

УДК 629.783:621.396.96

И.В. Маштак, канд. техн. наук А.Д. Шептун

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ОДНОЙ КООРДИНАТЫ ДВИЖЕНИЯ ОДНИМ ПУНКТОМ РАДИОКОНТРОЛЯ

Обоснована однопунктовая баллистическая технология определения (уточнения) параметров орбит спутников на околоземных орбитах по измерениям одной координаты движения. Приведены условия, при которых возникает минимум ошибок определения параметров орбиты по измерениям одной координаты одним пунктом наблюдения, и данные относительно точности продольного движения спутника при использовании начальных условий, определенных методами однопунктовой баллистической технологии. Отмечена сходимость результатов по точности прогнозирования методами однопунктовой и многопунктовой технологии.

Обґрунтовано однопунктову балістичну технологію визначення (уточнення) параметрів орбіт супутників на навколоземних орбітах за вимірами однієї координати руху. Наведено умови, за яких виникає мінімум помилок визначення параметрів орбіти за вимірами однієї координати одним пунктом спостереження, і дані щодо точності поздовжнього руху супутника за використання початкових умов, визначених методами однопунктової балістичної технології. Відзначено збіжність результатів щодо точності прогнозування методами однопунктової та багатопунктової технології.

A single-point ballistic method for determination (specification) of orbit parameters of satellites on the near-earth orbits based on measurements of one motion coordinate is justified. Conditions, resulting in minimum errors of orbit parameters determination based on measurements of one coordinate by one observation point, and data on precision of satellite longitudinal motion using initial conditions, determined by the single-point ballistic method, are stated. Repeatability of forecasting accuracy results using single-point and multi-point method is noted.

### Описание проблемы

Необходимость определения (уточнения) параметров движения спутника по измерениям одной координаты движения одним пунктом радиоконтроля его орбиты возникла сравнительно недавно. Работы были инициированы программой запуска первого национального космического аппарата (КА) "Січ-1" при наличии в Украине только одного современного пункта радиоконтроля в г. Евпатория с установленной в нем аппаратурой измерения радиальной скорости движения спутника.

В СССР баллистико-навигационное обеспечение полетов спутника осуществлялось на основе измерительной информации нескольких (обычно от четырех до шести) пунктов радиоконтроля орбиты. Соответствующим образом формировались стратегия радиоконтроля орбиты и методология проведения работ. Необходимые условия наблюдаемости орбиты достигаются разнесением пунктов радиоконтроля на местности. Измерительная информация при этом

является разнообразной и содержит данные об изменении всех параметров орбиты. Требуемый для оценивания параметров орбиты объем информации накапливается на одном, максимально на двух витках полета спутника. В большинстве случаев для определения (уточнения) параметров орбит спутников привлекается метод наименьших квадратов (МНК). Многолетняя программа подтвердила обоснованность применения многопунктовой баллистической технологии на основе МНК.

Однопунктовая технология не обеспечивает наблюдаемости орбиты в одном сеансе радиоконтроля [2, 3] и формирует в значительной степени однородную выборку измерений на двух радиовидимых витках полета спутника. Оба фактора порождают математические трудности при определении с требуемой точностью параметров орбиты. Во многих случаях имеет место расходящийся итерационный процесс получения решения.

Необходимость баллистического сопровождения полета первого национального КА "Січ-1" потребовала проведения дополнительных исследований для снижения влияния математических трудностей упомянутых факторов на точность определения параметров орбиты по измерениям одной координаты движения одним пунктом радиоконтроля. Результаты таких исследований представлены ниже.

