\nu_1} \left(\frac{\partial^2 P_k(t, r, z)}{\partial t^2} \right) + (1 + \delta_1) \frac{\partial P_k}{\partial t} =$$
$$= \left(\frac{1}{\nu_1} \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) b_{r_0}^2 \left[\frac{\partial^2 P_k}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P_k}{\partial r} \right] + \left(\frac{1}{\nu_1} \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) b_k^2 \frac{\partial^2 P_k}{\partial z^2} + f(t, r),$$

Компьютерная математика. 2013, № 1

$$f_k(t,r) = \frac{1}{\nu_1} \frac{\partial^2 P_{l_0}(t,r)}{\partial t^2} + (1+\delta_i) \frac{\partial P_{l_0}}{\partial t}, \quad k = \overline{1, n+1}, \quad (1)$$

з початковими умовами:

$$P_{k}(t,r,z)_{|t=0} = g_{1k}(r,z); \quad \frac{\partial P_{k}}{\partial t}_{|t=0} = g_{2k}(r,z), \quad (2)$$

крайовими умовами за змінною г:

$$\frac{\partial P_k}{\partial r}\Big|_{r=R_0} = 0; \quad P_k(t,r,z)\Big|_{r=R} = g_k(t,z), \tag{3}$$

крайовими та умовами спряження за змінною z:

$$P_{1}(t, r, z) \Big|_{z=l_{0}} = P_{l_{0}}(t, r); \quad P_{n+1}(t, r, z) \Big|_{z=l_{n+1}} = P_{l}(t, r); \\ \left[P_{k}(t, r, z) - P_{k+1}(t, r, z) \right]_{z=l_{k}} = 0, \\ \left[\frac{\partial P_{k}}{\partial z} - \frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_{k}} \frac{\partial P_{k+1}}{\partial z} \right]_{z=l_{k}} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$
(4)

Тут $P_k(t,r,z), k = \overline{1,n+1} - \phi$ ункції просторово-часових розподілів тисків у рідкій фазі неоднорідного фільтрувального середовища; $[l_{k-1}, l_k], k = \overline{1, n+1} - k$ -ий пласт (сегмент) середовища в вздовж осі Z; b_k^2 – складова коефіцієнта консолідації твердої фази вздовж осьового напряму переносу (осі Z) в *k*-му пласті неоднорідного фільтрувального середовища; $b_{r_0}^2$ – радіальна складова коефіцієнта консолідації твердої фази (вздовж осі *r*); $\zeta_k = \frac{1}{\mu r_k}$ – компоненти коефіцієнта та фільтрації в *k*-му пласті середовища; μ , r_k – коефіцієнти динамічної в'язкості рідини й опору *k*-го пласта середовища; v_1, δ_1 – експериментальні кінетичні параметри визначені в [2, 4], $[\phi]_{l_k} = \phi(t, r, l_k + 0) = \phi(t, r, l_k - 0)$.

Аналітичний розв'язок початково-крайової задачі. На основі [7–10] аналітичний розв'язок початково-крайової задачі (1)–(4) має вигляд

$$P_k(t, r, z) =$$

$$= \int_{R_{0}}^{R} \sum_{k_{1}=1}^{n+1} \int_{l_{k_{1}-1}}^{l_{k_{1}}} \left[H_{k,k_{1}}(t;r,\rho;z,\xi) g_{2_{k_{1}}}(\xi) + H_{k,k_{1}}^{1}(t;r,\rho;z,\xi) g_{1_{k_{1}j}}(\xi) \right] \sigma_{k_{1}} d\xi \rho d\rho +$$
$$+ \int_{0}^{t} \int_{R_{0}}^{R} \sum_{k_{1}=1}^{n+1} \int_{l_{k_{1}-1}}^{l_{k}} H_{k,k_{1}}(t-\tau;r,\rho;z,\xi) F_{k_{1}j}(\tau,\xi) \sigma_{k_{1}} d\xi \rho d\rho d\tau +$$

$$+ \int_{0}^{t} \int_{R_{0}}^{R} \left[W_{l_{0},k} \left(t - \tau; r, \rho, z \right) \left(\frac{d}{d\tau} + \nu_{1} \right) P_{0}(\tau, \rho) + W_{l,k} \left(t - \tau; r, \rho; z \right) \left(\frac{d}{d\tau} + \nu_{1} \right) P_{l}(\tau, \rho) \right] \rho d\rho d\tau, k = \overline{1, n+1}.$$
(5)

