

Исследован параллельный алгоритм решения задачи о дифракции волн антиплоской деформации на системе жестких включений некруговой формы. Задача сведена к решению сингулярных уравнений, которые реализуются численно. Исследован параллельный алгоритм с большим числом отражателей. Приведены зависимости напряжений на границе неоднородностей от динамических и геометрических характеристик. Получены новые результаты.

© Б.Е. Панченко, И.Н. Сайко,
2014

УДК 004.652, 539.3

Б.Е. ПАНЧЕНКО, И.Н. САЙКО

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН СДВИГА НА СИСТЕМЕ ЖЕСТКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ В БЕСКОНЕЧНО УПРУГОЙ СРЕДЕ

Введение. В механике актуальны задачи о динамических нагрузках в конструкциях, содержащих системы неоднородностей. Важным вопросом является определение характеристик поля вблизи концентраторов напряжений. Исследовано несколько похожих задач [1, 2]. В случае неоднородностей сложной геометрической формы эффективно работает метод интегральных уравнений [3]. Метод сингулярных интегральных уравнений предложен в работе [4] для решения задачи о взаимодействии волны сдвига с криволинейными трещинами. В работе [5] этим методом исследуется задача о взаимодействии плоских волн с упругим включением в изотропной среде.

Постановка задачи. Рассмотрим в неограниченной изотропной среде бесконечно длинный вдоль оси Oz цилиндр, поперечное сечение которого ограничено замкнутым контуром L типа Ляпунова (кривизна L удовлетворяет условию Гельдера). Предположим, что внутренность цилиндра представляет собой жесткое включение. Кривая L разбивает плоскость Oxy на две области: внутреннюю D_1 и внешнюю D_2 . Положительным направлением обхода контура L считаем направление, при котором область D_2 остается

слева.

Пусть W_0 – внешнее поле
перемещений. Считаем, что

источники этого поля размещены в области D_2 .
В качестве такого источника

может быть излучающаяся из бесконечности волна сдвига, нормаль к фронту, составляющей угол ψ с осью Ox ,

$$W_0(x, y) = \tau e^{-i\gamma_2(x \cos \psi + y \sin \psi)}, \quad \gamma_2 = \frac{\rho_2 \omega}{\mu_2}, \quad (1)$$

где ω – частота колебаний; ρ_2 – плотность; μ_2 – модуль сдвига области D_2 или гармонический источник (сосредоточенная в точке $M_0(x_0, y_0)$ сила амплитуды P), порождающий поле перемещений

$$W_0(x, y) = -\frac{P}{\mu_2} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 R), \quad R = |z - z_0|, \quad z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0. \quad (2)$$

Здесь $H_m^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля m -го порядка, зависимость от времени выражается множителем $e^{i\omega t}$.

В результате взаимодействия приходящей волны W_0 с цилиндром D_1 возникает дифрагированное волновое поле. В области D_2 полное поле перемещений ищем в виде $W = W_2 + W_0$, где функция W_2 , удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца в D_2 с волновым числом γ_2 , а также условиям излучения на бесконечности типа Зоммерфельда [6]. На L получаем граничное условие:

$$W_2 + W_0 = B, \quad (3)$$

где B – неизвестная комплексная постоянная.

Метод решения. Удовлетворение граничного условия (3) приводит к интегральному уравнению с логарифмическим ядром. Для получения сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши продифференцируем это равенство по дуговой координате s_0 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_0} W &= \left(e^{i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial z} + e^{-i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \\ \frac{\partial}{\partial n_0} W &= -i \left(e^{i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial z} - e^{-i\phi_0} \frac{\partial W}{\partial \bar{z}} \right)_{z \rightarrow \zeta_0}, \\ e^{i\phi_0} &= \frac{d\zeta_0}{ds_0}; \quad \zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0 \in L. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции W_1, W_2 , характеризующие поле перемещения L и D_2 , будем искать в виде

$$\begin{aligned} W_k(x, y) &= \int_L f_k(s) G_k(x, y, \xi, \eta) ds, \quad G_k = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_k r), \\ r &= |z - \zeta|, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользуемся известными соотношениями [4]

$$\frac{\partial}{\partial z} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{-ia} H_1^{(1)}(\gamma r), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} H_0^{(1)}(\gamma r) = -\frac{\gamma}{2} e^{ia} H_1^{(1)}(\gamma r),$$

$$H_1^{(1)}(\gamma r) = \frac{2}{i\pi\gamma r} + H_1(\gamma r), \quad z - \zeta = re^{ia}, \quad (6)$$

где $H_1(x)$ – непрерывная функция в точке $x = 0$.

