КОМПЬЮТЕРНАЯ МАТЕМАТИКА

УДК 519.8

Ю.П. ЛАПТИН

РЕШЕНИЕ НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТОЧНЫХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Для невыпуклых задач оптимизации известные методы, использующие точные штрафные функции, не всегда гарантируют сходимость к допустимому решению. В работе предлагается подход, позволяющий при определенных условиях преодолевать такие проблемы. Также сравнительно просто решаются вопросы выбора значений штрафных коэффициентов.

Введение. В настоящее время точные штрафные функции широко используются при решении оптимизационных задач с ограничениями [1 – 8]. Однако применение такого подхода связано с определенными проблемами, в частности, отсутствуют простые методики вычисления приемлемых значений штрафных коэффициентов; функции, описывающие исходную задачу, могут быть определены не на всем пространстве переменных. Эти вопросы для задач выпуклого программирования рассматривались в [9, 10].

Для невыпуклых задач оптимизации проблемы существенно усложняются. Допустимая область задачи может быть многосвязной, штрафная добавка и штрафная функция в целом могут иметь локальные минимумы вне допустимой области исходной задачи. Учитывая данное известные методы не всегда могут гарантировать сходимость к допустимому решению. Условия, при которых обеспечивается сходимость методов к допустимой точке, трудно проверять при решении практических задач, часто эти задачи не удовлетворяют сформулированным условиям сходимости. Такие патологические задачи могут быть весьма простыми. Достаточно рассмотреть задачи с квадратичными невыпуклыми ограничениями.

В работе предлагается подход, позволяющий преодолеть некоторые из указанных проблем. При этом должна быть известна допустимая точка исходной задачи. Схема решения в целом приводится для гладких задач, и может интерпретироваться как последовательное решение совокупности регулягированных подзадач.

Постановка задачи и некоторые свойства штрафных функций. Рассматривается задача: найти

$$f^* = \min\{ f(x): \ x \in \Omega \}, \tag{1}$$

где $\Omega = \left\{ x : h_i(x) \le 0, \ i = 1,..., m, \ x \in R^n \right\}$ $f, h_i : R^n \to R$ – непрерывные, дифференцируемые по направлению (существуют односторонние производные по направлению) функции, $i = 1,..., m$.

Положим $h(x) = \max\{0, h_i(x) : i = 1,..., m\}$. Будем рассматривать штрафные функции вида

$$F_\lambda(x) = f(x) + \lambda \cdot h(x), \ \lambda \in R, \lambda \ge 0, \tag{2}$$

и задачи: найти

$$F_\lambda^* = \min\{F_\lambda(x) : x \in \Omega_\delta\}, \tag{3}$$

где $\Omega_\delta = \left\{ x : h(x) \le \delta, \ x \in R^n \right\}, \ \delta > 0.$

Обозначим $F_\lambda'(x, p)$, $f'(x, p)$, $h'(x, p)$ – односторонние производные функций F_λ, f, h в точке $x \in R^n$ по направлению p. Следуя [2], определим $h^\downarrow(x)$, скорость наискорейшего спуска функции h в точке x,

$$h^\downarrow(x) = \min\{h'(x, p) : \|p\| = 1\}.$$

Пусть для чисел $\delta > 0$ и $a > 0$ выполняются условия

$$h^\downarrow(x) \le -a, \quad \forall x \in \Omega_\delta \setminus \Omega, \tag{4}$$

а функция f липшицева на $\Omega_\delta \setminus \Omega$. Тогда существует число $\lambda^* \ge 0$ такое, что при $\lambda > \lambda^*$ все точки локального минимума функции $F_\lambda(x)$, принадлежащие множеству Ω_δ, являются и точками локального минимума функции f на Ω (подробнее см. в [2]). Вне множества Ω_δ штрафная добавка $\lambda \cdot h(x)$ и, соответственно, штрафная функция $F_\lambda(x)$ могут иметь дополнительные локальные минимумы, не принадлежащие множеству Ω.

В случае, когда $f, h_i : R^n \to R, \ i = 1,..., m$ – выпуклые функции и для задачи (1) выполняются условия Слейтера, величину $a > 0$ можно выбрать так, что условие (4) будет выполняться при любом $\delta > 0$. То есть при $\lambda > \lambda^*$ задача (3) – это задача безусловной оптимизации ($\Omega_\delta = R^n$), точки минимума в задачах (1) и (3) совпадают, для решения задачи (3) могут использоваться эффективные методы безусловной оптимизации.

