УДК 629.76.01

Д-р техн. наук В.С. Шеховцов, д-р техн. наук А.И. Шевцов

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА УГЛОВ АТАКИ БЛОКА ПРИ ЕГО ДВИЖЕНИИ В АТМОСФЕРЕ

Предложено приближенное решение дифференциального уравнения, описывающего нелинейные колебания блоков при их движении в атмосфере. Использование решения позволяет проводить аналитическую оценку углов атаки, необходимых для расчета максимальных нагрузок, действующих на блоки.

Запропоновано наближене рішення диференціального рівняння, що описує нелінійні коливання блоків при їх русі в атмосфері. Використання рішення дозволяє проводити аналітичну оцінку кутів атаки, необхідних для розрахунку максимальних навантажень, що діють на блоки.

The paper provides a solution of a differential equation describing nonlinear oscillations of units when moving within the atmosphere. This solution allows analytical study of angles of attack required for calculation of the maximum loads acting on units.

Одними из основных параметров, учитываемых при определении расчетных нагрузок на блок, являются максимальные углы атаки, возникающие при колебательном движении блока вокруг центра масс на атмосферном участке траектории. В общем случае значения этих углов определяются по результатам расчета сложной системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей пространственное движение блока в атмосфере.

На практике, с целью упрощения решения задачи, рассматривается такое движение блока, при котором плоскость угла атаки сохраняет неизменное положение. С учетом этого допущения общая система дифференциальных уравнений подразделяется на систему уравнений, описывающую движение центра масс блока в атмосфере и дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами, описывающее колебательные движения блока вокруг центра масс. Параметры движения центра масс блока и его углы атаки определяются при этом численным интегрированием этой системы уравнений.

Дальнейшее упрощение задачи можно получить за счет использования приближенного решения уравнения колебаний. Использование такого решения позволит избавиться при решении общей задачи от численного интегрирования нелинейного уравнения колебаний и обеспечит оперативный качественный анализ углов атаки колеблющегося блока.

Уравнения колебаний блока при неизменном положении плоскости его угла атаки запишем в виде

$$\ddot{\alpha} + A(t)\dot{\alpha} + B(t)C_n(\alpha) = 0\,, \qquad (1)$$

где

$$A(t) = \frac{qSl^2 m_\alpha}{JV}\,; \qquad (2)$$

$$B(t) = \frac{qSl(C_d - C_m)}{J}\,; \qquad (3)$$

$$C_n(\alpha) = kC_\alpha(\alpha)\,; \qquad (4)$$

C_n – коэффициент аэродинамического момента;
α – угол атаки;
S – площадь поперечного сечения блока;
m_α – коэффициент демпфирования;
V – скорость движения;
C_d – центр давления;
C_m – центр тяжести головной части;
q – скоростной напор;
l – длина головной части;
J – момент инерции относительно поперечной оси блока;
k – некоторый постоянный коэффициент.

Уравнение (1) представляет собой нелинейное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Аналитических решений уравнений такого типа в элементарных функциях не существует. Поэтому мы будем искать приближенное решение уравнения, исходя из предположения, что существует некоторое, пока неизвестное, дифференциальное уравнение, допускающее аналитическое решение и являющееся достаточно близким к решению уравнения (1).

Для получения приближенных решений используются асимптотические методы [1, 2], метод оценки с помощью функции Ляпунова и другие [3–5].

В рассматриваемом случае будем использовать метод, основанный на некотором обобщении метода решений уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, который по физической сущности аналогичен методу медленно меняющихся амплитуд (метод Ван-дер-Поля).

Предположим, что искомым дифференциальным уравнением является уравнение, решение которого имеет вид

$$f(\alpha) = Ce^{-\Phi(t)}\sin[\eta(t)+\delta], \tag{5}$$

где $f(\alpha)$, $\Phi(t)$, $\eta(t)$ – не известные пока функции.

Согласно нашему предположению, в силу близости уравнения (1) к уравнению, решение которого имеет вид (5), в некотором приближении можно считать, что решением уравнения (1) есть уравнение (5).