### Стратегия радиоконтроля орбиты

Задача уточнения параметров орбиты спутника (шести координат движения) методом наименьших квадратов сводится [2-4] к решению следующей системы нормальных линейных алгебраических уравнений [4]:

$$\begin{cases} a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + \dots + a_{16}\delta_6 = b_1, \\ a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + \dots + a_{26}\delta_6 = b_2, \\ \vdots \\ a_{61}\delta_1 + a_{62}\delta_2 + \dots + a_{66}\delta_6 = b_6, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_{kj} = \sum_{i=1}^N p_i^2 \cdot \frac{\partial F_i}{\partial q_{0k}} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial q_{0j}}$ ;

$$b_k = \sum_{i=1}^N p_i^2 \cdot z_{\Delta i} \cdot \frac{\partial F_i}{\partial q_{0k}}.$$

Следуя [5], система уравнений (1) может быть представлена в таком виде:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор поправок с компонентами  $\delta_j (j=1\dots 6)$  к начальным параметрам орбиты;

$\mathbf{b}$  – вектор, характеризующий измерительную навигационную информацию;

$\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов  $a_{kj}$  в левой части системы (1).

Согласно [4] ошибки в нахождении вектора поправок  $\mathbf{x}$  определяются (помимо обусловленных исключением в формуле (1) членов выше первого порядка малости) вектором ошибок  $\mathbf{b}$  (измерительной ин-

формации), погрешностями вычисления коэффициентов матрицы  $\mathbf{A}$  (производных) и мерой обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ , обозначаемой  $\text{Cond}(\mathbf{A})$ .

Коэффициенты матрицы  $\mathbf{A}$  в задаче уточнения параметров орбиты спутника рассчитывают численно в системе уравнений движения, и ошибки их определения могут быть сколько угодно малы. По этой причине будем считать, что погрешности вычисления вектора поправок  $\mathbf{x}$  определяются остальными двумя факторами.

Влияние ошибок измерений на точность определения вектора поправок  $\mathbf{x}$  детально исследовано в [5]. Указывается, что ошибки вектора поправок  $\Delta\mathbf{x}$  обусловлены как погрешностями измерительной информации, так и численным значением меры обусловленности  $\text{Cond}(\mathbf{A})$  матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \text{Cond}(\mathbf{A}) \cdot \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}, \quad (3)$$

при этом  $\text{Cond}(\mathbf{A}) \geq 1$ .

Из [5] следует, что мера обусловленности  $\text{Cond}(\mathbf{A})$  выполняет роль множителя в увеличении относительной ошибки  $\Delta\mathbf{x}$  определения вектора поправок  $\mathbf{x}$ . При минимальном значении меры обусловленности ( $\text{Cond}(\mathbf{A}) = 1$ ) ошибка определения параметров орбиты обусловлена только погрешностями измерительной информации, характеризуемой вектором ошибок  $\Delta\mathbf{b}$ .

Компоненты  $a_{kj}$  матрицы  $\mathbf{A}$  представляют собой сумму производных от измеряемых в моменты  $t_i$  координат движения (радиальной скорости) по параметрам орбиты. Выбором моментов  $t_i$  можно определить условия, доставляющие минимум  $\text{Cond}(\mathbf{A})$ , и тем самым обеспечить максимальную точность получения решения системы (1). Другими словами, необходимо построить такую стратегию радиоконтроля орбиты, которой соответствует  $\min[\text{Cond}(\mathbf{A})]$  матрицы  $\mathbf{A}$ , составленный

из элементов при неизвестных в левой части системы (1).

В общем случае стратегия радиоконтроля орбиты характеризуется числом витков, на которых проводится измерение параметров движения спутника, их направленностью (геометрическими признаками) в зонах радиовидимости средств наблюдения, временным разнесением сеансов радиоконтроля. Стратегия радиоконтроля орбиты считается наилучшей, если соответствующая ей мера обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  достигает наименьшего значения –  $\min[\text{Cond}(\mathbf{A})]$ .