В невыпуклом случае, как отмечалось, положение существенно усложняется. Тем не менее, точные штрафные функции широко используются в методах линеаризации [3,4] в методах последовательного квадратичного программирования [6 – 8]. Одна из основных проблем при таком подходе – определение значений штрафных коэффициентов, для чего используются решения специальных вспомогательных задач, а также различные эвристики. Цель большинства работ в этом направлении – достижение сверхлинейной скорости сходимости для тех или других классов задач. Методы сходятся к стационарным точкам штрафной функции в допустимой области Ω или в недопустимой области. Вопросы о том, как избежать сходимости к стационарной точке штрафной функции в недопустимой области, как правило, не рассматриваются.

В настоящей работе рассматривается подход, обеспечивающий сходимость к допустимой стационарной точке исходной задачи, и позволяющий сравнительно просто определять значения штрафных коэффициентов. Предлагаемая схема сводится к введению некоторым образом специальной доверительной области, радиус которой определяется автоматически по ходу работы оптимизационного алгоритма.

Процедура определения штрафных коэффициентов является обобщением результатов, изложенных в [10] для выпуклых задач оптимизации. Кратко эти результаты описываются следующим образом. Пусть $f, h : R^n \to R$ – выпуклые функции, принимающие конечные значения при любых x, $\Omega = \left\{ x : h(x) \le 0,\ x \in R^n \right\}$ – компактное множество. Следуя [10] для точек $x \notin \Omega$, $y \in \Omega$ положим $\pi_\Omega(x, y)$ – точка пересечения отрезка $\left[x, y\right]$ с границей множества Ω. Обозначим $p(x, y)$ вектор, определяющий направление из точки x в точку y, $y \ne x$,

$$p(x, y) = (y - x) / \|y - x\|. \tag{5}$$

Теорема 1 [10]. Пусть заданы точка $y^0 \in \Omega$, числа $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, последовательность $x^k \in R^n$, $k = 0,1, \ldots,$ сходится к решению $\tilde{x}$ задачи (3), где $\Omega_\delta = R^n$, и для каждой точки x^k, $x^k \notin \Omega$, $k = 0,1, \ldots$ выполняется условие

$$F_\lambda^{'}(\overline{x}^k, p(\overline{x}^k, x^k)) = f^{'}(\overline{x}^k, p(\overline{x}^k, x^k)) + \lambda \cdot h^{'}(\overline{x}^k, p(\overline{x}^k, x^k)) \ge \varepsilon, \tag{6}$$

где $\overline{x}^k = \pi_\Omega(x^k, y^0)$. Тогда $\tilde{x}$ – решение задачи (1), т. е. $F_\lambda(x)$ – точная штрафная функция.

Таким образом, для контроля значения штрафного коэффициента λ на каждом шаге алгоритма безусловной оптимизации при решении задачи (3) необходимо проверять условие (6). Это требует решения одномерной задачи поиска точки пересечения отрезка $\left[x^k, y^0\right]$ с границей множества Ω, что реализуется достаточно эффективно. При условии $h(y^0) < 0$ существует [10] конечное $\bar{\lambda}$ такое, что при $\lambda > \bar{\lambda}$ неравенство (6) выполняется на всех итерациях алгоритма. При нарушении условия (6) коэффициент λ нужно увеличивать. В силу конечности $\bar{\lambda}$ число таких уточнений будет конечно, после чего алгоритм безусловной оптимизации сходится к решению задачи (1). В работе [10] рассматриваются также вопросы варьирования точки y^0. Сравнение полученных результатов с известными приведено в [10] для задач линейного программирования.

Далее описанные подходы уточняются и переносятся на невыпуклый случай.

Основные результаты. Проанализируем дополнительные возможности. Сначала рассмотрим свойства последовательностей, удовлетворяющих некоторым условиям, затем – возможности построения таких последовательностей в процессе решения задачи оптимизации.