Продифференцируем дважды по времени уравнение (5), приняв

$$-\Phi(t) = \gamma(t). \tag{6}$$

Результат дифференцирования можно представить в виде

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{f'(\alpha)}Ce^{\gamma(t)}\{\dot{\gamma}(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \dot{\eta}(t)\cos[\eta(t)+\delta]\}^{*}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} f''(\alpha)\dot{\alpha}^2(t) + f'(\alpha)\ddot{\alpha}(t) &= Ce^{\gamma(t)}\{\ddot{\gamma}(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \\ &+ \dot{\gamma}^2(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \dot{\eta}(t)\dot{\gamma}(t)\cos[\eta(t)+\delta] + \\ &+ \dot{\eta}(t)\dot{\gamma}(t)\cos[\eta(t)+\delta] - \dot{\eta}^2(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \ddot{\eta}(t)\cos[\eta(t)+\delta]\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставив уравнение (7) в уравнение (8), найдем

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}(t) &= \frac{1}{f'(\alpha)}Ce^{\gamma(t)}\{\ddot{\gamma}(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \dot{\gamma}^2(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \\ &+ 2\dot{\gamma}(t)\dot{\eta}(t)\cos[\eta(t)+\delta] - \dot{\eta}^2(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \\ &+ \ddot{\eta}(t)\cos[\eta(t)+\delta]\} - \frac{f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2}\dot{\alpha}(t)e^{\gamma(t)}C \times \\ &\times \{\dot{\gamma}(t)\sin[\eta(t)+\delta] + \dot{\eta}(t)\cos[\eta(t)+\delta]\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Подставив в уравнение (1) уравнения (7), (9), умножив и разделив третий член уравнения (1) на уравнение (5) после несложных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f'(\alpha)}Ce^{\gamma(t)}\left[\ddot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}^2(t) - \dot{\eta}^2(t) - \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\dot{\alpha}(t)\dot{\gamma}(t) + \right. \\ &\left. + \dot{\gamma}(t)A(t) + \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}kB(t)C_a(\alpha)\right]\sin[\eta(t)+\delta] + \\ &+ \frac{1}{f'(\alpha)}Ce^{\gamma(t)}[2\dot{\gamma}(t)\dot{\eta}(t) + \ddot{\eta}(t) - \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\dot{\alpha}(t)\dot{\eta}(t) + \\ &+ \dot{\eta}(t)A(t)]\cos[\eta(t)+\delta] = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

---

* Здесь и в дальнейшем производная по α обозначена штрихом, производная по времени – точкой.

Из уравнения (10), ввиду линейной независимости функций $\sin[\eta(t)+\delta]$ и $\cos[\eta(t)+\delta]$, получим:

$$\ddot{\gamma}(t)+\dot{\gamma}^2(t)-\dot{\eta}^2(t)-\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\dot{\alpha}(t)\dot{\gamma}(t)+$$

$$+\dot{\gamma}(t)A(t)+\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)}kB(t)C_a(\alpha)=0; \tag{11}$$

$$2\dot{\gamma}(t)\dot{\eta}(t)+\ddot{\eta}(t)-\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\dot{\alpha}(t)\dot{\eta}(t)+\dot{\eta}(t)A(t)=0\,. \tag{12}$$

Подставив уравнение (12) в уравнение (11) и использовав обозначения (6), будем иметь систему уравнений

$$\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\dot{\alpha}(t)+2\dot{\Phi}(t)-\frac{\ddot{\eta}(t)}{\dot{\eta}(t)}=A(t); \tag{13}$$

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\left[\dot{\Phi}^2(t)+\ddot{\Phi}(t)-\frac{\ddot{\eta}(t)}{\dot{\eta}(t)}\dot{\Phi}(t)+\dot{\eta}^2(t)\right]=C_a(\alpha)kB(t)\,. \tag{14}$$

Таким образом, для того чтобы уравнение (5) было решением нелинейного уравнения (1), необходимо, чтобы функции $f(\alpha)$, $\Phi(t)$, $\eta(t)$ удовлетворяли системе уравнений (13), (14).

Уравнение (13) легко решается, так как левая часть уравнения есть первая производная некоторой функции

$$\psi(t)=\ln\left[\frac{1}{\dot{\eta}(t)}f'(\alpha)e^{2\Phi(t)}\right]. \tag{15}$$

Продифференцировав уравнение (15) и подставив его в уравнение (13), получим

$$\psi(t)=\int A(t)dt+C_1\,. \tag{16}$$

Получение точного решения уравнения (14) проблематично. Приближенное решение можно получить, если учесть, что функции $A(t)$ и $B(t)$ являются медленно меняющимися функциями.

Предположим, что

$$\dot{\Phi}^2(t)+\ddot{\Phi}(t)-\frac{\ddot{\eta}(t)}{\dot{\eta}(t)}\dot{\Phi}(t)<<\dot{\eta}^2(t)\,. \tag{17}$$

Тогда уравнение (14) можно записать в виде

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}\dot{\eta}^2(t)=C_a(\alpha)kB(t)\,. \tag{18}$$

Если считать, что

$$\dot{\eta}^2(t)=kB(t), \tag{19}$$

то из уравнения (18) следует

$$\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}=C_a(\alpha). \tag{20}$$

Уравнения (19), (20) легко решаются:

$$f(\alpha)=C_2\exp\left(\int\frac{d\alpha}{C_a(\alpha)}\right); \tag{21}$$

$$\eta(t)=\varphi(t)+C_3\,, \tag{22}$$

где $\varphi(t)=\sqrt{k}\int\sqrt{B(t)}dt$.

