

УДК 629.78

Канд. физ.-мат. наук Г.А. Иванова, канд. техн. наук А.Г. Меланченко,
д-р техн. наук В.С. Хорошилов

ДИНАМИКА КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ АНТЕНН И ШТАНГ С ГРУЗАМИ

Приведена математическая модель, описывающая динамику космического аппарата относительно центра масс с учетом упругих колебаний установленных на нем стержневых антенн большой длины и штанг с грузами. Применительно к космическому аппарату "Микросат", на котором установлены четыре штанги с приборами научной аппаратуры, разработана программа на языке Турбо-Паскаль и проведены расчеты на персональном компьютере, подтверждающие работоспособность программы.

Наведено математичну модель, яка описує динаміку космічного апарата відносно центра мас з урахуванням пружних коливань установлених на ньому стрижневих антен великої довжини та штанг з вантажами. Стосовно космічного апарата "Мікросат", на якому встановлені чотири штанги з приладами наукової апаратури, розроблено програму мовою Турбо-Паскаль і проведено розрахунки на персональному комп'ютері, які підтверджують працездатність програми.

Mathematical model is presented, describing spacecraft dynamics relative to the center of mass, considering elastic vibrations of the long-length rod antennas and booms with loads installed on the spacecraft. As applicable to Microsat spacecraft, on which four booms with scientific equipment instruments are installed, a Turbo-Pascal program was developed and calculations confirming program operability were performed on a personnel computer.

Для проведения наблюдений динамических процессов в ионосфере Земли в последнее время все чаще используются космические аппараты (КА), оснащенные специальными приборами и стержневыми антеннами. С целью исключения влияния корпуса КА на показания приборов возникает необходимость размещения их на некотором удалении от корпуса. Для этого используются металлические штанги различной длины, выполненные либо из ленточных стержней с перехлестом кромок, либо из сплошных однозвенных (или двухзвенных) трубок. В любом случае штанги раскрываются после выведения КА на орбиту.

Учитывая, что штанги подвержены температурным и упругим деформациям, возникла необходимость рассмотреть влияние этих деформаций на смещение приборов научной аппаратуры (НА) относительно корпуса аппарата. Получение математической модели КА с учетом упругости штанг показано на примере КА "Микросат", изображенного на рис. 1.

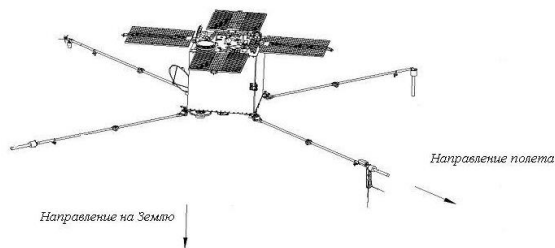


Рис. 1. Космический аппарат "Микросат"

Для получения математической модели КА используются следующие правые ортогональные системы координат:

$O_3X_иY_иZ_и$ – инерциальная система координат (ИСК), начало O_3 расположено в центре Земли, ось $O_3Y_и$ направлена по оси вращения Земли в сторону Северного полюса Земли, ось $O_3Z_и$ – в точку весеннего равноденствия;

$O_cX_oY_oZ_o$ – орбитальная система координат (ОСК), начало O_c совпадает с центром масс КА, ось O_cZ_o направлена по радиусу-вектору, соединяющему центр Земли с центром масс КА, ось O_cX_o лежит в плоскости орбиты КА и направлена в сторону орбитального движения;

$O_cX_cY_cZ_c$ – связанная система координат (ССК), начало O_c совпадает с центром масс КА, при идеальной ориентации КА в ОСК

оси ССК совпадают с соответствующими осями ОСК, при отклонении КА от идеальной ориентации положение ССК относительно ОСК определяется последовательным поворотом на углы тангажа, крена и рыскания;

$O_K X_K Y_K Z_K$ – конструкторская система координат (КСК), начало O_K расположено в плоскости стыковки КА с ракетой-носителем, оси КСК параллельны и совпадают по направлению с соответствующими осями ССК;

$O_i X_i Y_i Z_i$ – связанная с i -й штангой в недеформированном состоянии система координат (ISK), где $i = 1, 2, 3, 4$, начало O_i расположено в точке крепления штанги к корпусу КА, $O_i X_i$ – продольная ось штанги, $O_i Y_i$, $O_i Z_i$ – поперечные оси штанги.