Лемма 1. Пусть $\Phi: R^n \to R$ – непрерывная, дифференцируемая по направлениям функция (существуют односторонние производные), $x^k, p^k \in R^n, \left\|p^k\right\| = 1, k = 1, 2, \ldots$, – сходящиеся последовательности, $x^k \to \tilde{x},\ \ p^k \to \tilde{p}$, $k \to \infty$, для некоторых чисел $\delta > 0,\ \varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\Phi^{'}(x^k + tp^k, p^k) \le -\varepsilon\ ,\ t \in \left[0, \delta\right]\ ,\ k = 1, 2, \ldots\ . \tag{7}$$

Тогда $\Phi^{'}(\tilde{x}, \tilde{p}) \le -\varepsilon$.

Доказательство. Покажем, что для любого $\sigma > 0$ выполняется неравенство

$$\Phi(x^k + tp^k) \le \Phi(x^k) - \varepsilon \cdot t + \sigma \cdot t, \quad t \in \left[0, \delta\right]. \tag{8}$$

Для краткости обозначим $\varphi(t) = \Phi(x^k + tp^k)$, $\varphi^{'}(t) = \Phi^{'}(x^k + tp^k, p^k)$. По определению производной по направлению имеем

$$\varphi(t + \Delta t) = \varphi(t) + \varphi'(t)\Delta t + o(t, \Delta t),\ \Delta t \ge 0,$$

где

$$\frac{\mathrm{o}(t, \Delta t)}{\Delta t} \to 0 \ \text{ при } \Delta t \to +0. \tag{9}$$

Пусть значение переменной t зафиксировано, $t \in \left[0, \delta\right]$. Разобъем интервал $\left[0, t\right]$ на совокупность подинтервалов $\left[t_0, t_1\right], \left[t_1, t_2\right], \ldots, \left[t_{S-1}, t_S\right]$, где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{S-1} < t_S = t$. Обозначим $\Delta_s = t_{s+1} - t_s$, $s = 0, 1, \ldots, S-1$.

Имеем $\varphi(t_{s+1}) = \varphi(t_s + \Delta_s) = \varphi(t_s) + \varphi'(t_s)\Delta_s + o(t_s, \Delta_s)$ и $\varphi(t) = \varphi(t_S) = \varphi(t_0) + $ $+\sum_{s=0}^{S-1}\varphi'(t_s)\Delta_s + \sum_{s=0}^{S-1} o(t_s, \Delta_s).$

В силу (9) всегда можно выбрать такое разбиение интервала $[0, t]$, что для каждого подинтервала $[t_s, t_{s+1}]$, будет выполняться $|o(t_s, \Delta_s)| \le \sigma \cdot \Delta_s$, $s = 0, \ldots, S-1$. Откуда, учитывая (7), получаем $\varphi(t) \le \varphi(t_0) - \varepsilon \sum_{s=0}^{S-1} \Delta_s +$ $+ \sigma \sum_{s=0}^{S-1} \Delta_s = \varphi(t_0) - \varepsilon \cdot t + \sigma \cdot t,$ что эквивалентно (8)

Покажем, что $\Phi'(\tilde{x}, \tilde{p}) \le -\varepsilon$. Предположим противное, т. е. $\Phi'(\tilde{x}, \tilde{p}) > -\varepsilon$. Выберем число $\gamma > 0$ так, что $\Phi'(\tilde{x}, \tilde{p}) = -\varepsilon + \gamma$. В силу дифференцируемости по направлению для $t \ge 0$ имеет место разложение $\Phi(\tilde{x} + t\tilde{p}) =$ $= \Phi(\tilde{x}) + \Phi'(\tilde{x}, \tilde{p}) \cdot t + o(t) = \Phi(\tilde{x}) - \varepsilon \cdot t + \gamma \cdot t + o(t)$. Очевидно, что всегда можно выбрать $\tau \in [0, \delta]$ так, что $\gamma \cdot \tau + o(\tau) > 0$. Обозначим $\rho = \gamma \cdot \tau + o(\tau)$. Тогда

$$\Phi(\tilde{x} + \tau \cdot \tilde{p}) = \Phi(\tilde{x}) - \varepsilon \cdot \tau + \rho, \ \rho > 0. \tag{10}$$