Осуществляя предельный переход при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ в (6) с привлечением формул Сохоцкого – Племяля вычисления предельных значений интегралов типа Коши, приходим к искомым интегральным уравнениям относительно неизвестных функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$. Имеем ($m = 1, 2$)

$$\int_L [f_2(s)(g(s, s_0) + B(s, s_0))] ds = N_m(s_0),$$

$$g(s, s_0) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right), \quad B(s, s_0) = \frac{\gamma_2}{4i} H_1(\gamma_2 r_0) \cos(\phi_0 - \alpha_0),$$

$$\zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0}, \quad \zeta_0 - z_0 = R_0 e^{i\phi_0}, \quad N_1(s_0) = i\gamma_2 W_0(s_0) \cos(\phi_0 - \phi),$$

$$N_2(s_0) = i\gamma_2 W_{10}(s_0) \cos(\phi_0 - \phi_0), \quad W_{10}(s_0) = -PH_1^{(1)}(\gamma_2 R_0) / 4i\mu_2. \quad (7)$$

Здесь функции $N_1(s_0)$ и $N_2(s_0)$ отвечают случаю (1). Ядро $g(s, s_0)$ сингулярное [5], ядро $B_k(s, s_0)$ ($k = 1, 2$) непрерывное. Следовательно, интегральное уравнение в (7) является сингулярным.

Вопросы существования и единственности решения системы уравнений, аналогичных (7), исследовались многими авторами. Подробная информация об этом содержится в работе [6]. При этом установлено, что единственное решение необходимо искать в классе непрерывных (вместе со своими производными) по Гельдеру функций. Также установлено, что для выделения единственного решения сингулярного интегрального уравнения типа (7) необходимо дополнительное условие. Для этого необходимо присовокупить дополнительное условие, вытекающее из уравнения движения включения:

$$\mu_2 \int_L \frac{\partial}{\partial n_0} (W_2 + W_0) dS_0 + \rho_1 S \omega^2 B = 0,$$

$$B = \frac{1}{l} \int_L (W_2 + W_0) ds_0, \quad (8)$$

где S – площадь включения; l – длина контура L .

Дискретизация задачи. Введем параметризацию контура L с помощью соотношений $\zeta = \zeta(\beta)$, $\zeta_0 = \zeta(\beta_0)$, $0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi$ причем $\zeta(0) = \zeta(2\pi)$. Воспользуемся представлениями [6]

$$H_0^{(1)}(\gamma r_0) = \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| + \left[H_0^{(1)}(\gamma r_0) - \frac{2i}{\pi} \ln \left| \sin \frac{\beta - \beta_0}{2} \right| \right],$$

$$\frac{\gamma_k}{4i} H_1^{(1)}(\gamma_k r) s'(\beta_0) \cos(\phi_0 - \alpha_0) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2} + V_k(\beta, \beta_0),$$

$$V_k(\beta, \beta_0) = \frac{\gamma_k}{4i} H_1^{(1)}(\gamma_k r) s'(\beta_0) \cos(\phi_0 - \alpha_0) - \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2},$$

$$s'(\beta_0) = \frac{ds_0}{d\beta_0}, \quad k = 1, 2. \quad (9)$$

Теперь можно записать параметризованную форму интегральных уравнений (7)

$$\int_0^{2\pi} [p(\beta)(\alpha(\beta, \beta_0) + V_2(\beta, \beta_0))] d\beta = s'(\beta_0) N_m(\beta_0),$$

$$m, k = 1, 2, \quad p(\beta) = f_2(\beta) s'(\beta), \quad \alpha(\beta, \beta_0) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_0}{2}. \quad (10)$$

Численная реализация интегральных уравнений (10) проводилась методом механических квадратур. Интегральные уравнения удовлетворялись в узлах $\beta_m = \pi(2m-1)/n$ ($m = 1, 2, \dots, n$) и сводились к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции $p(\beta)$ в узлах $\beta_j = 2\pi(j-1)/n$ ($j = 1, 2, \dots, n$), где n – число точек разбиения контура L .

Плотности $p(\beta)$ выражались искомыми значениями $p(\beta_j)$ с помощью интерполяционного полинома Лагранжа, который имеет вид

$$p(\beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n p(\beta_j) \sin \frac{n(\beta_j - \beta)}{2} \operatorname{cosec} \frac{\beta_j - \beta}{2}, \quad (11)$$

в случае нечетного числа узлов разбиения контура L .

