Компьютерная
Математика

Инструментальные средства информационных технологий

Предлагается ряд подходов для построения Ф-функций. В явном виде найдена нормализованная Ф-функция для описания взаимного расположения произвольно ориентированного эллипса и полуплоскости.

УДК 519.85

Т.А. БАРДАДЫМ,
О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

ЗАМЕТКИ О ПОДХОДАХ К ПОСТРОЕНИЮ Φ-ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЭЛЛИПСОВ*

Введение. Огромное количество важных практических задач непосредственно связано с необходимостью описывать и моделиро- вать взаимное расположение рассматривае-мых объектов. К наиболее распространен-ным типам таких задач относятся задачи упаковки, раскроя, покрытия, компоновки оборудования. Во всех этих задачах прихо-дится тем или иным способом описывать касание, пересечение, наложение одного объекта на другой, принадлежность одного объекта другому и т. п. Эффективным сред-ством построения соответствующих матема-тических моделей является метод Φ-функ-ций [1–2]. С помощью этого метода построе-ны средства описания взаимных расположе-ний кругов, шаров, многоугольников, парал-лелепипедов, конусов, цилиндров и разрабо-таны подходы к исследованию комбинаций базовых элементов [3–5]. В работе [6] построены Φ-функции для двумерных объектов, состоящих из отрезков прямых и дуг окружностей. На основе метода Φ-функ-ций создаются эффективные алгоритмиче-ские и программные средства.

В предлагаемой работе предприняты попытки найти методы построения Φ-функ-ций для описания эллипсов. Это позволило бы расширить список базовых объектов и способствовало бы практическому примене-нию данного метода.

*Работа выполнена при совместной поддержке Национальной академии наук Украины и Украин-ского научно-технологического центра (проект 5710).

Рассмотрим пару канонически замкнутых объектов $A = A(\nu_A, \vartheta_A) \subset R^2$ и $B = B(\nu_B, \vartheta_B) \subset R^2$, границы которых не имеют самопересечений, а аргументы характеризуют их расположение на плоскости. В качестве Φ-функции может использоваться любая всюду определенная непрерывная функция, характеризующая взаимное расположение объектов следующим образом:

$$\begin{cases} \Phi > 0, \text{ если } A \cap B = \varnothing, \\ \Phi = 0, \text{ если } \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) = \varnothing \ \& \ \partial A \cap \partial B \neq \varnothing, \\ \Phi < 0, \text{ если } \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B) \neq \varnothing. \end{cases}$$

В работах [3, 4] предлагается класс базовых Φ-функций для ограниченного набора базовых объектов и универсальный подход к построению свободных от радикалов Φ-функций для произвольных неориентированных Φ-объектов, ограниченных отрезками прямых и дугами окружностей (см. доказательства в [4]). Например, для двух кругов C_1 и C_2 радиусов r_1 и r_2 с центрами в точках (ν_{1x}, ν_{1y}) и (ν_{2x}, ν_{2y}) соответственно предлагается использовать не содержащую радикалов функцию

$$\Phi^{C_1C_2} = (\nu_{1x} - \nu_{2x})^2 + (\nu_{1y} - \nu_{2y})^2 - (r_1 + r_2)^2. \tag{1}$$

1. Геометрические особенности описания взаимного расположения объектов. Один из способов построения Φ-функций для ориентированных базовых объектов основан на аналитическом описании поверхности γ_{AB} нулевого уровня Φ-функции, характеризующей возможное расположение объектов A и B при их касании (см. [3]), $\gamma_{AB} = fr\{A(0) \oplus (-1)B(0)\}$, $\gamma_{AB} \cong \{u : \Phi(u) = 0\}$, где u – вектор переменных параметров размещения объектов A и B, $\oplus$ – символ суммы Минковского (об использовании этой операции для описания взаимного расположения объектов см., например, [7–8]). Для построения γ_{AB} может оказаться полезной и операция геометрического вычитания [9], которая для множеств A и B определяется как множество $A \overset{*}{-} B = \{u \in R^n : u + B \subset A\}$. Для операции геометрического вычитания имеет место соотношение $A \overset{*}{-} B = (A^c \oplus (-B))^c = \bigcap\limits_{b \in B} (A - b)$, где A^c – дополнение множества A до всего пространства, поэтому множество, необходимое для построения поверхности γ_{AB}, может задаваться и так:

$$A \oplus (-1)B = (A^c \overset{*}{-} B)^c = (\bigcap_{b \in B} (A^c - b))^c.$$

Переход к дополнениям множеств может оказаться особенно эффективным в задачах размещения объектов в ограниченных полостях.