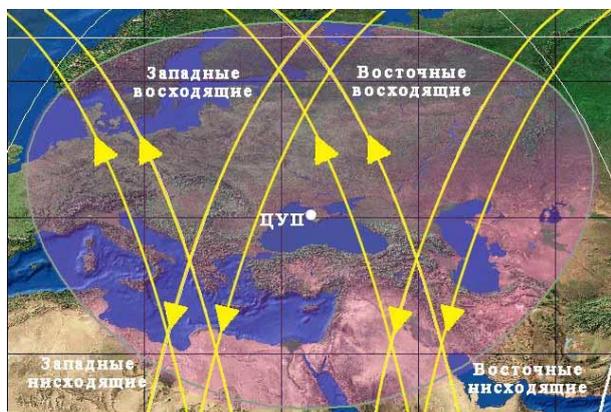


Рис. 1. Геометрия прохождения трасс орбит спутников в зоне радиовидимости пункта наблюдения

Исследования зависимости значений  $\text{Cond}(\mathbf{A})$  от числа сеансов радиоконтроля, количества точек измерений, геометрического признака витков, в совокупности характеризующих стратегию радиоконтроля орбиты, проводились на основе численных расчетов. Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3.

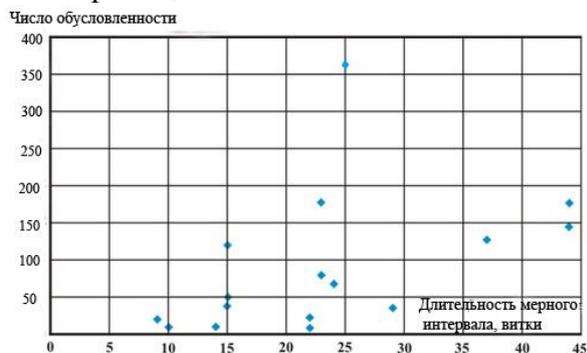


Рис. 2. Зависимость меры обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  от длительности мерного интервала (модельная измерительная информация)

Представленные на рис. 2, 3 данные свидетельствуют, что наименьшая мера  $\text{Cond}(\mathbf{A})$  обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  имеет место в среднем при 4-8 сеансах радиоконтроля (соответствующая длительность мерного интервала ~10-24 витков полета спутника) с различным направлением витков относительно пункта наблюдения.

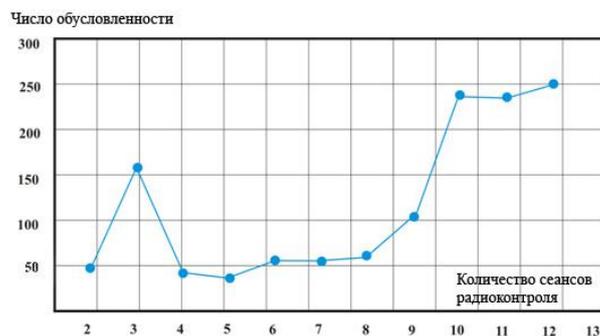


Рис. 3. Зависимость меры обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$  от числа сеансов радиоконтроля (реальная измерительная информация)

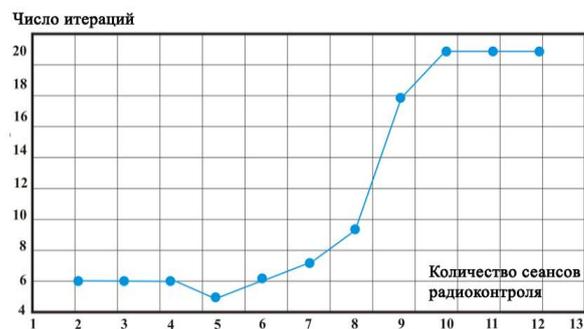


Рис. 4. Зависимость числа итераций при решении линейной системы (3) от количества сеансов радиоконтроля

С ростом числа сеансов радиоконтроля увеличивается численное значение меры  $\text{Cond}(\mathbf{A})$  обусловленности матрицы  $\mathbf{A}$ , как следствие, согласно (3) увеличиваются ошибки определения (уточнения) НУ движения спутника, растет число итераций (рис. 4) при решении линейной системы (1).

