КОМПЬЮТЕРНАЯ
МАТЕМАТИКА

Математическое моделирование

В работе выполнено математическое моделирование неравновесной во времени консолидационной динамики двухслойного геопористого массива, расположенного на непроницаемом основании. В рамках дробно-дифференциального подхода поставлена соответствующая краевая задача с условиями сопряжения на линии раздела сред и получено ее аналитическое решение.

УДК 517.934:532.546

Т.Ю. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ,
В.М. БУЛАВАЦКИЙ

ЗАДАЧА МОДЕЛИРОВАНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КОНСОЛИДАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ ДВУХСЛОЙНОЙ ГЕОПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Введение. Вопросы математического моделирования процессов фильтрационной консолидации в деформируемых водонасыщенных пористых геосредах актуальны. Учитывая многообразные применения в различных областях научно-технического прогресса (на-пример, при определении деформаций ядер и экранов гидросооружений, определении устойчивости откосов земляных плотин, дорожном, промышленном и гражданском строительстве и др. [1, 2]). Учитывая проблемы охраны окружающей среды важное значение приобретают также исследования процессов уплотнения оснований поверхностных накопителей промышленных и бытовых стоков. Это способствовало разработке эффективных методов математического моделирования динамики консолидационных процессов с учетом различных факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на процесс [3, 5]. При этом в случае моделирования процессов геомиграции в системах со сложной пространственно-времен-ной структурой, (для которых характерны эффекты памяти, пространственной нелокальности и самоорганизации) возникает проблема повышения степени адекватности классических количественных математических моделей для описания динамики указанных процессов. Сложностью данной проблемы обусловлен пересмотр основных по-ложений классической теории переноса в насыщенных геопористых средах, в частности прогресс в этом направлении достигнут и использованием формализма интегро-дифференцирования дробного порядка [6].

Отметим, что различным аспектам разработки методов математического моделирования динамики неравновесных фильтрационно-консолидационных процессов в деформируемых однородных геопористых средах посвящены, в частности, работы [1, 3 – 5, 7, 8]. Так в работе [1] построено и изучено ряд неклассических математических моделей релаксационных процессов фильтрации в деформируемых геопористых средах, диффузии, а также теплопроводности с учетом релаксации температуры и теплового потока. В работе [3] развит системный подход к проблеме математического моделирования процессов фильтрационной консолидации грунтовых оснований гидросооружений, а в работе [7] построена и исследована дробно-дифференциальная математическая модель геофильтрации солевых растворов с учетом осмотических явлений в условиях временной нелокальности процесса. В настоящей работе решается задача математического моделирования дробно-дифференциальной динамики локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса для двухслойного геопористого массива конечной мощности на непроницаемом основании, при действии на дренируемой поверхности массива распределенной нагрузки заданной величины.

1. Построение математической модели процесса и постановка краевой задачи. В случае локально-неравновесного во времени фильтрационно-консолидационного процесса в насыщенном геопористом массиве используем обобщение законафильтрации Дарси в виде [9]

$$u_x = -kD_t^{1-\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right), \tag{1}$$

где u_x – скорость геофильтрации, H – избыточный напор в поровой жидкости, k – коэффициент фильтрации, $D_t^{1-\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования Римана – Лиувилля порядка $1-\alpha\,(0<\alpha<1)$ по переменной t [6].

Из уравнения неразрывности фильтрационного потока [2], получаем для определения избыточного напора H следующее уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v D_t^{1-\alpha}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right), \tag{2}$$

или

$$D_t^{(\alpha)} H = C_v \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}, \tag{3}$$

где C_v – коэффициент консолидации [2], $D_t^{(\alpha)}$ – оператор регуляризованной дробной производной порядка α [6].

В рамках математической модели неравновесной фильтрационной консолидации деформируемых геопористых массивов, базирующейся на уравнении вида (3), рассмотрим задачу моделирования динамики полей избыточных напоров при консолидации (в условиях временной неравновестности) двухслойного геопористого массива мощностью l, расположенного на непроницаемом основании, в случае приложения к поверхности массива нагрузки заданной интенсивности. В этом случае соответствующая краевая задача неравновесной консолидации может быть записана в следующем виде:

$$D_t^{(\alpha)} H_1 = C_v^{(1)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} \quad (0 < x < l_1,\, t > 0)\,, \tag{4}$$

$$D_t^{(\alpha)} H_2 = C_v^{(2)} \frac{\partial^2 H_2}{\partial x^2} \quad (l_1 < x < l,\, t > 0)\,, \tag{5}$$