В силу непрерывности Φ существует K, такое, что $|\Phi(\tilde{x} + \tau \cdot \tilde{p}) -$ $- \Phi(x^k + \tau \cdot p^k)| \le \frac{\rho}{4}, \ \forall k > K,$ т. е. $\Phi(\tilde{x} + \tau \cdot \tilde{p}) \le \Phi(x^k + \tau \cdot p^k) + \frac{\rho}{4}$. Выберем σ так, что $\sigma \cdot \tau = \frac{\rho}{4}$. Тогда, учитывая (8), получаем $\Phi(\tilde{x} + \tau \cdot \tilde{p}) \le$ $\le \Phi(x^k) - \varepsilon \cdot \tau + \frac{\rho}{2}, \ \forall k > K$. Также, очевидно, существует $K_1 > K$, такое, что $|\Phi(\tilde{x}) - \Phi(x^k)| \le \frac{\rho}{4}, \ \forall k > K_1,$ т. е. $\Phi(x^k) \le \Phi(\tilde{x}) + \frac{\rho}{4}$. Откуда $\Phi(\tilde{x} + \tau \cdot \tilde{p}) \le$ $\le \Phi(\tilde{x}) - \varepsilon \cdot \tau + \frac{3\rho}{4},$ что противоречит (10). Таким образом, предположение $\Phi'(\tilde{x}, \tilde{p}) > -\varepsilon$ неверно. Лемма доказана.

Пусть вектор $p(x, y)$ определяется в соответствии с (5). Положим $T_\delta(x, y) = [x, \ x + \delta p(x, y)] \cap [x, \ y]$, где $\delta > 0$. Множество $T_\delta(x, y)$ – δ-окрестность точки x на отрезке $[x, \ y]$. Очевидно, что $T_\delta(x, y) = [x, \ y]$, если $\delta = +\infty$.

Теорема 1. Пусть $\Phi: R^n \to R$ – непрерывная, дифференцируемая по направлениям функция (существуют односторонние производные), $\tilde{x}$ – локальный минимум функции Φ на R^n, Ω^B – ограниченное замкнутое множество, $\Omega^B \subset R^n$, $\operatorname{int}\Omega^B \neq \varnothing$, $y^0 \in \operatorname{int}\Omega^B$, $x^k \in R^n$, $k = 1, 2, \ldots,$ – последовательность, сходящаяся к $\tilde{x}$, для некоторых чисел $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\Phi'(x, p(x^k, y^0)) \le -\varepsilon, \quad \forall x \in T_\delta(x^k, y^0) \setminus \Omega^B. \tag{11}$$

Тогда для предельной точки $\tilde{x}$ имеет место $\tilde{x} \in \Omega^B$.

Доказательство. Предположим $\tilde{x} \notin \Omega^B$. Без ограничения общности можно считать, что $x^k \notin \Omega^B$, $k, k = 0, 1, \ldots$. Обозначим $p^k = p(x^k, y^0)$, $\tilde{p} = p(\tilde{x}, y^0)$ (заметим, что $\tilde{p} = \lim\limits_{k\to\infty} p^k$)

$$\tilde{t} = \min\left\{t : t > 0,\ \tilde{x} + t\tilde{p} \in \Omega^B\right\}. \tag{12}$$

Точка $\tilde{x} + \tilde{t} \cdot \tilde{p}$ лежит на границе множества Ω^B. Положим $\tilde{\delta} = \min(\delta, \tilde{t})$.

Покажем, что существует номер K такой, что $x^k + tp^k \notin \Omega^B$, при $t \in \left[0, \frac{\tilde{\delta}}{2}\right]$, $k > K$. Предположим противное, т. е. для любого i найдется $k_i > i$, для которого существует точка $t_{k_i} \in \left[0, \frac{\tilde{\delta}}{2}\right]$ такая, что $x^{k_i} + t_{k_i} p^{k_i} \in \Omega^B$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность t_{k_i}, $i = 1, \ldots,$ сходится. Обозначим $\bar{t} = \lim\limits_{i\to\infty} t_{k_i}$. Имеем $\bar{t} \le \frac{\tilde{\delta}}{2} < \tilde{t}$, $\lim\limits_{i\to\infty} p^{k_i} = \tilde{p}$, $x^{k_i} + t_{k_i} p^{k_i} \to \tilde{x} + \bar{t} \cdot \tilde{p}$, $i \to \infty$. Откуда, в силу замкнутости множества Ω^B, имеем $\tilde{x} + \bar{t} \cdot \tilde{p} \in \Omega^B$, что противоречит (12).