Очевидным выводом данного результата является следующее:

– при многопунктовой баллистической технологии (участвуют, например, четыре –

шесть пунктов измерений) достаточным является проведение измерений на одном (максимально на двух) витке орбиты. Использование более восьми сеансов радиоконтроля ведет к увеличению меры обусловленности  $\text{Cond}(\mathbf{A})$  матрицы  $\mathbf{A}$ , что на основании неравенства (3) может приводить к увеличению погрешности определения (уточнения) параметров орбит спутника;

– при однопунктовой технологии оптимальное число сеансов радиоконтроля от четырех до шести реализуется на суточном интервале полета спутника.

В дополнение к изложенному в следующем разделе анализируется влияние ряда других факторов на погрешность прогнозирования движения спутника. На условном примере представлено влияние увеличения длительности мерного интервала измерений на точность прогнозирования прямолинейного движения условного объекта, отражающее особенности многопунктовой и однопунктовой технологий.

#### **Анализ факторов, влияющих на точность прогнозирования движения спутников**

Основными факторами, влияющими на точность прогнозирования движения спутников, являются [4]:

- ошибки определения начальных условий движения спутников на основе измерительной информации;
- отличие фактических параметров атмосферы от принятых расчетных на интервале прогнозирования движения;
- упрощения модели движения спутника.

При равном числе сеансов радиоконтроля (в среднем по шесть) влияние на численное значение меры обусловленности  $\text{Cond}(\mathbf{A})$  матрицы  $\mathbf{A}$  определяется следующими факторами:

- существенно разной длительностью мерных интервалов, на которых проводят измерения, соответственно разными значениями производных, составляющих элементы матрицы  $\mathbf{A}$ :

- для многопунктовой технологии эти измерения сосредоточены компактно на одном (максимально на двух) витке полета спутника в течение 10-20 мин;
- для однопунктовой технологии сеансы радиоконтроля орбиты разнесены на суточном интервале;

– снижением "эквивалентных" ошибок измерений при использовании многопунктовой технологии (поскольку ошибки нескольких средств измерений априори одновременно не могут быть максимальными).

При влиянии первого фактора на точность прогнозирования движения спутника предпочтительным является применение однопунктовой технологии. Это обусловлено тем, что измерительная информация на суточном интервале полета спутника содержит данные об изменении его параметров орбиты на этом интервале (как результат влияния не известных при прогнозировании движения возмущений таких, как погрешности моделей гравитационного потенциала Земли, параметров атмосферы, т.д.).

Второй из приведенных факторов дает преимущество многопунктовой технологии.

Некоторое представление о влиянии увеличения интервала накопления информации на точность прогнозирования движения спутника дает представленный ниже условный пример (рис. 5).

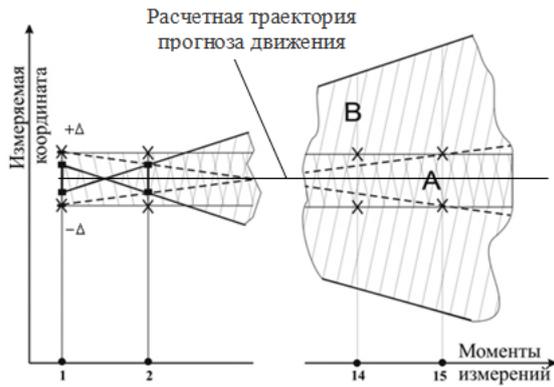


Рис. 5. Области неопределенности движения объекта:

**А и В** – области прямолинейного движения объекта по данным измерений в точках 1,2 -многопунктовая технология и в точках 1, 2, 14, 15-однопунктовая технология;

• • – моменты измерения ординаты положения объекта четырьмя пунктами радиоконтроля;

• • • • – моменты измерения одним средством наблюдения;

**а** – диапазон ошибок измерения одним средством наблюдения;  
**б** – диапазон «эквивалентных» ошибок измерений для четырех средств наблюдения;  
 $\pm \Delta$  – граничные значения ошибок измерения.