В соответствии с методами аналитической механики [1] движение КА с упругими элементами можно представить в виде движения несущего тела (КА с недеформированными элементами конструкции) и относительного движения носимых тел (частиц деформированных элементов конструкции), совершающих малые колебания около тех положений, которые они занимали бы в абсолютно твердом теле.

Положение произвольной точки деформированной штанги в связанной системе координат $O_c X_c Y_c Z_c$ в любой момент времени определяется вектором

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{u},$$

где $\bar{\rho}$ – радиус-вектор, соединяющий центр масс КА с произвольной точкой недеформированной штанги; \bar{u} – радиус-вектор, определяющий смещение произвольной точки штанги вследствие ее деформации.

Смещение частиц деформированной штанги \bar{u} зависит от их координат x, y, z и времени t . Предполагается, что время t входит в \bar{u} с помощью обобщенных координат q_α , число которых конечно ($\alpha = \overline{1, n}$). Таким образом, функциональную зависимость вектора смещения \bar{u} любой точки деформированной штанги можно представить в виде

$$\bar{u} = \bar{u}(x, y, z, q_1, \dots, q_n).$$

Эта зависимость может быть представлена рядом по степеням q_α :

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \sum_{\alpha=1}^n q_\alpha(t) \bar{U}_\alpha(x, y, z) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n q_\alpha(t) q_\beta(t) \bar{U}_{\alpha\beta}(x, y, z) + \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{U}_\alpha(x, y, z)$, $\bar{U}_{\alpha\beta}(x, y, z)$ – векторные коэффициенты.

Учитывая, что деформации штанг при движении КА, как правило, малы, в выражении (1) можно ограничиться линейной частью.

Традиционно отклонение таких простейших элементов конструкции, как стержневые антенны и штанги, от недеформированного состояния представляется в виде изгиба в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и кручения вокруг продольной оси. С учетом этого выражение (1) будет переписано в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} q_{\alpha_1}(t) \bar{U}_{\alpha_1}(x, y, z) + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} p_{\alpha_2}(t) \bar{U}_{\alpha_2}(x, y, z) + \\ & + \sum_{\alpha_3=1}^{n_3} r_{\alpha_3}(t) \bar{U}_{\alpha_3}(x, y, z), \end{aligned} \quad (2)$$

где $q_{\alpha_1}(t)$, $p_{\alpha_2}(t)$, $r_{\alpha_3}(t)$ – обобщенные координаты изгибных (в плоскостях $O_i X_i Y_i$ и $O_i X_i Z_i$) и крутильных (вокруг продольной оси $O_i X_i$) колебаний штанги соответственно; n_1 , n_2 , n_3 – количество учитываемых форм колебаний каждого вида; $\bar{U}_{\alpha_1}(x, y, z)$, $\bar{U}_{\alpha_2}(x, y, z)$, $\bar{U}_{\alpha_3}(x, y, z)$ – векторные коэффициенты.

Если пренебречь поворотом поперечного сечения штанги при изгибе и смещением его вдоль продольной оси, выражение (2) можно записать в виде [1]

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \bar{j} \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} q_{\alpha_1}(t) \varphi_{\alpha_1}(x) + \bar{k} \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} p_{\alpha_2}(t) \varphi_{\alpha_2}(x) + \\ & + (-\bar{j}z + \bar{k}y) \sum_{\alpha_3=1}^{n_3} r_{\alpha_3}(t) \theta_{\alpha_3}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varphi_{\alpha_1}(x)$, $\varphi_{\alpha_2}(x)$ – собственные формы изгибных колебаний штанги (в плоскости

и из плоскости $\varphi_{\alpha_1}(x) = \varphi_{\alpha_2}(x) = \varphi_{\alpha}(x)$ одинаковые); $\theta_{\alpha_3}(x)$ – собственные формы крутильных колебаний вокруг продольной оси штанги; $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты, направленные по осям ИСК.

Из сравнения (2) и (3) получим выражения для векторных коэффициентов:

- в плоскости $O_i X_i Y_i - \bar{U}_{\alpha_1}(x, y, z) = \bar{j} \varphi_{\alpha}(x)$;
- в плоскости $O_i X_i Z_i - \bar{U}_{\alpha_2}(x, y, z) = \bar{k} \varphi_{\alpha}(x)$; (4)
- вокруг оси $O_i X_i - \bar{U}_{\alpha_3}(x, y, z) = (-\bar{j}z + \bar{k}y) \theta_{\alpha_3}(x)$.