$$H_1(0,t) = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial x}(l,t) = 0\,,\; H_1(l_1,t) = H_2(l_1,t), \tag{6}$$

$$k_1 D_t^{1-\alpha}\left(\frac{\partial H_1(l_1,t)}{\partial x}\right) = k_2 D_t^{1-\alpha}\left(\frac{\partial H_2(l_1,t)}{\partial x}\right), \tag{7}$$

$$H_1(x,0) = H_2(x,0) = \varsigma_0(x)\,, \tag{8}$$

где $C_v^{(i)} = \dfrac{k_i}{\gamma a_i}$ $(i = 1{,}2)$ – коэффициенты консолидации слоев, $a_i, k_i (i = 1{,}2)$ – соответственно коэффициенты сжимаемости и фильтрации слоев, H_1, H_2 – избыточные напоры в первом и втором слое, $x = l_1$ – общая граница слоев, $\varsigma_0(x)$ – заданная функция начального распределения напоров в массиве.

2. Решение краевой задачи (4) – (8). Разыскивая решение задачи в виде

$$H_1(x,t) = \overline{X}(x)\overline{T}(t)\; (0 \le x \le l_1), \quad H_2(x,t) = \overline{\overline{X}}(x)\overline{\overline{T}}(t)\; (l_1 \le x \le l)$$

имеем

$$\overline{X}''(x) + \overline{\lambda}^2 \overline{X}(x) = 0,\; \overline{X}(0) = 0\,, \tag{9}$$

$$\overline{\overline{X}}''(x) + \overline{\overline{\lambda}}^2 \overline{\overline{X}}(x) = 0,\; \overline{\overline{X}}'(l) = 0\,, \tag{10}$$

$$D_t^{(\alpha)} \overline{T}(t) + \overline{\lambda}^2 C_v^{(1)} \overline{T}(t) = 0\,, \tag{11}$$

$$D_t^{(\alpha)} \overline{\overline{T}}(t) + \overline{\overline{\lambda}}^2 C_v^{(2)} \overline{\overline{T}}(t) = 0\,, \tag{12}$$

Из уравнений (9) – (12) находим

$$H_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\overline{\lambda}_n x) E_\alpha(-\overline{\lambda}_n^2 C_v^{(1)} t^\alpha)\,, \tag{13}$$

$$H_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\cos(\overline{\overline{\lambda}}_n l)} \cos[\overline{\overline{\lambda}}_n (l - x)] E_\alpha(-\overline{\overline{\lambda}}_n^2 C_v^{(2)} t^\alpha)\,, \tag{14}$$

где $A_n, B_n, \overline{\lambda}_n, \overline{\overline{\lambda}}_n$ $(n = 1,2,...)$ – подлежащие определению постоянные, $E_\alpha(z)$ – функция Миттаг – Леффлера [6, 10].

Из условий сопряжения (7) получаем систему уравнений для определения неизвестных A_n, B_n $(n = 1, 2, ...)$:

$$A_n \sin(\mu\lambda_n l_1)\cos(\lambda_n l) = B_n \cos[\lambda_n (l - l_1)], \tag{15}$$

$$A_n \cos(\lambda_n l)\cos(\mu\lambda_n l_1) = b\mu B_n \sin[\lambda_n (l - l_1)], \tag{16}$$

где

$$\lambda_n = \overline{\overline{\lambda}}_n \ (\ \overline{\lambda}_n = \mu\lambda_n),\ b = a_2 / a_1,\ \mu^2 = C_\nu^{(2)} / C_\nu^{(1)}. \tag{17}$$

Условие наличия нетривиальных решений системы уравнений (15), (16) дает уравнение для определения собственных значений λ_n $(n = 1,2,...)$ в виде

$$\operatorname{tg}(\mu l_1\lambda_n)\operatorname{tg}[\lambda_n (l - l_1)] = \frac{1}{\mu b}. \tag{18}$$

С учетом изложенного, решение рассматриваемой задачи принимает вид

$$H_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\mu\lambda_n x) E_\alpha(-\mu^2\lambda_n^2 C_\nu^{(1)} t^\alpha)\ (0 \le x \le l_1), \tag{19}$$

$$H_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n \cos[\lambda_n (l - x)] E_\alpha(-\lambda_n^2 C_\nu^{(2)} t^\alpha)\ (l_1 \le x \le l), \tag{20}$$

где

$$\gamma_n = \frac{\sin(\mu\lambda_n l_1)}{\cos[\lambda_n (l - l_1)]} \quad (n = 1,2,...). \tag{21}$$

