

## ПЕРЕХІДНІ ПОЛЯ ПОТЕНЦІАЛІВ ТЕПЛОМОЛОГОПЕРЕНОСУ В НЕСКІНЧЕННІЙ ПЛАСТИНІ В ПРОЦЕСІ КОНВЕКТИВНОГО СУШІННЯ

*У роботі отримано аналітичний розв'язок задачі термовологопровідності для нескінченної пластини щодо конвективного сушіння. Наведені чисельні результати є корисними для вивчення процесу конвективного сушіння під час виготовлення різних типів поліграфічних виробів. Запропонований підхід може бути використаний для вивчення інших способів сушіння поліграфічної продукції.*

*The analytical solution of the problem of thermal and moisture conduction for an infinite plate for convective drying is obtained in this paper. Numerical results are useful for studying the process of convective drying in the production of various types of printing products. This approach can be used to explore other methods of drying of printing products.*

### 1. ВСТУП

Конвективне сушіння відбувається при омиванні тіла нагрітим повітрям, газом, паром та іншими теплоносіями, які мають температуру відмінну від температури тіла. Винесення парів вологи здійснюється сушильним агентом. Конвективний спосіб сушіння широко використовується у поліграфічному виробництві [1–9]. Наприклад, при виробництві: паперу, картону [4], палітурних кришок [3, 6, 7], обкладинок [7], лакованих чи ламінованих друкованих відбитків [5, 7, 8], сучасних пакувальних матеріалів [5, 9], друкарських форм [7] та ін. Інтенсивність конвективного сушіння, залежно від застосовуваних режимів, може змінюватися в широких межах, але у порівнянні з іншими способами сушіння залишається завжди невисокою, оскільки коефіцієнт конвективного теплообміну малий, а температуру повітря не можна збільшувати безмежно. Конвективне сушіння забезпечує "м'який режим" (малі значення температури та градієнтів температури і вологовмісту виключають руйнування структури матеріалу) [1]. Цей спосіб застосовується при сушінні капілярно-пористих колоїдних тіл (дерево, картон, папір, целюлоза), при сушінні колоїдних тіл (лаків, клеїв), коли інші способи сушіння можуть привести до псування матеріалу. Застосовується він у випадках, коли тривалість процесу не має суттєвого значення, а також у поєднанні з іншими способами сушіння (комбі-

---

<sup>25</sup> Українська академія друкарства

новані способи), коли необхідно отримати менш жорсткий режим технологічного процесу [1].

## 2. ПОСТАНОВКА І РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Фізична постановка задачі: розглядається волога необмежена пластина товщиною  $2h$ , верхня і нижня поверхні якої взаємодіють із оточуючим середовищем згідно із законом Ньютона (конвективний термовологообмін) (див. рис. 1). Нагрів (висушування) пластини здійснюється за допомогою температури оточуючого середовища  $T_c$ . Потрібно знайти розподіл температури і вологовмісту в довільній точці пластини залежно від часу.

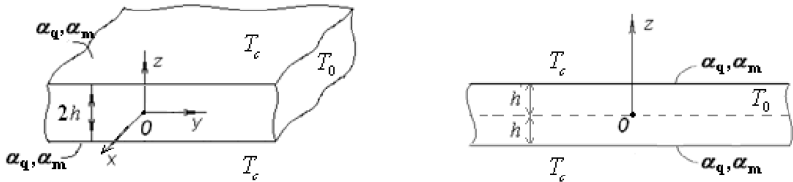


Рис. 1. Схема перерізу пластини, що конвективно підігривається теплим повітрям: а) тривимірна; б) двовимірна

Процес сушіння характеризується зміною в часі трьох основних функцій матеріалу: температури, вологовмісту та швидкості сушіння [2]. Для розрахунку полів температури і вологовмісту у процесі сушіння А. В. Ликов вивів систему диференціальних рівнянь для необмеженої пластини, яка після обезрозмірення має вигляд [10]:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - \varepsilon K_o \frac{\partial \Theta}{\partial Fo}, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = Lu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Z^2} - Lu Pn \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Математична постановка задачі, здійснена згідно з теорією нестационарної термовологопровідності А. В. Ликова, розглядається у вигляді початково-крайової задачі (1)–(4) для безрозмірних температури  $T(Z, Fo)$  і потенціалу вологопереносу  $\Theta(Z, Fo)$  [10]:

$$T(Z, 0) = 0, \quad \Theta(Z, 0) = 0, \quad Fo = 0; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(1, Fo)}{\partial Z} - Bi_q [1 - T(1, Fo)] + (1 - \varepsilon) K_o Lu Bi_m [1 - \Theta(1, Fo)] &= 0, \\ -\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Z} + Pn \frac{\partial T(1, Fo)}{\partial Z} + Bi_m [1 - \Theta(1, Fo)] &= 0, \quad Z = 1; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T(0, Fo)}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Z} = 0, \quad Z = 0; \quad (4)$$

$$\text{де } T = \frac{t - T_0}{T_c - T_0}, \quad \Theta = \frac{\theta_0 - \theta}{\theta_0 - \theta_p}, \quad Z = \frac{z}{h}, \quad Fo = \frac{a_q \tau}{h^2}, \quad Bi_q = \frac{\alpha_q h}{\lambda_q},$$

$$Bi_m = \frac{\alpha_m h}{\lambda_m}, \quad Lu = \frac{a_m}{a_q}; \quad \varepsilon, Ko, Pn - \text{критерії фазового перетворення, Косовича, Поснова відповідно; } a_q, a_m - \text{коєфіцієнти теплопроводності і дифузії вологи, } \alpha_q, \alpha_m - \text{коєфіцієнти теплообміну і вологообміну, } \lambda_q, \lambda_m - \text{коєфіцієнти теплопроводності і вологопроводності; } t, \theta - \text{розмірні температура та потенціал волого переносу, } \tau - \text{розмірний час, } T_0, T_c - \text{початкова температура пластини і температура оточуючого середовища, } \theta_0, \theta_p - \text{початкове і рівноважне значення потенціалу вологопереносу.}$$

Задача (1)–(4) безрозмірена з метою незалежності від термодинамічних характеристик (параметрів) матеріалу, з якого виготовлена пластинка, у подальших чисельних обрахунках. Крім того, розмірна задача залежить від одинадцяти термодинамічних параметрів:  $a_q, a_m, \alpha_q, \alpha_m, \lambda_q, \lambda_m, \dots$ , а безрозмірна від шести:  $\varepsilon, Lu, Ko, Pn, Bi_q, Bi_m$  [10]. Вивчення поведінки цих шести основних безрозмірних параметрів, а кожен з них має свою фізичну суть, дозволяє зрозуміти у якій мірі кожен з них впливає на процес, тобто дозволяє більш глибоко, через меншу кількість параметрів, розкрити фізичну суть розгляданого процесу сушіння [2].

Застосовуючи інтегральне перетворення Лапласа до системи рівнянь (1), після виключення  $\bar{\Theta}(Z, s)$ , отримуємо диференціальне рівняння для знаходження  $\bar{T}(Z, s)$  і вираз для знаходження  $\bar{\Theta}(Z, s)$ :

$$\frac{d^4 \bar{T}}{dZ^4} - s \left( 1 + Ko^* Pn + \frac{1}{Lu} \right) \frac{d^2 \bar{T}}{dZ^2} + \frac{s^2}{Lu} \bar{T} = 0,$$

$$\bar{\Theta}(Z, s) = \frac{1}{sKo^*} \frac{d^2 \bar{T}}{dZ^2} - \frac{1}{Ko^*} \bar{T},$$

розв'язки яких представляються у вигляді

$$\bar{T}(Z, s) = A_1 e^{\sqrt{sv_1} Z} + A_2 e^{\sqrt{sv_2} Z} + A_3 e^{-\sqrt{sv_1} Z} + A_4 e^{-\sqrt{sv_2} Z},$$

$$\bar{\Theta}(Z, s) = -\frac{1}{Ko^*} \left[ A_1(1-v_1^2)e^{\sqrt{sv_1}Z} + A_2(1-v_2^2)e^{\sqrt{sv_2}Z} + \right. \\ \left. A_3(1-v_1^2)e^{-\sqrt{sv_1}Z} + A_4(1-v_2^2)e^{-\sqrt{sv_2}Z} \right],$$

$$\text{де } v_i^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 + Ko^* Pn + \frac{1}{Lu} \right) + (-1)^i \sqrt{\left( 1 + Ko^* Pn + \frac{1}{Lu} \right)^2 - \frac{4}{Lu}} \right],$$