Учитывая, что масса упругих штанг с грузами намного меньше массы всего КА, можно пренебречь влиянием колебаний штанг на положение центра масс КА и его моменты инерции. Тогда движение КА, на котором установлены четыре штанги с приборами НА, относительно своего центра масс можно описать следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

– динамическим уравнением в векторно-матричном виде

$$\begin{aligned} & \bar{J} \dot{\bar{\omega}}_{\text{си}} + \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \bar{G}_{i\alpha_1} \ddot{q}_{i\alpha_1} + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \bar{G}_{i\alpha_2} \ddot{p}_{i\alpha_2} + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha_3=1}^{n_3} \bar{G}_{i\alpha_3} \ddot{r}_{i\alpha_3} \right) + \bar{\omega}_{\text{си}} \times \sum_{i=1}^4 \left(\sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \bar{G}_{i\alpha_1} \dot{q}_{i\alpha_1} + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \bar{G}_{i\alpha_2} \dot{p}_{i\alpha_2} + \sum_{\alpha_3=1}^{n_3} \bar{G}_{i\alpha_3} \dot{r}_{i\alpha_3} \right) = \bar{M}; \quad (5) \end{aligned}$$

– уравнениями Лагранжа с учетом демпфирующих и упругих сил

$$\begin{aligned} & \bar{G}_{i\alpha_1} \dot{\bar{\omega}}_{\text{си}} + (m_{ui} + m_{zi}) \ddot{q}_{i\alpha_1} + e_{i\alpha_1} \dot{q}_{i\alpha_1} + c_{i\alpha_1} q_{i\alpha_1} = 0, \\ & \alpha_1 = \overline{1, n_1}; \\ & \bar{G}_{i\alpha_2} \dot{\bar{\omega}}_{\text{си}} + (m_{ui} + m_{zi}) \ddot{p}_{i\alpha_2} + e_{i\alpha_2} \dot{p}_{i\alpha_2} + \\ & + c_{i\alpha_2} p_{i\alpha_2} = 0, \\ & \alpha_2 = \overline{1, n_2}; \quad (6) \end{aligned}$$

$$\bar{G}_{i\alpha_3} \dot{\bar{\omega}}_{\text{си}} + (J_{ui} + J_{zi}) \ddot{r}_{i\alpha_3} + e_{i\alpha_3} \dot{r}_{i\alpha_3} + c_{i\alpha_3} r_{i\alpha_3} = 0,$$

$$\alpha_3 = \overline{1, n_3}; \quad i = \overline{1, 4},$$

где \bar{J} – тензор инерции КА, кгс·м·с²;

– $\dot{\bar{\omega}}_{\text{си}}, \bar{\omega}_{\text{си}}$ – векторы абсолютной угловой скорости и ускорения КА, с⁻¹, с⁻²; i – номер штанги, где $i = 1, 2, 3, 4$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – номера форм колебаний; n_1, n_2, n_3 – количество учитываемых форм колебаний; $q_{i\alpha_1}$, м; $p_{i\alpha_2}$, м; $r_{i\alpha_3}$, рад – обобщенные координаты изгибных и крутильных колебаний, $e_{i\alpha_1}$, кгс·с/м; $e_{i\alpha_2}$, кгс·с/м; $e_{i\alpha_3}$, кгс·с/м – коэффициенты демпфирования; $c_{i\alpha_1}$, кгс/м; $c_{i\alpha_2}$, кгс/м; $c_{i\alpha_3}$, кгс/м – коэффициенты жесткости; $\bar{G}_{i\alpha_1}$, кгс·с², $\bar{G}_{i\alpha_2}$, кгс·с²; $\bar{G}_{i\alpha_3}$, кгс·с² – векторные коэффициенты взаимного влияния КА и штанг с грузами; m_{ui}, m_{zi} – массы штанги и груза, кгс·с²/м; J_{ui}, J_{zi} – моменты инерции штанги и груза относительно продольной оси штанги, кгс·м·с²; $\bar{M} = \bar{M}_{\Sigma} - \bar{\omega}_{\text{си}} \times \bar{J} \bar{\omega}_{\text{си}}$; \bar{M}_{Σ} – вектор суммарного момента (внешних сил и управления), действующего на КА, кгс·м; – кинематическим уравнением в кватернионной форме