Условный пример касается определения областей прямолинейного движения объекта при прогнозировании его перемещения вдоль оси абсцисс (рис. 5) по результатам измерений ординаты его положения четырьмя средствами в моменты 1 и 2, и одним средством в моменты 1, 2, 14, 15. Возможные границы областей А и В прямолинейного движения объекта при двух вариантах измерения его ординат в разных точках на оси абсцисс приведены на рис. 5.

Как следует из рис. 5, увеличение мерного интервала в приведенном условном примере является эффективным средством уменьшения разброса границ областей возможного прямолинейного движения объекта.

### Точность прогнозирования полета

#### Критерий оценки точности

Согласно [1] ошибки прогнозирования

движения определяются следующими соотношениями:

$$\frac{\Delta r}{r_0} = k_{11} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{12} \frac{\Delta v_{r_0}}{w} + k_{13} \frac{\Delta v_{u_0}}{w};$$

$$\frac{\Delta v_r}{w} = k_{21} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{22} \frac{\Delta v_{r_0}}{w} + k_{23} \frac{\Delta v_{u_0}}{w};$$

$$\frac{\Delta v_u}{w} = k_{31} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{32} \frac{\Delta v_{r_0}}{w} + k_{33} \frac{\Delta v_{u_0}}{w};$$

$$\Delta u = k_{41} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{42} \frac{\Delta v_{r_0}}{w} + k_{43} \frac{\Delta v_{u_0}}{w} + k_{44} \Delta u_0;$$

$$\frac{z}{r_0} = k_{55} \frac{z_0}{r_0} + k_{56} \frac{v_{z_0}}{w}; \quad \frac{v_z}{w} = k_{65} \frac{z_0}{r_0} + k_{66} \frac{v_{z_0}}{w}.$$

Здесь  $k_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) – безразмерные коэффициенты, определяемые из выражений

$$k_{11} = 2 - \cos \varphi;$$

$$k_{12} = \sin \varphi;$$

$$k_{21} = \sin \varphi;$$

$$k_{22} = \cos \varphi;$$

$$k_{31} = -(1 - \cos \varphi);$$

$$k_{32} = -\sin \varphi;$$

$$k_{41} = -(3\varphi - 2 \sin \varphi);$$

$$k_{42} = -2(1 - \cos \varphi);$$

$$k_{13} = 2(1 - \cos \varphi);$$

$$k_{55} = \cos \varphi;$$

$$k_{23} = 2 \sin \varphi;$$

$$k_{56} = \sin \varphi;$$

$$k_{33} = -(1 - 2 \cos \varphi);$$

$$k_{65} = -\sin \varphi;$$

$$k_{43} = -(3\varphi - 4 \sin \varphi);$$

$$k_{66} = \cos \varphi;$$

$$k_{44} = 1,$$

где  $\varphi = \frac{V^*}{r} t$ ;  $V^*$  – первая космическая скорость;  $r$  – радиус круговой орбиты.

Как следует из приведенных соотношений, вековую составляющую имеют ошибки прогнозирования продольного движения космического аппарата (обусловлены увеличением угла  $\varphi$  с ростом времени). По двум другим направлениям (по радиус-вектору  $r$  положения КА и нормали  $z$  к плоскости орбиты) вековые составляющие отсутствуют – погрешности начального вектора состояния приводят к периодическим возмущениям движения в указанных направлениях.

#### Точность прогнозирования продольного движения космического аппарата

Эксплуатация однопунктовой баллистической технологии проводилась при баллистико-навигационном обеспечении полета национальных космических аппаратов "Січ-1" (1995-2000), "Січ-1М" "Микроспутник" (2004-2005), "МС-2-8" (2011-2012), египетского спутника EgyptSat-1 (2007-2010). По результатам эксплуатации построены графики уточнения времени движения спутников на недельном интервале полета [6-11].

На рис. 6 представлена общая картина изменения ошибки прогнозирования времени пересечения экватора  $\Delta T_{\text{экв}}$  на недельном временном интервале (~100 витков полета) в течение 4,5 мес. полета КА "Січ-1", обусловленная в основном погрешностью определения начальных условий движения по измерениям одного наблюдательного пункта и незнанием на интервале прогнозирования движения индексов солнечной активности  $F_{10.7}$  и магнитной возмущенности  $A_p$ . Некоторое увеличение ошибок  $\Delta T_{\text{экв}}$  обусловлено ростом численных значений индексов  $F_{10.7}$  и  $A_p$  в этот период.