2. Параметрическое представление кривой γ_{AB} для описания взаимного расположения эллипса и круга. Следует отметить, что найти в явном виде уравнение поверхности γ_{AB} и построить Φ-функции удалось только для некоторых классов базовых объектов [1–3] достаточно простой геометрической формы. Далее будут рассмотрены подходы к построению Φ-функций для эллипсов.

Рассмотрим эллипс A с центром в начале координат, касающийся в точке (x_0, y_0) круга B радиуса r с центром в точке $D = (x, y)$. Уравнение γ_{AB} задает кривую, по которой движется центр круга B, касаясь эллипса A, и уравнение этой кривой удается записать лишь в параметрическом виде. Пусть a_1 и b_1 – главные полуоси эллипса, тогда координаты точки (x_0, y_0) параметрически выражаются как $(x_0, y_0) = (a_1 \cos t_0, b_1 \sin t_0)$, а координаты центра круга, точки D, задаются как $x = x_0 + r\cos\varphi$, $y = y_0 + r\sin\varphi$, где φ – угол наклона касательной в точке (x_0, y_0) к оси Oy (см. рис. 1).

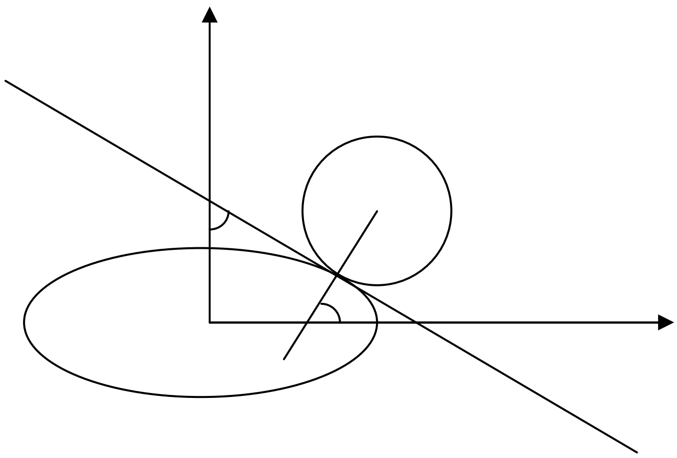

РИС. 1. Касание эллипса и круга

Из уравнения касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0) несложно получить соотношение $tg\varphi = \frac{a_1}{b_1} tg\, t_0$, что приводит к следующему параметрическому представлению линии γ_{AB}:

$$x = a_1 \cos t_0 + \frac{rb_1}{R_0}\cos t_0, \quad y = b_1 \sin t_0 + \frac{ra_1}{R_0}\sin t_0, \tag{2}$$

где $R_0 = \sqrt{b_1^2 \cos^2 t_0 + a_1^2 \sin^2 t_0}$.

3. Параметрическое представление кривой γ_{AB} для описания взаимного расположения двух эллипсов с параллельными полуосями. Аналогично можно получить и параметрическое представление кривой γ_{AB} для случая касания двух эллипсов A и B со взаимно параллельными полуосями a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно. Предполагается, что центр эллипса A находится в начале координат, центр эллипса B находится в точке $D=(x, y)$, а координаты точки (x_0, y_0) параметрически выражаются как $(x_0, y_0)=(a_1\cos t_0, b_1\sin t_0)$. Тогда $tg\varphi=\dfrac{a_1b_2}{a_2b_1}tg\, t_0$ (см. рис. 2), а

$$x=a_1\cos t_0+\frac{b_1a_2^2}{R}\cos t_0,\quad y=b_1\sin t_0+\frac{a_1b_2^2}{R}\sin t_0,$$

где $R=\sqrt{(a_2b_1\cos t_0)^2+(a_1b_2\sin t_0)^2}$, что в случае $a_2=b_2=r$ сводится к (2).