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \circ \bar{\omega}_{\text{си}}^{\text{с}}, \quad (7)$$

где $\bar{\omega}_{\text{си}}^{\text{с}} = |\omega_{xc} \omega_{yc} \omega_{zc}|^T$ – вектор угловой скорости ССК относительно ОСК; $\dot{Q} = \dot{q}_0 + \dot{q}_1 \bar{k}_1 + \dot{q}_2 \bar{k}_2 + \dot{q}_3 \bar{k}_3$ – производная кватерниона Q ; $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ – единичные векторы; \circ – символ кватернионного умножения.

В выражениях (7) и далее верхний индекс у вектора обозначает систему координат, в которой этот вектор записан (например, c – ССК, o – ОСК, i – ИСК).

Перед интегрированием уравнение (7) представляется в скалярном виде

$$\begin{aligned} \dot{q}_0 &= -0,5(q_1 \omega_{xc} + q_2 \omega_{yc} + q_3 \omega_{zc}); \\ \dot{q}_1 &= 0,5(q_0 \omega_{xc} - q_3 \omega_{yc} + q_2 \omega_{zc}); \\ \dot{q}_2 &= 0,5(q_3 \omega_{xc} + q_0 \omega_{yc} - q_1 \omega_{zc}); \\ \dot{q}_3 &= 0,5(-q_2 \omega_{xc} + q_1 \omega_{yc} + q_0 \omega_{zc}). \end{aligned} \quad (8)$$

Вектор угловой скорости $\bar{\omega}_{co}^c$, входящий в (7), определяется выражением, записанным в ССК,

$$\bar{\omega}_{co}^c = \bar{\omega}_{co}^c - T_{co} \bar{\omega}_{oi}^o, \quad (9)$$

где $\bar{\omega}_{oi}^o$ – вектор угловой скорости ОСК относительно ИСК, записанный в проекциях на оси ОСК; T_{co} – матрица перехода от ОСК к ССК.

Матрица T_{co} , входящая в (9), имеет вид [1]

$$T_{co} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}.$$

Из внешних моментов, входящих в \bar{M}_Σ , учитываются гравитационный \bar{M}_G , магнитный \bar{M}_m и аэродинамический \bar{M}_a моменты, действующие на КА. Векторы перечисленных моментов определяются по формулам

$$\bar{M}_G = \frac{3\mu}{r_c^3} \bar{k} \times \bar{J}_c \bar{k}; \quad \bar{M}_m = (\bar{m} + \bar{K} \cdot \bar{B}) \times \bar{B};$$

$$\bar{M}_a = (\bar{m}_a + (\bar{r}/l_k) \times \bar{c}_a) A_k l_k q, \quad (10)$$

где \bar{r}_c – радиус-вектор, соединяющий центр Земли с центром масс КА, м; \bar{k} – единичный вектор, направленный по радиус-вектору текущей точки орбиты; $\mu = 0,3986 \cdot 10^{15} \text{ м}^3/\text{с}^2$ – гравитационная постоянная Земли; \bar{B} – вектор индукции магнитного поля Земли, кгс/А·м; \bar{m} – вектор магнитного момента КА, А·м²; \bar{K} – матрица индукционных коэффициентов КА, А²·м³/кгс; \bar{m}_a – вектор моментных аэродинамических коэффициентов; \bar{c}_a – вектор силовых аэродинамических коэффициентов; \bar{r} – радиус-вектор, соединяющий центр масс КА с началом O_k КСК, м; l_k – характерная длина КА, м; A_k – характерная площадь КА, м²; q – скоростной напор верхней атмосферы Земли, кгс/м².

Векторные коэффициенты \bar{G}_{ia_1} , \bar{G}_{ia_2} , \bar{G}_{ia_3} , входящие в уравнения (5) и (6), в общем случае определяются следующим выражением, записанным в ССК [1]:

$$\bar{G}_\alpha^c = \int_m \bar{\rho}_\alpha^c \times \bar{U}_\alpha^c(x) dm, \quad (11)$$

где $\bar{\rho}_\alpha^c$ – радиус-вектор, соединяющий центр масс КА с произвольной точкой недеформированной штанги; $\bar{U}_\alpha^c(x)$ – вектор, характеризующий колебания штанги; α – номер тона колебаний штанги; m – масса штанги.