Таким образом, имеет место $\Phi'(x^k + tp^k, p^k) \le -\varepsilon$, $t \in \left[0, \frac{\tilde{\delta}}{2}\right]$, $k > K$. Отсюда, в силу леммы 1, следует $\Phi'(\tilde{x}, \tilde{p}) \le -\varepsilon$, что противоречит утверждению о том, что $\tilde{x}$ локальный минимум функции Φ. То есть предположение $\tilde{x} \notin \Omega^B$ неверно. Теорема доказана.

В настоящее время для построения устойчивых алгоритмов, обеспечения глобальной сходимости широко применяется понятие доверительной области (trust region, см., например [6 – 8]). Будем использовать аналогичный подход для обеспечения сходимости к допустимой точке исходной задачи.

Предполагается заданной точка $y^0 \in \Omega$. Обозначим $B_\rho(y^0) = \left\{x : \left\|x - y^0\right\| \le \rho,\ x \in R^n\right\}$. Очевидно, что если выполняются условия (4), то существует $\rho > 0$ такое, что

$$h^{\downarrow}(x) \le -a, \quad \forall x \in B_\rho(y^0) \setminus \Omega. \tag{13}$$

Положим $\eta_\rho(x) = \max\left\{0, \left\|x - y^0\right\| - \rho\right\}$. Рассмотрим штрафную функцию

$$\Phi_{\lambda\beta\rho}(x) = f(x) + \lambda \cdot h(x) + \beta \cdot \eta_\rho(x) \tag{14}$$

и задачи: найти

$$\Phi^*_{\lambda\beta\rho} = \min\left\{\Phi_{\lambda\beta\rho}(x) : x \in R^n\right\}, \tag{15}$$

$$f^*_\rho = \min\left\{f(x) : x \in B_\rho(y^0) \bigcap \Omega\right\}. \tag{16}$$

Утверждение 1. Пусть для множества $B_\rho(y^0)$ выполняется условие (13), f, h – липшицевы функции на R^n. Тогда существуют число $\lambda^* > 0$ и функция $\beta(\lambda)$, $\beta(\lambda) > 0$, такие, что при $\lambda \ge \lambda^*$ и $\beta \ge \beta(\lambda)$ все точки локального минимума функции $\Phi_{\lambda\beta\rho}(x)$ в пространстве R^n являются точками локального минимума функции f на $\Omega \bigcap B_\rho(y^0)$. То есть задачи (15) и (16) эквивалентны.

В самом деле, $\Phi_{\lambda\beta\rho}(x) = f(x) + \lambda \cdot h(x)$ для $x \in B_\rho(y^0)$. В силу условия (13) существует $\lambda^* > 0$ такое, что при $\lambda \ge \lambda^*$ все точки локального минимума функции $\Phi_{\lambda\beta\rho}(x)$ на множестве $B_\rho(y^0)$ являются точками локального минимума функции f на $\Omega \bigcap B_\rho(y^0)$. Функция $f(x) + \lambda \cdot h(x)$ – липшицева на R^n, а для $\eta_\rho(x)$ выполняется $\eta^{\downarrow}_\rho(x) = -1$, $\forall x \notin B_\rho(y^0)$, откуда следует существование числа $\beta(\lambda) > 0$ такого, что все точки локального минимума функции $\Phi_{\lambda\beta\rho}(x)$ в пространстве R^n являются точками локального минимума функции $f(x) + \lambda \cdot h(x)$ на множестве $B_\rho(y^0)$, и, как было показано, точками локального минимума функции f на $\Omega \bigcap B_\rho(y^0)$.

Теорема 2. Пусть заданы числа $\rho > 0, \sigma > 0$, функции f, h липшицевы на R^n и выполняются условия

$$h'(x, p(x, y^0)) \le -\sigma, \ \forall x \in B_\rho(y^0) \setminus \Omega. \tag{17}$$

Тогда для любых $\delta > 0,\ \ \varepsilon > 0$ существуют числа $\lambda(\varepsilon) > 0$ и функция $\beta(\lambda) > 0,$ такие, что при $\lambda > \lambda(\varepsilon)$ и $\beta > \beta(\lambda)$ для любой последовательности точек $x^k,\ \ k,\ k = 0,1,...,$ сходящейся к локальному минимуму $\tilde{x}$ задачи (15), выполняются условия теоремы 1, где $\Phi(x) = \Phi_{\lambda\beta\rho}(x),\quad \Omega^B = B_\rho(y^0) \bigcap \Omega.$ То есть $\tilde{x}$ – решение задачи (16).