Тут

$$\begin{split} \mathbf{H}_{k,k_{1}}(t;r,\rho;z,\xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{H}_{k,k_{1}j}(t,z,\xi) \frac{V_{0}(\rho,\lambda_{j})V_{0}(r,\lambda_{j})}{\left\|V_{0}(r,\lambda_{j})\right\|^{2}}, \\ \mathbf{H}_{k,k_{1}}^{1}(t;r,\rho;z,\xi) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{H}_{k,k_{1}j}^{1}(t,z,\xi) \frac{V_{0}(\rho,\lambda_{j})V_{0}(r,\lambda_{j})}{\left\|V_{0}(r,\lambda_{j})\right\|^{2}}, \\ W_{l_{0},k}\left(t-\tau;r,\rho,z\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} W_{l_{0},kj}\left(t-\tau,z\right) \frac{V_{0}(\rho,\lambda_{j})V_{0}(r,\lambda_{j})}{\left\|V_{0}(r,\lambda_{j})\right\|^{2}}, \\ W_{l,k}\left(t-\tau;r,\rho,z\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} W_{l,kj}\left(t-\tau,z\right) \frac{V_{0}(\rho,\lambda_{j})V_{0}(r,\lambda_{j})}{\left\|V_{0}(r,\lambda_{j})\right\|^{2}}, \end{split}$$

функції впливу

$$\begin{split} \mathbf{H}_{k,k_{1}j}(t,z,\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{K}_{jm}(t,\beta_{m}) \frac{V_{k}(z,\beta_{m})V_{k_{1}}(\xi,\beta_{m})}{\left\|V(z,\beta_{m})\right\|^{2}}, \ k = \overline{1,n+1}, \\ \mathbf{H}_{k,k_{1}j}^{1}(t,z,\xi) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[\mathbf{v}_{1}(1+\delta_{1}) + \beta_{m}^{2} + b_{r_{0}}^{2}\lambda_{j}^{2} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{K}_{jm}(t,\beta_{m}) \times \\ &\times \frac{V_{k}(z,\beta_{m})V_{k_{1}}(\xi,\beta_{m})}{\left\|V(z,\beta_{m})\right\|^{2}}, \ k = \overline{1,n+1}, \end{split}$$

функції Гріна

$$W_{l_{0},kj}(t-\tau,z) = -b_{1}^{2} \frac{\sigma_{1}}{\varsigma_{11}^{0} \zeta} \sum_{m=1}^{\infty} K_{jm}(t-\tau,\beta_{m}) \frac{V_{1}(l_{0},\beta_{m})V_{k}(z,\beta_{m})}{\left\|V(z,\beta_{m})\right\|^{2}}, \ k = \overline{1,n+1},$$

$$W_{l,kj}(t-\tau,z) = -b_{n+1}^{2} \frac{\sigma_{n+1}}{\varsigma_{22}^{n+1}} \sum_{m=1}^{\infty} K_{jm}(t-\tau,\beta_{m}) \frac{V_{k}(z,\beta_{m})V_{n+1}(l,\beta_{m})}{\left\|V(z,\beta_{m})\right\|^{2}}, \ k = \overline{1,n+1},$$

 $K_{jm}(t - \tau, \beta_m) - фундаментальна функція Коші, яка будується у вигляді [10]:$

$$\begin{split} \mathbf{K}_{jm}(t-\tau,\lambda_{j},\beta_{m}) &= e^{\frac{1}{2}\left[\nu_{1}(1+\delta_{1})+b_{0}^{2}\lambda_{j}^{2}+\beta_{m}^{2}\right](t-\tau)}\frac{2sh\left(\phi_{m}(t-\tau)\right)}{\phi_{m}},\\ \phi_{m} &= \frac{1}{2}\left[\left(\nu_{1}-\beta_{m}^{2}\right)^{2}+\nu_{1}\delta_{1}\left(2\nu_{1}+\nu_{1}\delta_{1}+2\beta_{m}^{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \end{split}$$

 $V_k(z,\beta_m)$ – компонента власної функції $V(z,\beta_m)$ спектральної задачі Штурма – Ліувілля, отриманої внаслідок інтегрального перетворення вихідної спектральної задачі (1)–(4), що відповідає власному значенню β_m , m=0, 1, ...