В выражении (11) заменим интегрирование по массе dm на интегрирование по безразмерному параметру ds в соответствии с правилом

$$dm = \frac{m}{l} dx = md\left(\frac{x}{l}\right) = mds,$$

где l – длина штанги, и перепишем его в виде

$$\bar{G}_\alpha^c = m \int_0^1 \bar{\rho}_\alpha^c \times \bar{U}_\alpha^c(s) ds. \quad (12)$$

Рассмотрим способ получения аналитических выражений для векторного коэффициента \bar{G}_α^c на примере КА "Микросат", изображенном на рис. 1. Радиус-вектор $\bar{\rho}_\alpha^c$, входящий в (11) и (12), для этого случая можно представить в виде суммы следующих составляющих:

$$\bar{\rho}_\alpha^c = \bar{\rho}_1^c + T_{ci} (\bar{\rho}_2^i + \bar{\rho}_3^i), \quad (13)$$

где $\bar{\rho}_1^c$ – радиус-вектор, соединяющий центр масс КА с плоскостью, в которой располагаются недеформированные штанги; $\bar{\rho}_2^i$ – радиус-вектор, соединяющий конец вектора $\bar{\rho}_1^c$ с точкой крепления штанги; $\bar{\rho}_3^i$ – радиус-вектор, соединяющий точку крепления штанги с ее произвольной точкой; $T_{ci} = T_{ic}^T$ – матрица перехода от ИСК к ССК.

Матрица перехода от ССК к ИСК имеет вид

$$T_{ic} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Здесь $\varphi_i = \frac{\pi(i-1)}{2}$ – угол поворота ИСК относительно ССК, где $i = 1, 2, 3, 4$.

Радиусы-векторы $\bar{\rho}_1^c, \bar{\rho}_2^c, \bar{\rho}_3^c$, входящие в (13), согласно рис. 1 имеют вид

$$\bar{\rho}_1^c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \end{vmatrix}; \quad \bar{\rho}_2^c = \begin{vmatrix} b_2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \bar{\rho}_3^c = \begin{vmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

где $b_1 < 0, b_2 > 0, x > 0$.

Приведем описание получения векторного коэффициента \bar{G}_α^c на примере колебаний штанги в плоскости $O_i X_i Y_i$. С учетом (4) векторный коэффициент $\bar{U}_\alpha^i(x)$, входящий в (11) и записанный в ИСК, имеет вид

$$\bar{U}_\alpha^i(x) = \begin{vmatrix} 0 \\ \varphi_\alpha(x) \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Введем обозначения для вектор-столбцов матрицы T_{ci} перехода от ИСК к ССК:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1^c &= |\cos \varphi_i \quad \sin \varphi_i \quad 0|^T; \\ \bar{a}_2^c &= |-\sin \varphi_i \quad \cos \varphi_i \quad 0|^T; \\ \bar{a}_3^c &= |0 \quad 0 \quad 1|^T. \end{aligned}$$

Тогда векторные выражения $\bar{\rho}_\alpha^c$ и $\bar{U}_\alpha^c(x)$, входящие в (11), с учетом (15) и (16) можно представить в виде

$$\bar{\rho}_\alpha^c = b_1 \bar{a}_3^c + (b_2 + x) \bar{a}_1^c; \quad (17)$$

$$\bar{U}_\alpha^c(x) = \varphi_\alpha(x) \bar{a}_2^c.$$

Переходя к безразмерным параметрам $s = \frac{x}{l}$ и ds и используя обозначения интегралов

$$n_\alpha = \int_0^1 \varphi_\alpha(s) ds, \quad d_\alpha = \int_0^1 s \varphi_\alpha(s) ds, \quad (18)$$

после подстановки (17) в (11) с учетом (18) получим выражение для вычисления коэффициентов $\bar{G}_{\alpha_1}^c$, входящих в уравнения (5), (6), в виде

$$\bar{G}_{i\alpha_1}^c = m_{ui} [n_{\alpha_1} (-b_1 \bar{a}_1^c + b_2 \bar{a}_3^c) + d_{\alpha_1} l_i \bar{a}_3^c]. \quad (19)$$

При рассмотрении колебаний штанги в плоскости $O_i X_i Z_i$ векторный коэффициент $\bar{U}_\alpha^i(x)$, входящий в (11), согласно (4) имеет вид

$$\bar{U}_\alpha^i(x) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi_\alpha(x) \end{vmatrix}. \quad (20)$$

Тогда с учетом (15), (18) и (20) получим выражение для вычисления коэффициентов

$$\bar{G}_{i\alpha_2}^c = -m_{ui} (n_{\alpha_2} b_2 + d_{\alpha_2} l_i) \bar{a}_2^c, \quad (21)$$

входящих в уравнения (5), (6).