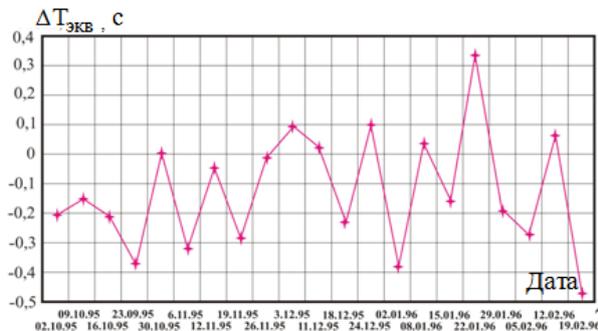


Рис. 6. Ошибки прогнозирования  $\Delta T_{\text{экв}}$  продольного движения КА "Січ-1"

Анализ двух баллистических технологий проведен посредством сравнения ошибок прогнозирования движения КА на недельном интервале его полета:

– на 6-недельном интервале запуска КА "Січ-1" при определении параметров орбиты ЦУПом ЦНИИмаша и ЦУПом в Евпатории (рис. 7);

– с привлечением материалов РФ по баллистико-навигационному обеспечению

(БНО) управления КА "Океан – ОЭ" (1983-1984), полет которого происходил в период солнечной активности, соответствующий моменту запуска КА "Січ-1" (рис. 8).

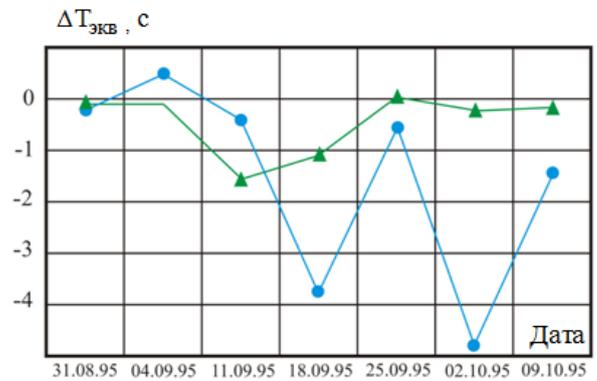


Рис. 7. Ошибки прогнозирования  $\Delta T_{\text{экв}}$  продольного движения КА "Січ-1" после запуска:

- ▲ – БЦ КБЮ, однопунктовая технология;
- – ЦУП ЦНИИмаша, многопунктовая технология.

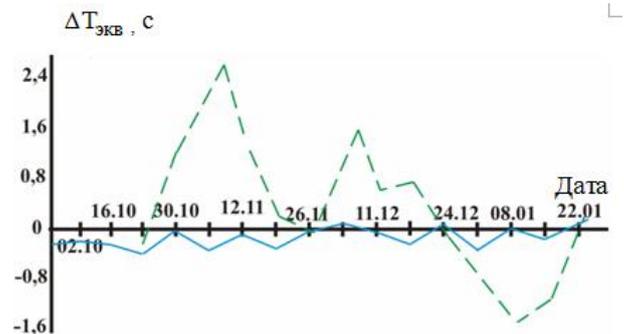


Рис. 8. Ошибки прогнозирования  $\Delta T_{\text{экв}}$  по времени на недельном интервале продольного движения КА "Січ-1" и "Океан-ОЭ":

- — — — — недельный цикл БНО КА "Січ-1" (1995-1996 гг., однопунктовая технология);
- — — — — недельный цикл БНО КА "Океан-ОЭ" (1983-1984 гг., многопунктовая технология).

По результатам полученных оценок  $\Delta T_{\text{экв}}^1$  и  $\Delta T_{\text{экв}}^2$  построен график (рис. 9) точности прогнозирования на недельном интервале времени полета спутника EgyptSat-1.