Числове моделювання й аналіз. Вихідними даними для числового моделювання й аналізу процесу фільтраційної консолідації використовуються дані фізичних експериментів [2, 3]. Початкові і крайові умови задачі (1)–(4), виходячи із специфіки протікання реальних процесів, визначені наступним чином:

а) перша початкова умова:

$$P_{k}(t,r,z)\Big|_{t=0} = \left[\Delta P_{s_{0}}\sqrt{\frac{l-z}{l-l_{0}}}\right]\left(\frac{R-r}{R-R_{0}}\right)^{2} \equiv g(r,z);$$
(6)

б) друга початкова умова:

$$\frac{\partial P_k(t,r,z)}{\partial t}\Big|_{t=0} = b_k^2 \nabla^2 P_k(0,r,z) \equiv b_{0_r}^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial P_k}{\partial r} \right)_{t=0} + b_k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} P_k(0,r,z); \quad (7)$$

в) крайові умови за змінною *г*:

$$\frac{\partial P_k(\tau, r, z)}{\partial r} \bigg|_{r=R_0} = 0,$$

$$P_k(t, r, z) \bigg|_{r=R} = P_{l_r} \left(\frac{l-z}{l-l_0} \right) e^{\alpha_r t} \equiv g_k(t, z) ;$$
(8)

г) крайові умови за змінною z:

$$P_{1}(t,r,z)\big|_{z=l_{0}} = \left(P_{o_{p}} - P_{s_{0}}\right)\left(\frac{R-r}{R-R_{0}}\right)^{2}e^{\alpha_{l_{0}}} \equiv P_{0}(t,r),$$
(9)

$$P_{n+1}(t,r,z)\Big|_{z=l} = P_l^0 \left(\frac{R-r}{R-R_0}\right) e^{\alpha_l} \equiv P_l(t,r).$$
(10)

Друга початкова умова (7) випливає із фізичної постановки задачі: розв'язок задачі у початковий момент задовольняє рівняння Дарсі [1, 2]. В цій постановці умова (7) приведена до наступної:

$$\frac{\partial P_{k}(t,r,z)}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_{2k}(t,z) = -\frac{b_{k}^{2}\Delta P_{s_{0}}}{\sqrt{l-l_{0}}}(l-z)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{R-r}{R-R_{0}}\right)^{2} + \frac{4b_{0_{r}}^{2}}{(R-R_{0})^{2}}\left[\Delta P_{s_{0}}\sqrt{\frac{l-z}{l-l_{0}}}\right]\left(1-\frac{R}{r}\right).$$
(11)

Коефіцієнти консолідації b_k^2 та питомого опору неоднорідного фільтрувального середовища r_k , що враховують реальні властивості досліджуваних середовищ, описані наступними функціональними залежностями [1, 2]:

$$b_k^2 = b_{10} \left(1 + \varepsilon_b \left(P_{0p} - \Delta P_{s_0} \left(\frac{l - l_k}{l - l_0} \right)^2 \right) \right),$$
$$r_k = r_0 \left(1 + \varepsilon_r \left(P_{0p} - \exp \left(s \cdot \ln \left(P_{0p} \left(\frac{l - l_k}{l - l_0} \right)^2 \right) \right) \right) \right)$$

Тут $P_{0p}, P_{l_0}^0, P_l^0, P_{s_0}, P_{1_r}, b_{10}, r_0$ – опорні значення тисків, коефіцієнта консолідації та питомого опору середовища; $\varepsilon_b, \varepsilon_r, s$ – емпіричні константи, $\Delta P_{s_0} = P_{op} - P_{s_0}, P_{op} = 1.6e05 \ \Pi a, \ \Delta P_{s_0} = 0.1 \div 1.0e04 \ \Pi a$ [2].