Согласно (4) для крутильных колебаний вокруг продольной оси штанги $O_i X_i$ выражения для радиуса-вектора $\bar{\rho}_3^i$ и коэффициента \bar{U}_α^i запишем в виде

$$\bar{\rho}_3^i = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \quad \bar{U}_\alpha^i = \begin{vmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{vmatrix} \theta_\alpha(x). \quad (22)$$

Введем обозначение

$$\tilde{n}_\alpha = \int_0^1 \theta_\alpha(s) ds \quad (23)$$

и после подстановки (22) в (11) с учетом (23) получим выражение для векторного коэффициента

$$\bar{G}_{i\alpha_3}^c = J_{ui} \tilde{n}_{\alpha_3} \bar{a}_1^c. \quad (24)$$

Для КА "Микросат", у которого на свободных концах штанг располагаются приборы НА, коэффициенты (19), (21) и (24) принимают вид [2]:

– для изгибных колебаний

$$\begin{aligned} \bar{G}_{i\alpha_1}^c &= (m_{ui} n_{\alpha_1} + m_{zi} n_{\alpha_1}^2) (-b_1 \bar{a}_1^c + b_2 \bar{a}_3^c) + \\ &+ (m_{ui} d_{\alpha_1} + m_{zi} d_{\alpha_1}^2) l_i \bar{a}_3^c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{i\alpha_2}^c &= -[(m_{ui} n_{\alpha_2} + m_{zi} n_{\alpha_2}^2) b_2 + \\ &+ (m_{ui} d_{\alpha_2} + m_{zi} d_{\alpha_2}^2) l] \bar{a}_2^c; \end{aligned} \quad (25)$$

– для крутильных колебаний

$$\bar{G}_{i\alpha_3}^c = (J_{ui} \tilde{n}_{\alpha_3} + J_{zi} \tilde{n}_{\alpha_3}^c) a_1^{-c}, \quad (26)$$

где $n_{\alpha_3}^c = d_{\alpha_3}^c = \varphi_{\alpha_3}(1)$; $\tilde{n}_{\alpha_3}^c = \theta_{\alpha_3}(1)$.

При вычислении интегралов $n_\alpha(s)$, $n_\alpha^c(s)$, $d_\alpha(s)$, $d_\alpha^c(s)$, $\tilde{n}_\alpha(s)$, $\tilde{n}_\alpha^c(s)$, входящих в выражения коэффициентов (25) и (26), используются собственные формы изгибных $\varphi_\alpha(s)$ и крутильных $\theta_\alpha(s)$ колебаний, полученные для однородного упругого нерастяжимого стержня, жестко закрепленного на одном конце, в том числе и стержня с грузом на свободном конце [3].

Для моделирования динамики КА уравнения (5), (6) необходимо представить в матричном виде

$$\dot{\bar{X}} = \bar{A}^{-1} \bar{M}, \quad (27)$$

где $\dot{\bar{X}} = \left| \dot{x}_1 \dots \dot{x}_{3+n_1+n_2+n_3} \right|^T = \left| \dot{\omega}_x \dot{\omega}_y \dot{\omega}_z \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{n_1} \dot{p}_1 \dots \dot{p}_{n_2} \dot{r}_1 \dots \dot{r}_{n_3} \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{n_1} \dot{p}_1 \dots \dot{p}_{n_2} \dot{r}_1 \dots \dot{r}_{n_3} \right|^T$;
 $\bar{X} = \left| x_1 \dots x_{3+n_1+n_2+n_3} \right|^T = \left| \omega_x \omega_y \omega_z \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{n_1} \dot{p}_1 \dots \dot{p}_{n_2} \dot{r}_1 \dots \dot{r}_{n_3} q_1 \dots q_{n_1} p_1 \dots p_{n_2} r_1 \dots r_{n_3} \right|^T$,
 и дополнить кинематическими уравнениями (8).