Неизвестные коэффициенты A_n $(n = 1,2,...)$, входящие в соотношения (19, 20), отыскиваем из начального условия (8), которое с учетом (19, 20) принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varsigma_0(x) \quad (0 \le x \le l), \tag{22}$$

где

$$X_n(x) = \begin{cases} \sin[\mu\lambda_n x], & (0 \le x \le l_1) \\ \gamma_n \cos[\lambda_n (l - x)], & (l_1 \le x \le l). \end{cases} \tag{23}$$

Отсюда, принимая во внимание свойство ортогональности собственных функций задачи, в результате ряда простых, но громоздких преобразований, получаем:

$$A_n = \frac{1}{\delta_n}\left[\int_0^{l_1} \varsigma_0(x)\sin(\mu\lambda_n x)dx + b\gamma_n \int_{l_1}^{l} \varsigma_0(x)\cos[\mu\lambda_n(l-x)]dx\right], \qquad (24)$$

где

$$\delta_n = \frac{1}{2}\left\{l_1 - \frac{\sin(2\mu\lambda_n l_1)}{2\mu\lambda_n} + b\gamma_n^2\left[l - l_1 + \frac{\sin(2\lambda_n l_1)}{2\lambda_n}\right]\right\}\ (n = 1,2,...) \qquad (25)$$

и $\lambda_n\ (n = 1,2,...)$ – корни уравнения (18).

Соотношения (19), (20), (24), (25) при $\alpha = 1$ дают, в частности, решение [11] рассматриваемой задачи поставленной в рамках классической математической модели:

$$H_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \, e^{-\mu^2\lambda_n^2 C_v^{(1)} t} \sin(\mu\lambda_n x) \quad (0 \le x \le l_1),$$

$$H_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_n \, e^{-\lambda_n^2 C_v^{(2)} t} \cos[\lambda_n(l-x)] \quad (l_1 \le x \le l).$$

Следует отметить, что аналогично вышеизложенному можно получить решение соответствующей краевой задачи и в случае консолидации двухслойного геомассива, расположенного на проницаемом основании.

Заключение. Приведенные выше результаты открывают возможность теоретического исследования закономерностей динамики аномальных консолидационных процессов в двухслойных геопористых средах, в частности фрактальной структуры.

Т.Ю. Благовещенська, В.М. Булавацький

ЗАДАЧА МОДЕЛЮВАННЯ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ДВОШАРОВОГО ГЕОПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА

В роботі виконане математичне моделювання нерівноважної у часі консолідаційної динаміки двошарового геопористого масиву, розміщеного на непроникній основі. В рамках дробово-диференційного підходу поставлена відповідна крайова задача з умовами спряження на лінії розділу середовищ та отримано її аналітичний розв’язок.

T.Yu. Blagoveshchenskaya, V.M. Bulavatsky

THE PROBLEM OF MODELING FRACTIONAL-DIFFERENTIAL CONSOLIDATION DYNAMICS OF GEO-POROUS TWO-LAYER MEDIUM

This paper presents the mathematical modelling of nonequilibrium in time consolidation dynamics of geo-porous two-layer solid located on an impermeable base. The corresponding boundary-value problem with conjugation conditions on the boundary separating the media is posed within the framework of fractional-differential approach, and its analytical solution is obtained.

1. *Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В.* Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. – К.: Наук. думка, 2005. – 283 с.
2. *Иванов П.Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высш. школа, 1991. – 447 с.
3. *Булавацкий В.М., Скопецкий В.В.* Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – № 6. – С. 71 – 79.
4. *Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – К.: Наук. думка, 2007. – 292 с.
5. *Власюк А.П., Мартинюк П.М.* Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 211 с.
6. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and application of fractional differential equation. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
7. *Булавацкий В.М.* Математическая модель геоинформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 6. – С. 76 – 83.
8. *Kaczmarek M., Huekel T.* Chemo-mechanical consolidation of clays: analytical solution for a linearized one-dimensional problem // Transport in porous media. – 1998. – 32. – P. 49 – 74.
9. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. – Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. – 512 с.
10. *Podlubny I.* Fractional differential equation. – New York: academ. Press, 1999. – 341 p.
11. *Kong-He Xie, Xin Yu Xie, Xiang Gao* Theory of one dimentional consolidation of two-layered soil with partially drained boundaries // Computers and geotechnics. – 1999. – 24. – P. 265 – 278.

Получено 26.02.2014

Об авторах:

Благовещенская Татьяна Юрьевна,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины,
E-mail: dept175@gmail.com

Булавацкий Владимир Михайлович,
доктор технических наук, профессор, ведущий сотрудник
Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины.
E-mail: v_bulav@ukr.net