$A_i (i=1, 2, 3, 4)$  – довільні постійні, значення яких знаходимо з трансформованих умов симетрії (4), тобто  $\bar{T}'(0, s) = \bar{\Theta}'(0, s) = 0$ :

$$\begin{cases} (A_1 - A_3)\sqrt{sv_1} + (A_2 - A_4)\sqrt{sv_2} = 0 \\ (A_1 - A_3)\sqrt{sv_1}(1-v_1^2) + (A_2 - A_4)\sqrt{sv_2}(1-v_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow A_1 = A_3 = \frac{B_1}{2}, \quad A_2 = A_4 = \frac{B_2}{2} \quad \text{і тоді}$$

$$\bar{T}(Z, s) = B_1 ch\sqrt{sv_1}Z + B_2 ch\sqrt{sv_2}Z, \quad (5)$$

$$\bar{\Theta}(Z, s) = -\frac{1}{Ko^*} \left[ B_1(1-v_1^2)ch\sqrt{sv_1}Z + B_2(1-v_2^2)ch\sqrt{sv_2}Z \right]. \quad (6)$$

Після підстановки формул (5), (6) в граничні умови (3) маємо

$$\begin{cases} B_1 P_1 + B_2 P_2 = -\frac{1}{s} \varepsilon Ko Bi_m, \\ B_1 Q_1 + B_2 Q_2 = \frac{1}{s} [Bi_q - (1-\varepsilon)KoLuBi_m], \end{cases} \quad (7)$$

де  $P_i = (1-v_i^2 + \varepsilon Ko Pn)\sqrt{sv_i} sh\sqrt{sv_i} + (1-v_i^2)Bi_m ch\sqrt{sv_i}$ ,

$$Q_i = \sqrt{sv_i} sh\sqrt{sv_i} + \left[ Bi_q + \frac{(1-\varepsilon)LuBi_m(1-v_i^2)}{\varepsilon} \right] ch\sqrt{sv_i}, \quad (i=1, 2).$$

Після визначення постійних  $B_1, B_2$  із системи (7) згідно з формулами (5), (6) отримуємо трансформанти:

$$\bar{T}(Z, s) = \frac{1}{s\Delta} \left( -R_2 ch\sqrt{sv_1}Z + R_1 ch\sqrt{sv_2}Z \right) = \frac{\Phi_1(s)}{\Psi_1(s)}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}(Z, s) &= \frac{1}{s\Delta\varepsilon Ko} \left( R_2(1-v_1^2)ch\sqrt{sv_1}Z - R_1(1-v_2^2)ch\sqrt{sv_2}Z \right) = \\ &= \frac{\Phi_2(s)}{\Psi_2(s)}, \end{aligned} \quad (9)$$

де  $R_i = \varepsilon Ko Bi_m Q_i + (Bi_q - (1 - \varepsilon) Ko Lu Bi_m) P_i$ , ( $i = 1, 2$ ),  
 $\Delta = P_1 Q_2 - P_2 Q_1$ ;  $\Phi_1(s)$ ,  $\Phi_2(s)$ ,  $\Psi_1(s)$ ,  $\Psi_2(s)$  – відповідні чисельники  
і знаменники. Для знаходження оригіналів  $T(Z, Fo)$ ,  $\Theta(Z, Fo)$  вико-  
ристовуємо теорему розкладу Ващенко-Захарченка [10]

$$L^{-1} \left[ \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(s)}{\Psi'(s)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(s_n)}{\Psi'(s_n)} e^{s_n Fo}, \quad (10)$$

де  $s_n$  – корені знаменника  $\Psi_1(s)$  у виразі (8), тобто розв'язки рів-  
няння

$s(P_1 Q_2 - P_2 Q_1) = 0$ . У результаті розв'язок задачі (1)-(4), завдяки  
формулі (10), можна записати у вигляді рядів:

$$T(Z, Fo) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{ni} \cos(v_i \mu_n Z) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (11)$$

$$\Theta(Z, Fo) = 1 + \frac{1}{Ko^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{ni} (1 - v_i^2) \cos(v_i \mu_n Z) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (12)$$

$$\text{де } C_{n1} = 2 \frac{(1 - \varepsilon Ko K_1) P_{n2} + \varepsilon Ko Q_{n2}}{\mu_n \Psi_n}, \quad Ko^* = \varepsilon Ko,$$

$$C_{n2} = -2 \frac{(1 - \varepsilon Ko K_1) P_{n1} + \varepsilon Ko Q_{n1}}{\mu_n \Psi_n}, \quad K_1 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} Lu \frac{Bi_m}{Bi_q},$$

$$\Psi_n = v_1 A_{n1} P_{n2} + v_2 B_{n2} Q_{n1} - v_2 A_{n2} P_{n1} - v_1 B_{n1} Q_{n2},$$

$$A_{ni} = \left[ 1 + \frac{1}{Bi_q} + (1 - v_i^2) K_1 \right] \sin v_i \mu_n + \frac{1}{Bi_q} v_i \mu_n \cos v_i \mu_n,$$