Продемонстрируем процесс получения системы уравнений (27) на примере КА "Микросат", на котором установлены четыре штанги с приборами НА, с учетом первой формы изгибных колебаний каждой штанги в двух взаимно перпендикулярных плоскостях $O_i X_i Y_i$ и $O_i X_i Z_i$.

Вторая часть уравнения (27) записывается для переменных $\bar{X}_2 = \left| x_{12} \dots x_{19} \right|^T$ в скалярном виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} = x_4; \quad \dot{x}_{13} = x_5; \quad \dot{x}_{14} = x_6; \quad \dot{x}_{15} = x_7; \\ \dot{x}_{16} = x_8; \quad \dot{x}_{17} = x_9; \quad \dot{x}_{18} = x_{10}; \quad \dot{x}_{19} = x_{11} \end{aligned} \quad (31)$$

или $\dot{X}_{11+i} = X_{3+i}$, где $i = 1, \dots, 8$.

С учетом (31) вектор момента \bar{M} , входящий в (30), принимает вид

Чтобы избавиться у коэффициентов $\bar{G}_{i\alpha_1}$, $\bar{G}_{i\alpha_2}$ от громоздких нижних индексов, введем следующие обозначения номеров форм колебаний:

- $\alpha_1 = 1$ для колебаний в плоскости $O_i X_i Y_i$;
- $\alpha_2 = 2$ для колебаний в плоскости $O_i X_i Z_i$.

Тогда уравнения (5), (6) будут переписаны в виде

$$\begin{aligned} \bar{J} \dot{\bar{\omega}}_{\text{си}} + \sum_{i=1}^4 (\bar{G}_{i1} \dot{q}_{i1} + \bar{G}_{i2} \dot{p}_{i1}) = \bar{M} - \\ - \bar{\omega}_{\text{си}} \times \sum_{i=1}^4 (\bar{G}_{i1} \dot{q}_{i1} + \bar{G}_{i2} \dot{p}_{i1}); \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{i1} \dot{\bar{\omega}}_{\text{си}} + m_i \ddot{q}_{i1} = -e_{i1} \dot{q}_{i1} - c_{i1} q_{i1}; \\ \bar{G}_{i2} \dot{\bar{\omega}}_{\text{си}} + m_i \ddot{p}_{i1} = -e_{i1} \dot{p}_{i1} - c_{i1} p_{i1}, \end{aligned} \quad (29)$$

$i = 1, 2, 3, 4,$

где $m_i = m_{ui} + m_{zi}$; $\bar{G}_{i1} = \left| G_{i1x} \quad G_{i1y} \quad G_{i1z} \right|^T$;
 $\bar{G}_{i2} = \left| G_{i2x} \quad G_{i2y} \quad G_{i2z} \right|^T$.

Перед тем как представить систему уравнений (28), (29) в виде (27), разобьем вектор \bar{X} на две части. Первая часть записывается для переменных $\bar{X}_1 = \left| x_1 \dots x_{11} \right|^T$ и имеет вид

$$\dot{\bar{X}}_1 = \bar{A}^{-1} \bar{M}, \quad (30)$$

где $\dot{\bar{X}}_1 = \left| \dot{x}_1 \quad \dots \quad \dot{x}_{11} \right|^T = \left| \dot{\omega}_x \quad \dot{\omega}_y \quad \dot{\omega}_z \quad \dot{q}_{11} \quad \dot{q}_{21} \quad \dot{q}_{31} \quad \dot{q}_{41} \quad \dot{p}_{11} \quad \dot{p}_{21} \quad \dot{p}_{31} \quad \dot{p}_{41} \right|^T$;

где $\bar{M}_\Sigma = \left| M_{\Sigma x} \quad M_{\Sigma y} \quad M_{\Sigma z} \right|^T$;

$$\begin{aligned} \bar{B} = \bar{\omega}_{\text{си}} \times \sum_{i=1}^4 (\bar{G}_{i1} x_{3+i} + \bar{G}_{i2} x_{7+i}); \\ \bar{B} = \left| B_x \quad B_y \quad B_z \right|^T. \end{aligned}$$

Полная система уравнений (8), (30), (31), описывающая динамику КА "Микросат" относительно центра масс с учетом одной формы изгибных колебаний четырех штанг с приборами НА, имеет порядок 23.