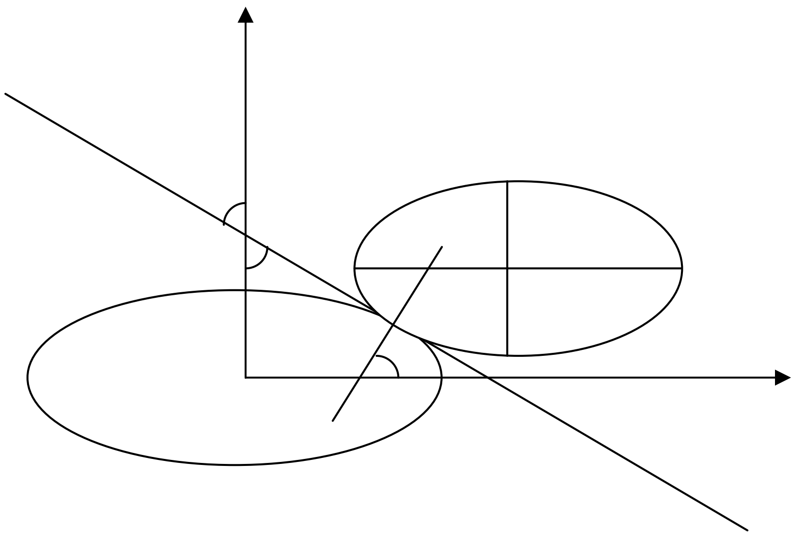

РИС. 2. Касание двух эллипсов

4. Φ-функция, описывающая взаимное расположение эллипса произвольной ориентации и полуплоскости. Φ-функцию, описывающую взаимное расположение эллипса произвольной ориентации и полуплоскости можно указать в явном виде. Пусть прямая L, ограничивающая полуплоскость, совпадает с осью Ox, т. е. эта полуплоскость задается неравенством $y\le 0$, и на этой прямой выбрана точка $x=0$, через которую проходит ось Oy. Пусть точка (x_0, y_0) принадлежит эллипсу. Уравнение эллипса E в точке (x_0, y_0) задается как

$$a_{11}x_0^2+2a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+2a_{13}x_0+2a_{23}y_0+a_{33}=0. \qquad (3)$$

Запишем уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0)

$$a_{11}x_0\bar{x} + a_{12}(y_0\bar{x} + x_0\bar{y}) + a_{22}y_0\bar{y} + a_{13}(x_0 + \bar{x}) + a_{23}(y_0 + \bar{y}) + a_{33} = 0 \qquad (4)$$

и выразим из (4) $\bar{y}$:

$$\bar{y}(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = -a_{33} - \bar{x}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) - a_{13}x_0 - a_{23}y_0.$$

Касательная будет параллельна оси Ox (что соответствует минимальному или максимальному расстоянию до полуплоскости), если коэффициент при $\bar{x}$ будет равен нулю:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) = 0.$$

Отсюда

$$x_0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}y_0 - \frac{a_{13}}{a_{11}}. \qquad (5)$$

Подставим (5) в (3):

$$y_0^2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + 2y_0(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) = 0$$

и получим окончательное выражение для y_0:

$$y_0 = -(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) \pm \sqrt{(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)}\,. \qquad (6)$$

Значение $y_0 = y_0^-$ из (6), взятое со знаком минус, и является искомой Φ-функцией, причем нормализованной, – оно равно расстоянию между эллипсом и полуплоскостью, если $y_0 > 0$, равно нулю при касании и меньше нуля при пересечении фигур. Значение $y_0 = y_0^+$ из (6), взятое со знаком плюс, соответствует касательной к эллипсу, параллельной оси Ox, но расположенной над эллипсом. Это выражение может использоваться для построения Φ-функции, характеризующей расположение эллипса в полосе. Если полоса задается неравенством $0 \le y \le M$, то

$$\Phi(L, E, M) = \min\{y_0^-,\ M - y_0^+\}.$$

Аналогично можно выписать выражения, характеризующие расположение эллипса и вертикальной полуплоскости, что в результате позволит определить Φ-функцию, характеризующую расположение эллипса в прямоугольнике.

