**УДК 512.643**

# ЛОКАЛІЗАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ КОРЕНІВ РЕГУЛЯРНИХ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

Р.В. Коляда, О.М. Мельник

*Українська академія друкарства,*
*вул. Під Голоском 19, Львів, 79020, Україна*

*В роботі досліджується локалізація характеристичних коренів регулярних матричних многочленів за елементами матриць-коефіцієнтів цих многочленів; у випадку, якщо матричний многочлен розкладається в добуток лінійних множників, розглядається локалізація характеристичних коренів за матрицями, які входять в цей розклад..*

***Ключові слова:*** *матричний многочлен, характеристичні корені, локалізація характеристичних коренів.*

Дослідження різних задач лінійної алгебри, теорії матричних многочленів, теорії стійкості приводить до необхідності локалізувати характеристичні корені матричних многочленів, тобто визначити області комплексної площини, в яких вони знаходяться.

Розглянемо регулярний матричний многочлен

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_m,$$

де $A_0$ – неособлива матриця, $A_k$, $k = 1,2, ..., m$ – $n \times n$ –матриці з елементами з алгебраїчно замкненого поля характеристики нуль.

Без обмеження загальності будемо вважати, що

$$A_0 = E,$$

де $E$ – одинична матриця.

Нехай $\alpha$ – довільний характеристичний корінь матричного многочлена $A(x)$, тобто корінь многочлена $\det A(x)$.

**Теорема 1.** Кожний характеристичний корінь $\alpha$ матричного многочлена $A(x)$ знаходиться принаймні в одному з кругів з центрами 0, $a_{ii}^{(1)}$ і радіусами

$$1, \quad \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| + \sum_{k=2}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij}^{(k)} \right|$$

відповідно,

де $a_{ij}^{(1)}$ – елементи матриці $A_1$,
$a_{ij}^{(k)}$ – елементи матриці $A_k$, $k = 2, ..., m$.

Доведення. Відомо, що $\det A(x) = \det(Ex - L)$,

де

$$L = \begin{vmatrix} 0 & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_1 \end{vmatrix}.$$

Згідно з теоремою Гершгоріна [1] кожне характеристичне число $\alpha$ деякої числової матриці $C = \|C_{ps}\|_1^{mn}$ завжди розміщене в одному з кругів

$$\left|C_{pp} - \alpha\right| \le \sum_{s=1, s\ne p}^{mn} \left|c_{ps}\right|, \;\; p = 1, 2, \ldots, mn,$$

де $C_{ps}$ – елементи матриці $C$.

Для завершення доведення теореми достатньо розглянути числову матрицю $L$.

З теореми 1 у випадку $m$ = 1 одержуємо теорему Гершгоріна [1].

**Твердження 1.** Якщо при деякому $i$ для всіх $l \ne$ виконуються нерівності

$$1.\; \left|a_{ll}^{(1)} - a_{ii}^{(1)}\right| \succ \sum_{j=1, j\ne l}^{n} \left|a_{lj}^{(1)}\right| + \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{lj}^{(k)}\right| + \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)}\right|,$$

$$2.\; \left|a_{ll}^{(1)}\right| \succ \sum_{j=1, j\ne l}^{n} \left|a_{lj}^{(1)}\right| + \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{lj}^{(k)}\right| + 1, \tag{1}$$

то у відповідних кругах

$$1.\; \left|\alpha - a_{11}^{(1)}\right| \le \sum_{j=1, i\ne l}^{n} \left|a_{ij}^{(1)}\right| + \sum_{k=2}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}^{(k)}\right|, \tag{2}$$

$$2.\; \left|\alpha\right| \prec 1$$

міститься точно один характеристичний корінь матричного многочлена $A(x)$.

***Доведення.*** Виконання умов (1) гарантує ізольованість круга Гершгоріна від решти кругів для матриці $L$. Оскільки det $A(x)$ = det($Ex$ - $L$) , то твердження 1 доведено.

**Твердження 2.** Якщо матричний многочлен $A(x)$ розкладається на лінійні ні множники

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_m),$$

то довільний його характеристичний корінь знаходиться принаймні в одному із кругів з центрами $b_{ii}^{(k)}$, $b_{ii}^{(m)}$, $k$ = 1,2, ..., $m$-1 і відповідними радіусами

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} b_{ij}^{(k)} + 1 \quad , \qquad \sum_{i=1, i\neq j}^{n} b_{ij}^{(m)} \quad ,$$

де $b_{ij}^{(k)}$– елементи матриці $B_k$, $k = 1,2, ..., m$-1,
$b_{ii}^{(m)}$– елементи матриці $B_m$ .

Доведення. З того, що матриці $L$ і

$$W = \begin{Vmatrix} B_m & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{m-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & E & \\ 0 & 0 & 0 & B_2 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 \end{Vmatrix}$$

подібні та det($Ex$ - $L$) = det($Ex$ - $W$), випливає доведення твердження 2.

**Твердження 3.** Якщо матричний многочлен $A(x)$ розкладається на лінійні множники

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_m)$$

і при деякому $i$ виконуються нерівності

$$\left| b_{ll}^{(k)} - b_{ii}^{(s)} \right| \succ \sum_{j=1, j\neq l}^{n} b_{lj}^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(k)} + r \quad ,$$

де $\begin{cases} r = 2, \ \textit{якщо} \ k, \ s = 1,2,\ldots,m-1 \\ r = 1, \ \textit{якщо} \ k = 1,2,\ldots,m, \ s = 1, \\ r = 0, \ \textit{якщо}, \ k = m, \ s = m, \end{cases}$

то в відповідних кругах $\left| \alpha - b_{ii}^{(s)} \right| \leq \sum_{j=1, j\neq l}^{n} b_{ij}^{(s)} + r$ ,

де $\begin{cases} r = 1, \ \textit{якщо} \ s = 1,2,\ldots,m-1, \\ r = 0, \ \textit{якщо} \ s = m, \end{cases}$

міститься тільки один характеристичний корінь матричного многочлена $A(x)$.

***Доведення*** твердження 3 аналогічне до доведення твердження 1, врахувавши, що матриці $W$ і $L$ подібні.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Гантмахер Ф.Р.Теория матриц. – М.: Наука, 1988 – 550 с.
2. Ланкастер П. Теорія матриць. – М.: Наука, 1982 – 272 с.

## REFERENCES

1. Gantmaher F.R. (1988). Teoriya matryts. – M. : Nauka, – 550 p. (in Russian)
2. Lankaster P. (1982). Teoriya matryts. – M.: Nauka, – 272 p. (in Russian)

**UDC 512.643**

## LOCALIZATION OF CHARACTERISTIC ROOTS OF REGULAR MATRIX POLYNOMIALS

R.V.Kolyada, O.M.Melnyk

*Ukrainian Academy of Printing*
*19, Pid Holoskom St., Lviv, 79020, Ukraine*
*rostyslavakolyada@gmail.com, melnykorest@gmail.com*

*The localization of characteristic roots of regular matrix polynomials on the elements of matrix – coefficients of these polynomials has been studied in the paper. In case when the matrix polynomial decomposes into a product of linear factors, the localization of characteristic roots is considered according to the matrices that are included in this decomposition.*

***Keywords:*** *matrix polynomial, characteristic roots, localization of characteristic roots.*

*Стаття надійшла до редакції 25.05.2017*
*Received 25.05.2017*