Доказательство. Обозначим L_f константу Липшица для функции f. Очевидно, что $f^{'}(x,p) \le L_f$. Положим $\lambda(\varepsilon) = \dfrac{L_f + \varepsilon}{\sigma}$, тогда для любой точки $x \in B_\rho(y^0) \setminus \Omega$ при $\lambda > \lambda(\varepsilon)$ выполняется $\Phi^{'}_{\lambda\beta\rho}(x,p) \le -\varepsilon.$

Пусть $x \notin B_\rho(y^0).$ Очевидно $\eta^{'}_\rho(x,p) = -1.$ Обозначим L_h константу Липшица для функции $h,\ \ h^{'}(x,p) \le L_h.$ Пусть λ удовлетворяет условию $\lambda > \lambda(\varepsilon).$ Положим $\beta(\lambda) = L_f + \lambda L_h + \varepsilon.$ Тогда для любой точки $x \notin B_\rho(y^0)$ при $\beta > \beta(\lambda)$ имеет место $\Phi^{'}_{\lambda\beta\rho}(x,p) \le -\varepsilon.$ Таким образом, условия (11) выполняются для любой точки $x \notin \Omega_B = \Omega \bigcap B_\rho(y^0).$ Теорема доказана.

Пусть для решения задачи (15) используется некоторый алгоритм A безусловной минимизации, обеспечивающий сходимость к локальному минимуму функции $\Phi_{\lambda\beta\rho}(x).$ Теоремы 1, 2 для решения задачи (15) позволяют сформировать модификацию алгоритма A (алгоритм A_B), которая для заданных $\delta > 0,$ $\varepsilon > 0,\ \ \sigma > 0$ и базовой точки $y^0 \in \operatorname{int}\Omega$ определяет радиус ρ шара $B_\rho(y^0),$ удовлетворяющий условиям теорем и находит точку локального минимума функции f на $\Omega \bigcap B_\rho(y^0).$

В алгоритме A_B на каждой итерации k алгоритма A выполняются следующие дополнительные операции:

1) для текущей точки x_k проверяется условие

$$h^{'}(x, p(x^k, y^0)) \le -\sigma,\ \ \forall x \in T_\delta(x^k, y^0) \bigcap \left\{ B_\rho(y^0) \setminus \Omega \right\}, \tag{18}$$

если это условие не выполняются, радиус ρ уменьшается;

2) для текущей точки x_k проверяется условие (11) в два этапа:

этап 1 – для $\forall x \in T_\delta(x^k, y^0) \bigcap \left\{ B_\rho(y^0) \setminus \Omega \right\},$ если условие (11) не выполняется, увеличивается коэффициент $\beta,$

этап 2 – для $\forall x \in T_\delta(x^k, y^0) \setminus B_\rho(y^0),$ если условие (11) не выполняется, увеличивается коэффициент $\lambda.$

Под увеличением (уменьшением) параметра понимается такое его изменение, после которого соответствующее условие выполняется. При этом изменение должно быть не меньше некоторой фиксированной величины. В силу конечности чисел $\lambda(\varepsilon)$, $\beta(\lambda)$ число изменений параметров λ, β, ρ будет конечно, после чего алгоритм сходится к локальному минимуму $\tilde{x}$ функции $\Phi_{\lambda\beta\rho}(x)$ в пространстве R^n и $\tilde{x} \in \Omega \bigcap B_\rho(y^0)$.