С учетом (11) можно получить квадратурную формулу для вычисления сингулярного интеграла с уравнений (10)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\beta) \operatorname{ctg} \frac{\beta - \beta_m}{2} d\beta \approx \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n p(\beta_j) \frac{\beta_j - \beta_m}{2}. \quad (12)$$

При численном решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода (7) внеинтегральные значения $p(\beta_m)$ находятся из выражений для интерполяционного полинома (11). Так, в случае нечетного числа узлов

$$p(\beta_m) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n (-1)^{m+i} p(\beta_j) \operatorname{cosec} \frac{\beta_m - \beta_j}{2}. \quad (13)$$

Отметим, что одно из линейных алгебраических уравнений, соответствующих сингулярному интегральному уравнению, необходимо заменить уравнением, соответствующим дополнительному условию (8).

При анализе динамической напряженности расчеты проводились для цилиндрических жестких включений эллиптического сечения: $\xi(\beta) = b \sin \beta$, $\eta(\beta) = -a \cos \beta$, $0 \leq \beta \leq 2\pi$. В этом случае рассматриваемые дифракционные задачи при соответствующем задании внешнего поля (1) или (2) обладают симметрией относительно координатных осей, что позволяет уменьшить число решаемых алгебраических уравнений. Здесь целесообразно разбиение контура L на нечетное число точек так, чтобы одна из точек, в которых удовлетворяются уравнения системы, попадала на ось симметрии.

Численные результаты. При численной реализации применялось распараллеливание [7] алгоритма по схеме [6]. Точность вычислений проверялась путем сравнения результатов при различных значениях N . Сравнение с тестовыми результатами [5, 6] показали хорошую достоверность используемых вычислительных алгоритмов. Данные показали, что чем больше точек коллокации, тем большая точность решения СИУ, поэтому мы можем утверждать, что наша система хорошо обусловлена.

Применение метода параллельных вычислений, проведенного на кластере «Инпарком-256», позволило подтвердить вывод о том, что сходимость решения СИУ практически не зависит от числа отражателей. Численное исследование показало, что при воздействии из бесконечности P и SH -волны в описанной системе эффект насыщения наблюдается не строго (как и в [6]). И хотя при линейном и симметричном относительно нагрузки расположении геометрически одинаковых жестких включений для усредненного исследования достаточно не более 11 отражателей, все же при дальнейшем наращивании их числа наблюдаются незначительные пульсации в распределении напряжений.

Для трех жестких включений эллиптического или ромбического сечения время вычислений контурных напряжений (для одного варианта) на 15 процессорах кластера типа «Инпарком» составляет около 5 часов. Решение аналогичной задачи процедурным методом с использованием типовых вычислительных средств, с точностью до 10^{-6} (500 точек коллокации) осуществлялось несколько суток.

На рис. 1 и 2 показаны графики распределения нормальных напряжений σ_n на контуре крайнего и центрального жесткого включения эллиптической формы, при $a/b = 1$; $b/a = 2,5$. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\gamma_{1,2} a = 0,7$; 1,5 и 2,0.

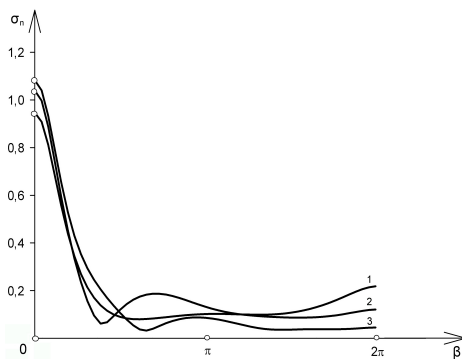


РИС. 1

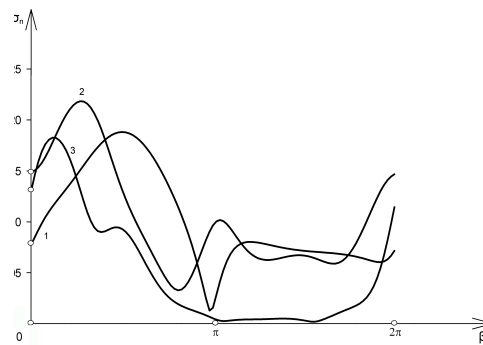


РИС. 2

В таблице приведен фрагмент результата для волны с бесконечности или источника. Воздействие на систему из трех эллиптических или ромбических жестких включений с соотношением осей $b/a = 2,5$ и волновых чисел $\gamma_2 a$, равных 1,0 и 1,7 соответственно. Координата источника $Y_z = 1,0$.