$$B_{ni} = (1 - v_i^2) \sin v_i \mu_n + \frac{(1 - v_i^2) + \varepsilon Ko Pn}{Bi_m} (\sin v_i \mu_n + v_i \mu_n \cos v_i \mu_n),$$

$$Q_{ni} = \left[ 1 + (1 - v_i^2) K_1 \right] \cos v_i \mu_n - \frac{1}{Bi_q} v_i \mu_n \sin v_i \mu_n,$$

$$P_{ni} = (1 - v_i^2) \cos v_i \mu_n - \frac{(1 - v_i^2) + \varepsilon Ko Pn}{Bi_m} v_i \mu_n \sin v_i \mu_n.$$

Тут  $\sqrt{s_n} = \mu_n / i$ ,  $\mu_n$  – корені характеристичного рівняння

$$P_{n1} Q_{n2} - P_{n2} Q_{n1} = 0. \quad (13)$$

Для обрахунків розв'язок (11), (12) перепишемо у розмірному вигляді:

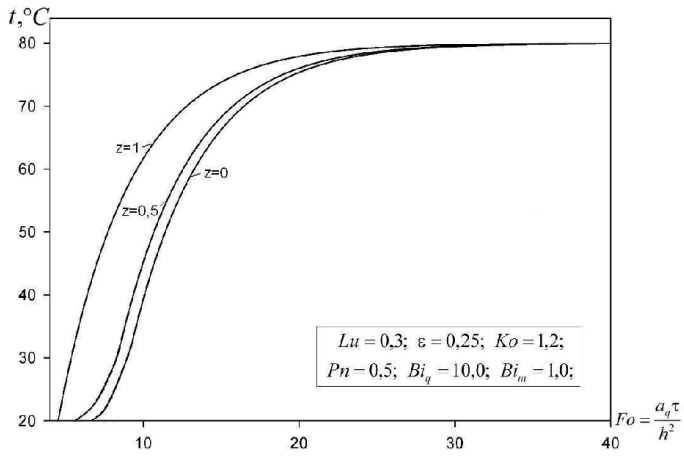
$$t(z, \tau) = T_c - (T_c - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{ni} \cos\left(v_i \mu_n \frac{z}{h}\right) e^{-\mu_n^2 a_q \tau / h^2}, \quad (14)$$

$$\theta(z, \tau) = \theta_p - \frac{(\theta_0 - \theta_p)}{Ko^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^2 C_{ni} (1 - v_i^2) \cos\left(v_i \mu_n \frac{z}{h}\right) e^{-\mu_n^2 a_q \tau / h^2}. \quad (15)$$

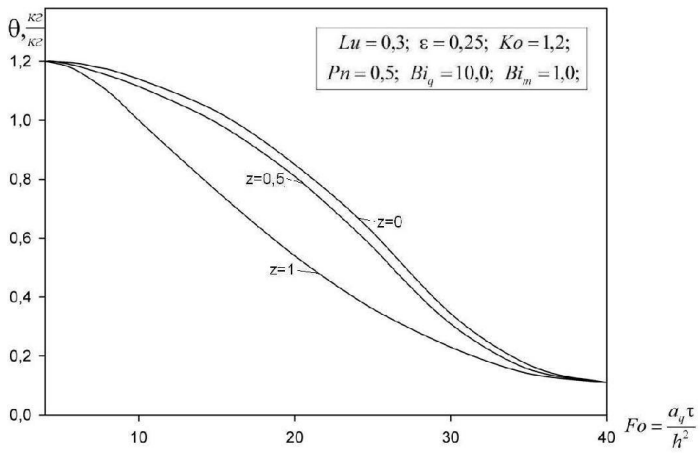
### 3. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Чисельні обрахунки проводимо за формулами (14), (15) на мові Fortran і за допомогою отриманих графіків хочемо побачити: 1) поведінку температури і вологовмісту у різних точках пластини залежно від часу і, в результаті, вихід температури і вологовмісту на стаціонарне (стале) і рівноважне значення відповідно; 2) виникнення і поведінку в часі градієнтів температури і вологовмісту. Задаємо такі значення параметрів:  $\varepsilon = 0,25$ ;  $Lu = 0,3$ ;  $Ko = 1,2$ ;  $Pn = 0,5$ ;  $Bi_q = 10$ ;  $Bi_m = 1,0$ ;  $T_0 = 20^\circ C$ ,  $T_c = 80^\circ C$ ,  $\theta_0 = 1,2 \text{ кг/кг}$ ,  $\theta_p = 0,1 \text{ кг/кг}$ .