Функция $e^{\Phi(t)}$ определяется из уравнения (15)

$$e^{\Phi(t)}=\left[\frac{C_a(\alpha)}{f(\alpha)}\sqrt{k}\sqrt{B(t)}e^{\psi(t)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Для получения общего решения уравнения представим уравнение (5) в виде:

$$f(\alpha)e^{\Phi(t)}=C\sin\varphi(t)\cos\bar{k}+C\cos\varphi(t)\sin\bar{k}\,, \tag{24}$$

где $\bar{k}=C_3+\delta$ – произвольная постоянная величина.

Или

$$f(\alpha)e^{\Phi(t)}=E\sin\varphi(t)+F\cos\varphi(t), \tag{25}$$

где $E=C\cdot\cos\bar{k}$;

$F=C\cdot\sin\bar{k}$.

Для определения произвольных постоянных, входящих в уравнение (25), воспользуемся условиями:

при $t=0$ $\quad\alpha=\alpha_0\,,\dot{\alpha}=\dot{\alpha}_0\,.$ (26)

Из уравнения (25) и условий (26) имеем

$$F=f(\alpha_0)e^{\Phi(0)}\,. \tag{27}$$

Из уравнения

$$f'(\alpha)\dot{\alpha}e^{\Phi(t)}+f(\alpha)\dot{\Phi}(t)e^{\Phi(t)}=$$

$$= \dot{\varphi}(t[E\cos\varphi(t) - F\sin\varphi(t)]$$

с учетом предположения (17) и условия (15) имеем

$$E = \frac{e^{\psi(0)}}{e^{\Phi(0)}}\dot{\alpha}_0 . \qquad (28)$$

Подставив постоянные (27), (28) в уравнение (25), получим

$$f(\alpha)e^{\Phi(t)} = f(\alpha_0)e^{\Phi(0)} \cdot \cos\varphi(t) + $$
$$+ \frac{e^{\psi(0)}}{e^{\Phi(0)}}\dot{\alpha}_0 \sin\varphi(t) . \qquad (29)$$

Представим уравнение (29) в виде

$$f(\alpha)e^{\Phi(t)} = M\sin[\varphi(t) + \delta_1], \qquad (30)$$

где $M = \sqrt{f^2(\alpha_0)e^{2\Phi(0)} + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{e^{2\Phi(0)}}e^{2\psi(0)}}$;

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}\frac{f(\alpha_0)e^{2\Phi(0)}}{\dot{\alpha}_0 e^{\psi(0)}} .$$

В уравнениях (16), (21) C_1, C_2 представляют собой произвольные постоянные интегрирования

$$C_1 = -\int A(t)dt\Big|_{t=0} ,$$
$$C_2 = 1 .$$

Из уравнений (16), (21) получаем

$$f(\alpha) = \exp\int\frac{d\alpha}{C_a(\alpha)} ; \qquad (31)$$

$$\psi(t) = \int_0^t A(t)dt . \qquad (32)$$

Если аппроксимировать функцию $C_a(\alpha)$ функцией $\sin\alpha$ (рис. 1), из уравнений (23), (31) можно получить

$$f(\alpha) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} , \qquad (33)$$

$$e^{\Phi(t)} = \cos\frac{\alpha}{2}\left[2\sqrt{k}\sqrt{B(t)}e^{\psi(t)}\right]^{\frac{1}{2}} . \qquad (34)$$

Общее решение уравнения (1) при сделанных предположениях с учетом уравнений (30-34) и обозначений (2), (3) при $m_\alpha = \overline{m}_\alpha = \text{const}$ можно представить в виде

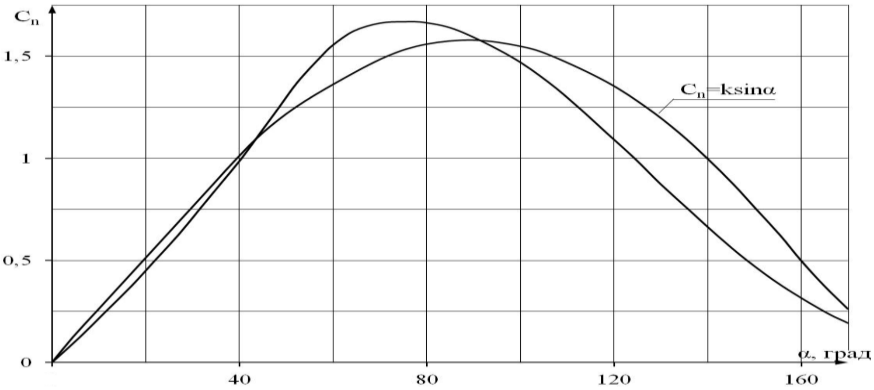
$$\sin\frac{\alpha}{2} = Ne^{-\frac{1}{2}\int_0^t A(t)dt}\left[\frac{qSl(C_d - C_m)}{J}\right]^{-\frac{1}{4}}\sin[\varphi(t) + \delta_1], \qquad (35)$$