ТАБЛИЦА. Высокоточные значения максимумов нормальных напряжений

Источник	Тип контура	$\gamma \gamma_2 a$	Расположение	Угол β в рад	Максимум σ_n
Точный источник	Эллипс	1,0	Центральное	0	0,9896526648
Точный источник	Эллипс	1,0	Крайнее справа	5,9023427443	0,0919636539
Точный источник	Ромбик	1,0	Центральное	0	3,6915514124
Точный источник	Ромбик	1,0	Крайнее справа	4,7248588535	0,1443477199
Волна из бесконечности	Эллипс	1,0	Центральное	3,1408547138	3,9214396348
Волна из бесконечности	Эллипс	1,0	Крайнее справа	3,1948374366	3,4957127894
Волна из бесконечности	Ромбик	1,0	Центральное	3,1415926837	8,2144288522
Волна из бесконечности	Ромбик	1,0	Крайнее справа	3,1470778985	7,0822693448
Точный источник	Эллипс	1,7	Центральное	0	1,0791428665
Точный источник	Эллипс	1,7	Крайнее справа	5,7933235768	0,1869988602
Точный источник	Ромбик	1,7	Центральное	0	3,5537963616
Точный источник	Ромбик	1,7	Крайнее справа	6,2627834892	0,2886187426
Волна из бесконечности	Эллипс	1,7	Центральное	3,1415927813	4,6735005767
Волна из бесконечности	Эллипс	1,7	Крайнее справа	3,1948476857	3,4957127893
Волна из бесконечности	Ромбик	1,7	Центральное	3,1415926832	9,8191793350
Волна из бесконечности	Ромбик	1,7	Крайнее справа	3,1386176915	7,7442610437

Б.Е. Панченко, И.М. Сайко

ПАРАЛЕЛЬНЕ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРО ДИФРАКЦІЮ ХВИЛЬ ЗСУВУ
НА СИСТЕМІ ЖОРСТКИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ВКЛЮЧЕНЬ
У НЕСКІНЧЕННО ПРУЖНЬОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Досліджено паралельний алгоритм рішення задачі про дифракції хвиль антиплоскої деформації на системі жорстких включень некругової форми. Задача зведена до вирішення сингулярних рівнянь, які реалізуються чисельно. Досліджено паралельний алгоритм з великим числом відбивачів. Наведено залежності напружень на межі неоднорідностей від динамічних і геометричних характеристик. Отримано нові результати.

B.E. Panchenko, I.N. Sayko

PARALLEL SOLUTION TO THE PROBLEM OF DIFFRACTION OF SHEAR WAVES
ON A SYSTEM OF RIGID CYLINDRICAL INCLUSIONS
IN AN INFINITELY ELASTIC ENVIRONMENT

A parallel algorithm for solving the problem of anti-plane strain wave diffraction by a system of rigid inclusions of non-circular shape is investigated. The problem is reduced to solving singular equations that are implemented numerically. A parallel algorithm with a large number of reflectors is also investigated. The dependencies of the stresses on the boundaries of the irregularities on the dynamic and geometric characteristics are given. New results are obtained.

1. *Селезов И.Т., Кривонос Ю.Г., Яковлев В.В.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1985. – 136 с.
2. *Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. – Киев, 1978. – 307с.
3. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев, 1984. – 344 с.
4. *Фильшитинский Л.А.* Динамическая задача теории упругости с криволинейными разрезами (деформации продольного сдвига) // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 236. – С. 1327 – 1330.
5. *Назаренко А.М., Ложкин А.М., Панченко Б.Е.* Дифракция упругих волн на жестком цилиндрическом включении произвольного поперечного сечения // Вісник Донецького університету, Серія А: Природничі науки. – 2006. – № 1. – С. 143 – 147.
6. *Панченко Б.Е., Назаренко А.М.* Каркасный анализ предметной области: стационарные динамические задачи теории упругости для изотропных сред с произвольными неоднородностями // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 1. – С. 172 – 187.
7. *Химич А.М., Поляно В.В.* Эффективность двумерных блочно-циклических параллельных алгоритмов // Проблеми програмування. – 2008. – № 3. – С. 145 – 149.

Получено 19.02.2014

Об авторах:

Панченко Борис Евгеньевич,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,

Сайко Игорь Николаевич,
аспирант Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.