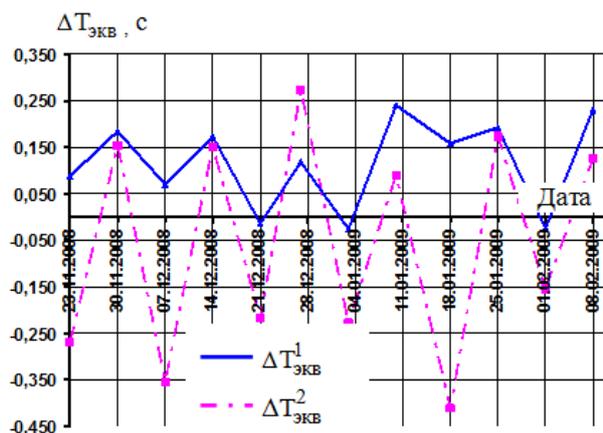


Рис. 9. Сравнительный анализ точности прогнозирования на недельном интервале времени прохождения спутником EgyptSat-1 восходящего узла орбиты

Сравнение представленных на рис. 9 графиков позволяет заключить, что точность прогнозирования на недельном интервале продольного движения спутника EgyptSat-1 по крайней мере не хуже (реально – лучше) точности прогнозирования продольного движения, обеспечиваемой средствами систем NORAD и STK. Некоторое смещение по оси ординат графика  $\Delta T_{ЭКВ}^1$  обусловлено отличием используемого в расчетах баллистического коэффициента от реализуемого в полете значения (уточнение баллистического коэффициента не проводилось).

### Заключение

Обоснована стратегия радиоконтроля орбиты одним пунктом наблюдения, и на ее основе построена однопунктовая баллистическая технология определения (уточнения) параметров орбит спутников.

На практике подтверждены высокие точностные характеристики однопунктовой баллистической технологии и устойчивость получения на длительных интервалах времени решений по уточнению параметров орбит спутников.

### Список использованной литературы

1. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли [Текст] / П.Э. Эльясберг. – М.: Наука, 1965. – 540 с., ил.

2. Брандин В.Н. и др. Основы экспериментальной космической баллистики [Текст] / В.Н. Брандин, А.А. Васильев, С.Т. Худяков; Под ред. Д.А. Погорелова. – М.: Машиностроение, 1974. – 340 с.

3. Жданюк Б. Ф. Основы статистической обработки траекторных измерений [Текст] / Б.Ф. Жданюк. – М.: Сов. радио, 1978. – 384 с., ил.

4. Иванов Н.М. Баллистика и навигация космических аппаратов [Текст] / Н.М. Иванов, А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лысенко. – М.: Машиностроение, 1986. – 296 с.

5. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений [Текст] / Дж. Форсайт, М. Малкольм, К. Моулер; Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 280 с.

6. Методика проведения исследований по оптимизации назначения сеансов радиоконтроля орбит КА [Текст]: Отчет НПВЦ "Южинтех-М". – 1996. – 47 с.

7. Однопунктовая баллистическая технология баллистико-навигационного обеспечения управления полетом КА "Січ-1" [Текст]: Отчет о НИР. – ГП "КБ "Южное", 1996. – 77 с.

8. Оптимизация планирования радиоконтроля орбиты КА "Січ-1" [Текст]: Отчет о НИР. – ГП "КБ "Южное", 1996. – 92 с.

9. Апостериорная оценка точности БНО полета КА "Січ-1" [Текст]: Отчет о НИР. – ГП "КБ "Южное", 1998. – 174 с.

10. Методика определения орбиты КА типа "Океан-О" по ИТНП системы "Куб-Контур": Науч.-техн. отчет. – ГП "КБ "Южное", 1996. – 66 с.

11. Программное обеспечение оптимизации планирования радиоконтроля орбиты: Науч.-техн. отчет. – ГП "КБ "Южное", 1996. – 130 с.

Статья поступила 18.12.2013