Чисельні значення використовуваних при моделюванні коефіцієнтів консолідації b_k^2 та питомого опору r_k показані на рис. 2.



РИС. 2. Чисельні значення коефіцієнтів консолідації b_k^2 та питомого опору r_k

На рис. 3, а – г подані просторово розподілені модельні безрозмірні розподіли тисків у рідинній фазі $\overline{P}_k(t, r, z)$ для фільтраційної консолідації в неоднорідному циліндричному каналі дисперсійного вологомісткого середовища (рис. 1), побудованих згідно розв'язку в залежності від часу t, координати довжини каналу z та радіусу r. Діаграма на рис. 3, а – описує кінетику зміни тиску $\overline{P}_k(t,r,z)$ за всією довжиною каналу ($l-l_0 = 1M$) та від часу тривалістю 100 c для радіального зрізу в безпосередній близькості від непроникної внутрішньої циліндричної поверхні 0.1($R-R_0$). На цій діаграмі спостерігаємо криві найбільших значень тиску в рідинній фазі (волозі) у початкові моменти фільтраційної консолідації. Максимальні пікові значення тисків на цих кривих знаходяться поблизу входу й мінімальні – на виході, що лімітується відповідними значеннями тисків (та їх градієнтів), заданими вхідними та вихідними крайовими умовами. Зокрема, піки візуалізують деяку залишкову консолідаційну релаксацію, пов'язану з надлишком тиску в каналі, у тому числі, за рахунок попередніх фаз тощо. Мінімум тиску на вологу у положеннях, близьких до вихідної межі пояснюється найбільшим відтоком вологи через напівпроникну зовнішню циліндричну поверхню середовища (r = R). З ростом часу фільтраційної консолідації до 100 с спостерігаємо картину поступового падіння значень тиску (у тому числі надлишкового) за всією довжиною каналу, знову ж таки, пов'язану зі стрімким виходом вологи через зовнішню циліндричну фільтрувальну поверхню. У момент t = 40 c спостерігається деякий процес стабілізації, пов'язаний з падінням надлишкового тиску до 0 та подальшим зменшенням прикладеного тиску на вологу враховуючи продовження зменшення її кількості в каналі та перерозподіл зовнішнього прикладеного тиску на тверду фазу, ступінь консолідації якої збільшується в об'ємі. При подальшому збільшені тривалості консолідації (від 40 до 100 с) криві розподілу тиску $\overline{P}_{k}(t,r,z)$ з вигляду випуклої набувають вигляду дещо зворотної трансформації: змінюють вигляд випуклості на вигляд опуклості, але водночас прямуючи до 0. Аналогічні картини кінетики вологопереносу спостерігаємо і на наступних поданих діаграмах (б-г) при інших зрізах радіальної координати $(0.3(R-R_0), 0.7(R-R_0), 0.9(R-R_0)).$

Окремого пояснення на рис. З заслуговує діаграма г), що описує фільтраційну консолідацію для радіальних зрізів у безпосередній близькості до фільтраційної проникної циліндричної діаграми. Тут уже практично, як видно з поданих графіків, ніякого впливу немає зі сторони залишкового тиску (за відсутністю останнього) і тому всі криві мають різко спадний характер у вхідній зоні каналу (до 50–60 мм) і далі мають відносно плавний спад до 0.



Компьютерная математика. 2013, № 1



РИС. 3. Просторово-розподілені розподіли тисків фільтраційної консолідації у рідинній фазі $\overline{P}_{k}(t,r,z)$ в неоднорідному циліндричному каналі

Висновок. Методами інтегральних перетворень Ганкеля 2-го роду і Фур'є побудовано аналітичний розв'язок узагальненої змішаної крайової задачі для фільтраційної консолідації у багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах вологомістких пористих частинок. Обґрунтована розв'язність крайової задачі. Здійснене числове моделювання фільтраційної консолідації у багатокомпонентних циліндричних середовищах дало змогу побудувати простороворозподілені залежності тисків на рідину, що є визначальними параметрами вказаного виду переносу, візуалізувати кінетику консолідації та вологопереносу.