5. Об использовании функции Минковского для построения Φ-функций. Существует функция, которая представляется очень удобной и достаточно универсальной для использования в качестве Φ-функции для пары объектов $A \subset R^n$ и $B \subset R^n$, $n \ge 2$ (по крайней мере для случая, когда γ_{AB} известно). Это $\Phi = R_C(\cdot) - 1$, где R_C – функция Минковского (или, как ее иногда называют, масштабная или калибровочная функция, см. [8]; для замкнутого выпуклого множества C, содержащего ноль, она определяется как $R_C(x) = \inf\{\lambda : \lambda > 0, x \in \lambda C\}$), а в качестве C используется множество, граница которого определяется поверхностью γ_{AB}. Как вариант можно рассмотреть и функцию $\Phi = R_{CC}^2(\cdot) - 1$, которая для строго выпуклого множества C будет строго выпуклой [11]. Предложенная в (1) для описания взаимного расположения кругов Φ-функция может трактоваться с этих позиций как $\Phi^{C_1C_2} = R_{\tilde{N}}^2(\nu_{1x} - \nu_{2x}, \nu_{1y} - \nu_{2y}) - (r_1 + r_2)^2$. Аналогично Φ-функция, приведенная в [6] для описания взаимного расположения двух квадратов Q_1 и Q_2 со сторонами $2a_1$ и $2a_2$ соответственно, может быть представлена как $\Phi^{Q_1Q_2} =$ $= (R_C(\nu_{1x} - \nu_{2x}, \nu_{1y} - \nu_{2y}) - 1) \cdot (a_1 + a_2)$, где множество C представляет собой квадрат со стороной $2(a_1 + a_2)$.

Авторы выражают благодарность Т.Е. Романовой за ценные замечания.

1. *Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical Models of Placement Optimisation: Two- and Three-Dimensional Problems and Applications / chapter in book "Modeling and Optimization in Space Engineering Springer Optimization and Its Applications" Editors G. Fasano and J. Pintér, Publisher Springer New York, 2013. – Vol. 73. – P. 363–388.
2. *Stoyan Yu.G.* Φ-function and its basic properties // Докл. НАН Украины. Сер. А. – 2001. – № 8. – С. 157–186.
3. *Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Шайтхауэр Г.* Математическое моделирование взаимодействий базовых геометрических 3D объектов // Кибернетика и системный анализ. – 2005. – № 3. – С. 19–31.
4. *Bennell J., Scheithauer G., Stoyan Yu., and Romanova T.* Tools of mathematical modelling of arbitrary object packing problems // J. Annals of Operations Research. – 2010. – Vol. 179, N 1. – P. 343 – 368.
5. *Chernov N., Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem // Computational Geometry: Theory and Applications. – 2010. – 43:5. – P. 535–553.
6. *Chernov N., Stoyan Y., Romanova T. and Pankratov A.* Phi-Functions for 2D Objects Formed by Line Segments and Circular Arcs // Advances in Operations Research, vol. 2012, Article ID 346358, 26 pages, 2012. doi:10.1155/2012/346358.
7. *Milenkovic I. and Sacks E.* Two approximate minkowski sum algorithms // Int. J. Comp. Geometry & App., 2010. – N 20. – P. 485–509.
8. *Стоян Ю.Г., Пономаренко Л.Д.* Сумма Минковского и годограф вектор-функции плотной упаковки // Доповіді АН УРСР. – 1977. – Сер. А. – № 10. – С. 51–57.
9. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 2004. – 416 с.
10. *Hiriart-Urruty J.-B., Lemaréchal C.* Convex Analysis and Minimization Algorithms. I and II. – Berlin: Springer Verlag, 1991. – N 417. – 347 p.
11. *Лаптин Ю.П., Бардадым Т.А., Щетинин Е.И.* Использование некоторых точных вспомогательных функций в задачах оптимизации // Тр. III Междунар. конф. «Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии», г. Кишинеу, Республика Молдова, 19–23 марта 2012. – С. 394–404.

Получено 15.05.2013

Т.О. Бардадим, О.А. Березовський

НОТАТКИ ПРО ПІДХОДИ ДО ПОБУДОВИ Ф-ФУНКЦІЙ ДЛЯ ЕЛІПСІВ

Пропонується ряд підходів до побудови Ф-функцій. У явному вигляді знайдено нормалізовану Ф-функцію для опису взаємного розташування довільно орієнтованого еліпса та півплощини.

T.O. Bardadym, O.A. Berezovskyi

NOTES ON THE APPROACHES TO THE CONSTRUCTION OF Ф-FUNCTIONS FOR ELLIPSES

Some approaches for construction of Ф–fucntions are proposed. A normalised Ф–fucntion decsribing mutual disposition of arbitrarily oriented ellipse and a half-plane is found in exact form.

Об авторах:

Бардадым Тамара Алексеевна,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: tbardadym@gmail.com

Березовский Олег Анатольевич,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: berezovskyi@mail.ru