В приведенной схеме алгоритма A_B необходимо конкретизировать процедуры проверки условий (11), (18). Нетрудно видеть, что каждое множество, на котором эти условия проверяются, имеет вид $X = \left\{x : x = x^k + \right.$ $\left. + tp(x^k, y^0), 0 \le t \le \overline{t}\right\}$ либо $X = \left\{x : x = x^k + tp(x^k, y^0), 0 \le t < \overline{t}\right\}$. Во втором случае предельная точка $x = x^k + \overline{t} \cdot p(x^k, y^0)$ не принадлежит множеству X. Проверка заключается в анализе поведения функции $\varphi(t) = \Phi_{\lambda\beta\rho}(x^k +$ $+ t \cdot p(x^k, y^0))$ или $\eta(t) = h(x^k + t \cdot p(x^k, y^0))$ в интервале $0 \le t < \overline{t}$. Обозначим $\varphi_+^{'}(t)$ производную функции $\varphi(t)$ в точке t в направлении увеличения переменной t, $\varphi_-^{'}(t)$ – производная в направлении уменьшения переменной t. Аналогично определим производные $\eta_+^{'}(t)$, $\eta_-^{'}(t)$.

Рассмотрим случай, когда функции f, h_i, $i = 1,..., m$, выпуклые. Тогда $\varphi(t)$ и $\eta(t)$ тоже выпуклые функции. Нетрудно видеть, что в силу выпуклости имеем $\varphi_+^{'}(t_1) \le \varphi_+^{'}(t_2) \le -\varphi_-^{'}(\overline{t})$ для любых $t_1, t_2 \in \left[0, \overline{t}\right]$, $t_1 < t_2$. Откуда следует, что проверку условий (11), (18) достаточно проводить только в точке $\overline{t}$.

Рассмотрим случай, когда функции f, h_i, $i = 1,..., m$, дифференцируемые, величина δ достаточно мала. Тогда в δ-окрестности точки x^k эти функции достаточно хорошо приближаются их линейной аппроксимацией в этой точке, а функции $\varphi(t)$ и $\eta(t)$ для линейных аппроксимаций будут выпуклыми. Таким образом, проверку условий (11), (18) также достаточно проводить только в точке $\overline{t}$ (для $\overline{t}$ всегда выполняется $\overline{t} \le \delta$). При больших δ проверку достаточно проводить в отдельных точках интервала $\left[0, \overline{t}\right]$ с некоторым небольшим шагом.

В приведенном алгоритме A_B выбор параметра $\delta > 0$ достаточно произволен. При больших значениях этого параметра в выпуклом случае достаточно проверять условие (11) в единственной точке, являющейся пересечением отрезка $\left[x^k, y^0\right]$ с границей множества Ω [10]. При выборе $\delta = 0$ предельная точка $\tilde{x}$ может не принадлежать допустимому множеству исходной задачи. В общем случае проверка условий (11), (18) является достаточно сложной проблемой. Эффективные процедуры такой проверки могут быть сформулированы для специальных случаев.

Выбор больших значений параметра $\sigma > 0$ приводит к уменьшению радиуса шара ρ. При малых значениях параметра σ по ходу работы оптимизационного алгоритма могут получаться большие значения штрафных коэффициентов.

Общая схема решения задачи. Штрафная функция (14) – негладкая. Поэтому в общем случае для непосредственного решения задачи (15) должны использоваться методы негладкой оптимизации, например, r-алгоритм [1]. Если функции $f, h_i,\ i = 1,\dots, m$ дифференцируемы, естественным является применение методов гладкой оптимизации, в частности, методов линеаризации [3,4], методов последовательного квадратичного программирования [см., например, 6 – 8].

Предлагаемая схема решения задачи (1) в целом заключается в последовательности этапов $s = 0,1,\dots,$ на каждом из которых приближенно решается вспомогательная задача вида (15) с использованием алгоритма A_B для заданной допустимой точки y_s (полагается $y^0 = y_s$) и формируется допустимая точка y_{s+1} для следующего этапа.

В случае, когда функции $f, h_i,\ i = 1,\dots, m$ дифференцируемы, для формирования точки y_{s+1} могут использоваться различные процедуры. Приведем одну из них. Пусть $\tilde{x} \in \Omega$ – приближенное решение задачи (15), полученное на этапе s, задано число $\gamma > 0$, $I_\gamma(\tilde{x}) = \{i : h_i(\tilde{x}) \ge -\gamma\}$ – множество γ-активных ограничений. Положим $x = \tilde{x} + v$, представим линеаризованные γ-активные ограничения в виде системы линейных ограничений $Av \le b$, и рассмотрим задачу поиска точки наиболее удаленной от всех граней многогранника $\{v : Av \le b,\ cv \ge d\}$, где неравенство $cv \ge d$ соответствует линеаризованному неравенству $f(\tilde{x} + v) \ge f(\tilde{x})$. Эту задачу можно представить в виде

$$\max\ z \tag{19}$$

при ограничениях

$$Av + e \cdot z \le b, \tag{20}$$

$$cv - z \ge d, \tag{21}$$

$$\|v\| \le 1, \tag{22}$$

где $e=(1,...,1)^T$, $z\in R$. Здесь ограничения (22) добавлены в задачу, поскольку многогранник $\left\{v: Av\le b,\ cv\ge d\right\}$ может быть неограниченным.