$$\text{где } N = \sqrt{\begin{aligned}&\sin^2\frac{\alpha_0}{2}\sqrt{\frac{1}{J_0}q_0S_0l_0(C_d - C_{m0})} + \\ &+\dot{\alpha}_0\left[4k\cos^2\frac{\alpha_0}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{J_0}q_0S_0l_0(C_d - C_{m0})}\right]\end{aligned}} ; \qquad (36)$$

$$\delta_1 = \operatorname{arctg}\left[\frac{\sin\alpha_0}{\dot{\alpha}_0}\sqrt{\frac{1}{J}kq_0S_0l_0(C_d - C_{m0})}\right] . \qquad (37)$$

Второе приближение решения уравнения (1) можно получить, подставляя уравнения (22), (34) в уравнение (14) и полагая $\ddot{\Phi} = 0$. Однако как показывают результаты многочисленных расчетов, решение с использованием первого приближения (35-37) с большой степенью точности совпадает с результатами численного интегрирования (рис. 2).

На рис. 2 в качестве примера приведены результаты расчета огибающей амплитуд колебаний блока, полученные численным интегрированием и с использованием приближенного аналитического решения уравнения колебаний. Из рисунка следует, что огибающие амплитуд максимальных углов атаки блока достаточно близки. Как показали результаты многочисленных расчетов, отличие огибающей, полученной с использованием приближенного решения, от огибающей, полученной численным решением, составляет ~ 1-2%, что вполне приемлемо при проведении проектных расчетов.



$$C_n = k \cdot C_\alpha(\alpha)$$

$$C_\alpha(\alpha) = \sin\alpha$$

Рис. 1. Изменение коэффициента нормальной силы C_n от угла атаки

(C_n отнесен к площади миделя головной части)

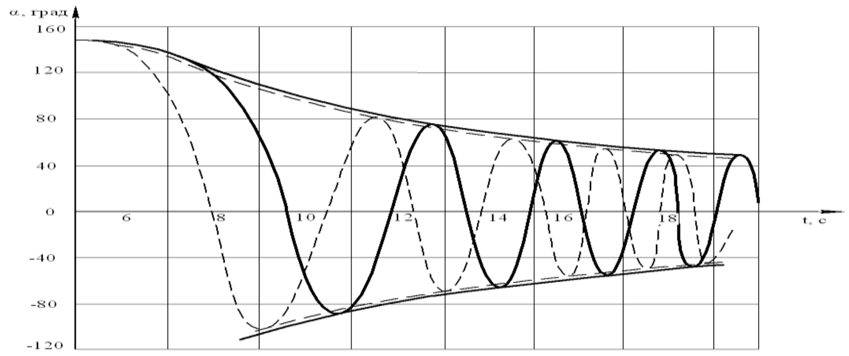


Рис. 2. Сравнение результатов численного решения с приближенным аналитическим решением нелинейного уравнения колебаний

Для линейного случая ($0 < \alpha_0 < 40^\circ$)

$$f[\alpha(t)] = \alpha(t);$$
$$C_n(\alpha) = n\alpha;$$
$$n = \text{const}. \qquad (38)$$

При условии (38) система уравнений (13), (14) будет иметь вид

$$2\dot{\Phi}(t) - \frac{\ddot{\eta}(t)}{\dot{\eta}(t)} = A(t); \qquad (39)$$

$$\dot{\Phi}^2(t) + \ddot{\Phi}(t) - \frac{\ddot{\eta}(t)}{\dot{\eta}(t)}\dot{\Phi}(t) + \dot{\eta}^2(t) = nB(t). \qquad (40)$$

Решая систему уравнений (39), (40) так же, как и систему (13), (14), получим общее решение уравнения (1) для линейного случая в виде

$$\alpha(t) = Te^{-\frac{1}{2}\int A(t)dt}\sqrt[4]{\frac{q_0}{q}}\sin\left(n\int_0^t \sqrt{B(t)}dt + \delta\right), \qquad (41)$$

при $\dot{\alpha} = 0$

выражение $\frac{1}{J} nsl(C_d - C_m) = \text{const}$.

Список использованной литературы

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – 4-е изд. – М.: Наука, 1974.
2. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1984.
3. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959.
4. Найфэ А. Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984.
5. Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1975.

Статья поступила 26.06.2014