На графіках рисунка 2 продемонстровано весь перехідний (нестаціонарний) процес конвективного сушіння вологої пластини. Температура зовнішньої поверхні пластини ( $Z=1$ ), порівняно із серединою пластини ( $Z=0$ ), з самого початку процесу сушіння швидко зростає, що призводить до появи значних градієнтів температури (див. рис. 2а  $Fo \approx 5 - 15$ ) і з запізненням в часі до значних градієнтів вологовмісту по товщині пластини (див. рис. 2б  $Fo \approx 10 - 25$ ). Це означає, що під час розглядуваного процесу конвективного сушіння при певних умовах виникатимуть значні напруження і відповідні деформації, які можуть призвести до жолоблення пластини. Під кінець процесу температура виходить на стаціонарне значення  $t_{CT} = 80^\circ C$  (див. рис. 2а), а вологовміст на рівноважне значення  $\theta_p = 0,1 \text{ кг/кг}$  (див. рис. 2б). Слід відмітити, що отримані графіки температури і вологовмісту якісно співпадають з відповідними графіками, отриманими для дерева (сосни, дубу) [11, 12] та отриманими експериментально для целюлози [10].



a)



б)

Рис. 2. Графіки розподілу в часі:  
 а) температури, б) вологопереносу

#### 4. ВИСНОВКИ

1. Отримані у роботі графіки дозволяють побачити якісну картину поведінки температури і вологовмісту під час конвективного сушіння вологої пластини, виготовленої з капілярно-пористого колоїдного матеріалу (наприклад: дерева, картону, паперу, целюлози та ін.).

2. Розглянута задача корисна для вивчення процесу сушіння поліграфічної продукції, коли підвід тепла здійснюється конвективним чи комбінованими способами (кондуктивно-конвективним, променево-конвективним) з метою подальшої автоматизації.

3. Запропонований підхід (математична модель) може бути застосований до вивчення інших способів сушіння поліграфічної продукції: кондуктивного (контактного) [13], променевого (терморадіаційного).

1. Воробьев Д. В. *Технология послепечатных процессов* / Д. В. Воробьев – М.: МГУП, 2000. – 392 с. 2. Лыков А. В. *Теория сушки* / А. В. Лыков. – М.: Энергия, 1968. – 472 с. 3. Шот Р. І. *Теплові процеси в поліграфії* / Р. І Шот, І. Т. Стрепко. – Львів: УАД, 1998.–202с. 4. Загаринская Л. А. *Полиграфические материалы [Текст]: учебник* / Л. А. Загаринская, Б. Н. Шахельдян. – М.: Книга, 1975. – 351 с. 5. Гавенко С. Ф. *Технологія ламінування друкарських відбитків* / С. Ф. Гавенко, М. С. Мартинюк.– Львів: УАД, 2008. - 79 с. 6. Майк В. З. *Технологія брошурувально-палітурних процесів* / В. З. Майк.– Львів: УАД, 2011.–488 с. 7. Йордан Г. *Основи поліграфії* / Г. Йордан - Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. – 176 с. 8. Ренета В. Б. *Матеріали і технології лакування поліграфічної продукції* / В. Б. Ренета, В. В. Шибанов.– Львів: УАД, 2011.–135 с. 9. Угрин Я. М. *Основи пакувальної справи. Полімерна тара* / Я. М. Угрин, Ю. Й. Хведчин, І. І. Регей. – Львів : Укр. акад. друкарства, 2011. – 160 с. 10. Лыков А. В. *Теория тепло- и массопереноса* / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М.: Госэнергоиздат, 1963.–535с. 11. Бакалець А. В. *Математичне моделювання неізотермічного вологоперенесення і в'язкопружного стану в деревині у процесі сушіння*: дис. ... канд. техн. наук: 01.05.02 / Антон Васильович Бакалець.– Львів, 2010.– 240с. 12. Шубин Г. С. *Сушка и тепловая обработка древесины* / Г. С. Шубин.– М.: Лесн. пром-сть, 1990.– 336 с. 13. Коляно Я. Ю. *Нестационарные поля потенциалів тепловологодопереносу в процесах конвективного і кондуктивного сушіння поліграфічних матеріалів* / Я. Ю. Коляно, Т. С. Сасс // *Сучасні проблеми механіки і математики: матеріали міжнар. наук. конференції, присвяченої 85-річчю від дня народження ак. Я. С. Підстригача* – Львів, 2013 – Т.1.–С.144-146.