Пусть v^*, z^* – оптимальное решение задачи (19) – (22). Рассмотрим $R=\left\{x: x=\tilde{x}+tv^*,\ t>0\right\}$ – луч, выходящий из точки $\tilde{x}$. Обозначим $\overline{t}$ минимальное значение параметра t, при котором луч R пересекает границу множества Ω. Для формирования точки y_{s+1} полагаем $y_{s+1}=\tilde{x}+\frac{\overline{t}}{2}v^*$.

Предлагаемая схема может интерпретироваться как одновременное использование методов внешних штрафов и внутренних точек.

Заключение. В работе предложен подход, позволяющий для методов оптимизации, основанных на использовании точных штрафных функций, преодолеть проблему сходимости к стационарным точкам, не принадлежащим допустимой области исходной невыпуклой задачи. Также сравнительно просто решаются вопросы выбора значений штрафных коэффициентов. Рассмотренный подход применим, если известна начальная допустимая точка исходной задачи. В предлагаемой схеме используется специальная доверительная область, радиус которой определяется автоматически по ходу работы оптимизационного алгоритма. Решение исходной задачи сводится к последовательному решению совокупности регуляризованных подзадач. Полученные результаты будут полезны при разработке эффективных методов решения задач оптимизации с ограничениями.

Ю.П. Лаптін

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕОПУКЛИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ
З ВИКОРИСТАННЯМ ТОЧНИХ ШТРАФНИХ ФУНКЦІЙ

Для неопуклих задач оптимізації відомі методі, які використовують точні штрафні функції, не завжди гарантують збіжність до допустимої точки. В роботі запропоновано підхід, який дозволяє за певних умов подолати такі проблеми. Також порівняно просто вирішуються питання вибору значень штрафних коефіцієнтів.

Yu.P. Laptin

SOLUTION TO NONCONVEX OPTIMIZATION PROBLEMS USING EXACT PENALTY FUNCTIONS

Optimization methods using exact penalty functions are considered. The problem of convergence to the feasible stationary points has been overcome. Also, a choice of penalty coefficient values is made relatively easy.

1. *Shor N.Z.* Nondifferentiable Optimization and Polynomial Problems. – Amsterdam / Dordrecht / London: Kluwer Academic Publishers, 1998. – 381 p.
2. *Демьянов В.Ф.* Условия экстремума и вариационное исчисление. – М.: Высш. шк., 2005. – 335 с.
3. *Пшеничный Б.Н.* Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136 с.
4. *Данилин Ю.М.* Линеаризация и штрафные функции // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – № 5. – С. 65–79.
5. *Евтушенко Ю.Г., Жадан В.Г.* Точные вспомогательные функции в задачах оптимизации // ЖВМ и МФ. – 1990. – Т. 30, № 1. – С. 43–57.
6. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и множители Лагранжа. – М.: Радио и связь, 1987. – 399 с.
7. *Byrd R.H., Nocedal J., Waltz R.* Steering exact penalty methods // Optim. Methods Softw. – 2008. – 23(2). – P. 197 – 213.
8. *Byrd R.H., Lopez-Calva G., Nocedal J.* A line search exact penalty method using steering rules // Math. Program., Series A and B, 2012. – W. 133. – P. 39 – 73.
9. *Лаптин Ю.П., Бардадым Т.А.* Некоторые подходы к регуляризации нелинейных задач оптимизации // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 3. – С. 57 – 68.
10. *Лаптин Ю.П.* Вопросы построения точных штрафных функций // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, 2013. – Вып. 4. – С. 21 – 31.

Получено 05.03.2014

Об авторе:

Лаптин Юрий Петрович,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: laptin_yu_p@mail.ru