М.Р. Петрик, В.С. Дейнека, Е.И. Воробиев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДИСПЕРСНЫХ МИКРОПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Методами интегральных преобразований Ганкеля 2-го рода и Фурье построено аналитическое решение задачи фильтрационной консолидации в многокомпонентных неоднородных цилиндрических средах влагосодержащих пористых частичек. Экспериментально исследована вычислительная сходимость решения в виде вложенных сумм по разным последовательностям спектральных значений. Осуществлено численное моделирование и анализ динамики пространственно-распределенных полей давлений в жидкости неоднородной цилиндрической среды микропористых частичек.

M.R. Petryk, V.S. Deineka, E.I. Vorobiev

MATHEMATICAL MODELING OF FILTRATION CONSOLIDATION IN HETEROGENEOUS MULTICOMPONENT CYLINDRICAL DISPERSE MICROPOROUS MEDIA

With the use of the Hankel transform of the second kind and the Fourier transform, the analytical solution to the problem of filtration consolidation in multicomponent heterogeneous media of cylindrical water-containing porous particles is built. Numerical convergence of solutions in the form of

nested sums on different sequences of spectral values is experimentally investigated. The numerical simulation and analysis of spatially distributed pressure fields in the fluid environment of microporous non-uniform cylindrical particles is carried out.

- 1. Barenblatt G.I., Etnov V.M., Ryzhyk V. Theory of Fluids Flow Through Natural Rocks. Dordrecht: Kluwer. – 1990. – 303 p.
- 2. *Lanoiselle I.-L., Vorobyov E., Bouvier I.-M.* «Modelisation du Pressage o Pression Constante. Cas des Produits a Structure Cellulaire». Entropie. 1994. **30** (186). P. 39–50.
- 3. *Murase T., Iwata M., Wakita M., Adachi T., Hagashi N. and Shirato M.* "Variable–Pressure / Variable–Rate Expression of Semisolid Materials" // J. Chem. Eng. Jap. 1987. 20 (6). 603 p.
- 4. *Petryk M., Vorobiev E.* Liquid Flowing from Porous particles During the Pressing of Biological Materials // Computer & Chem. Eng. Elsevier Irland. 2007. **31.** P. 1336–1345.
- Petryk M., Vorobiev E. «Mass transfer from liquid containing spherical particles during the pressing of biological porous materials" // Proceeding of the 2nd European Conference on Filtration and Separation, Université de Technologie de Compiègne, Compiègne (France). – 2006. – P. 266–273.
- 6. Петрик М.Р. Нелинейная математическая модель двухуровнего переноса типа «фильтрация-консолидация» // Проблемы управления и информатики. 2010. № 2. С. 74 85.
- 7. *Ленюк М.П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. К.: Ін-т математики НАН України, 1997. 188 с.
- Ленюк М.П., Петрик М.Р. Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах. – Киев: Наукова думка, 2000. – 372 с.
- Ленюк М.П., Петрик М.Р. Одновимірна задача фільтрації та відтиску кусковооднорідному дисперсному фільтраційному середовищі // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. – Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 14. – С. 151–157.
- 10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1959. 468 с.
- 11. Gradshtein I.S., Ryzhik S.M., Jeffrey A., Zwillinger D. Table of Integrals, Series and Prodacts.7th // Ed. Amsterdam, Boston, Paris: Elsevier. Academic Press. 2009. 1100 p.

Одержано 14.02.2013

Про авторів:

Петрик Михайло Романович,

кандидат технічних наук, доцент, завідуючий кафедри програмної інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, E-mail: <u>Mykhaylo Petryk@tu.edu.te.ua</u>

Дейнека Василь Степанович,

доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України, завідуючий відділом Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, E-mail: <u>vdeineka@ukr.net</u>

Воробієв Євген Ігоревич,

співробітник Університету Технології м. Комп'єнь, Франція.