Система ориентации КА "Микросат" включает следующие измерительные приборы и исполнительные органы: магнитометр, три измерителя угловой скорости, три магнитных исполнительных органа и тангажный двигатель-маховик.

Штанги на КА "Микросат" имеют практически одинаковую длину ~ 2 м, вес приборов на концах штанг $\sim 1,5$ кгс, моменты инерции КА относительно осей ССК: $J_{xx}=3,62$ кгс \cdot м \cdot с 2 ; $J_{yy}= 3,78$ кгс \cdot м \cdot с 2 ; $J_{zz}= 4,87$ кгс \cdot м \cdot с 2 .

На рис. 2 – 5 приведены результаты моделирования на персональном компьютере динамики КА относительно центра масс в рабочем режиме с учетом действующих на него внешних моментов (10). Результаты подтверждают работоспособность программы.

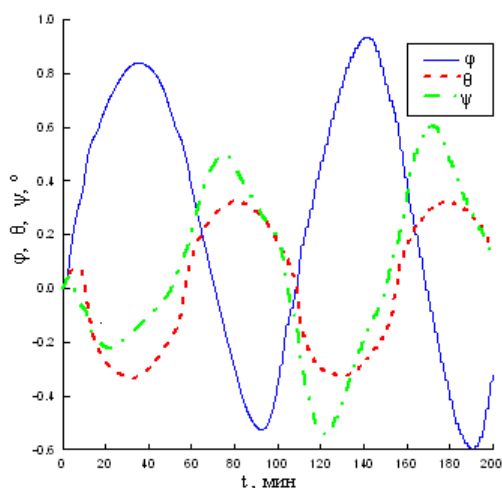


Рис. 2. Углы ориентации КА по крену φ , тангажу θ и рысканию ψ

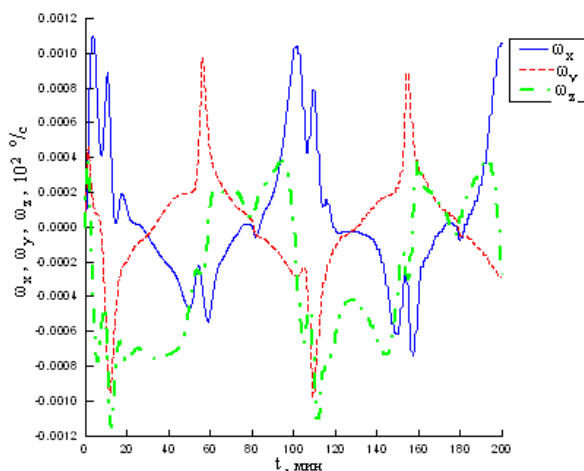


Рис. 3. Угловые скорости КА относительно ОСК по крену ω_x , тангажу ω_y и рысканию ω_z

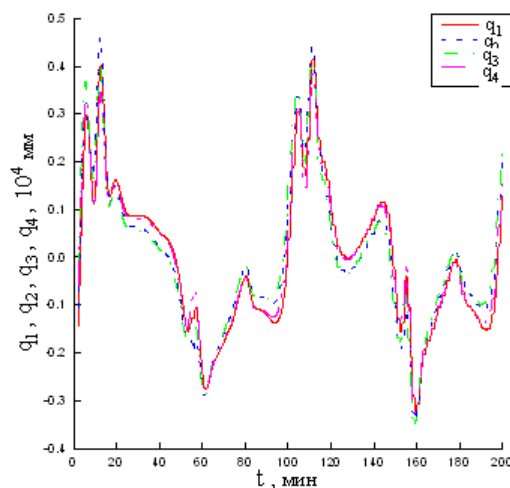


Рис. 4. Обобщенные координаты штанг при колебаниях в плоскости установки

Приведенная математическая модель позволяет моделировать динамику КА относительно центра масс с учетом упругих колебаний установленных на нем стержневых антенн и штанг с приборами научной аппаратуры.

Список использованной литературы

1. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
2. Иванова Г.А. Динамика космического аппарата с магнитно-гравитационной системой ориентации при наличии тепловых и упругих деформаций элементов конструкции: Дис... канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск: ГП "КБ "Южное", 1991. – 150 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.

Статья поступила 23.01.2014