УДК 531.551:629.764

Канд. техн. наук Э.П. Компаниец, д-р техн. наук Н.М. Дронь,
Е.Ю. Баранов, Н.Г. Литвин

ПОСТРОЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Проведен анализ существующих методов выбора траекторий ракет-носителей при выведении искусственных спутников Земли при упрощенном представлении гравитационного поля Земли.

Предложен обобщенный метод выбора пространственных траекторий полета ракет-носителей в центральном гравитационном поле при запусках искусственных спутников Земли для случаев трехмерного пространственного перехода.

Проведено аналіз існуючих методів вибору траєкторій ракет-носіїв під час виведення штучних супутників Землі за спрощеного подання гравітаційного поля Землі.

Запропоновано узагальнений метод вибору просторових траєкторій польоту ракет-носіїв у центральному гравітаційному полі під час запусків штучних супутників Землі для випадків тривимірного просторового переходу.

The paper presents the analysis of the existing methods to select trajectories of launch vehicles for injection of Earth artificial satellites into orbit with simplified representation of the terrestrial gravitational field.

In the paper we propose use of the generalized method to select three-dimensional trajectories of launch vehicles flight in central gravitational field at launch of artificial Earth satellites for three-dimensional spatial transition.

Вопросы выбора активных траекторий ракет-носителей космических аппаратов в основном решены и освещены в печати. Не останавливаясь на подробной истории постановки и решения этой задачи, отметим, что в ранних работах, посвященных выбору траекторий ракет, как правило, рассматривались частные случаи проблемы и использовались определенные приближения, что является обычным для начального периода разработки нового раздела любой теории [1-8].

Укажем следующие обычно используемые приближения:

– пренебрежение зависимостью силы земного притяжения от высоты;

– замена центрального гравитационного поля плоскопараллельным;

– разложение центрального гравитационного поля в ряд с последующим исключением членов высших порядков малости;

– пренебрежение силой сопротивления внешней среды;

– пренебрежение углами атаки и др.

При использовании подобных допущений были получены решения в виде конечных или дифференциальных зависимостей, позволяющих проводить расчеты экстремальных, с точки зрения энергетики, траекторий для решения ряда конкретных практических задач.

Сделанные предположения существенно сужают область применения полученных результатов. Поэтому, несмотря на то, что практика проектирования ракет-носителей приводит к необходимости учета в каждом отдельном случае конкретных практических целей, возможностей и условий, ряд новых задач требует разработки общих принципов выбора траекторий ракет-носителей.

Уже при расчете траекторий, на отдельных участках которых ракета-носитель движется с выключенным или задросселированным двигателем, возникает необходимость в более общей постановке проблемы. Другими задачами, требующими разработки решения в общем виде, являются:

– расчет пространственных траекторий космических ракет-носителей, использующих двигатели малой тяги;

– выбор оптимальных траекторий при встрече двух ракет-носителей (встреча со спутниками Земли);

– уничтожение спутников противника военного назначения;

– выбор оптимальных траекторий в гравитационном поле двух и более планет и т.п.

Из работ, посвященных решению задачи выбора траекторий ракет-носителей в общем виде, стоит отметить работу Лоудена. Остановимся на основных вопросах этой работы. Постановка задачи: в гравитационном поле, определяемом потенциальной функцией общего вида

$$\Phi = \Phi\left(x_1, x_2, x_3, t\right),$$

при наличии сил сопротивления среды, также заданных в общем виде:

$$F_i = F_i\left(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \ell_1, \ell_2, \ell_3, m, t\right),$$

определить траекторию ракеты-носителя, обеспечивающую максимум полной механической энергии центра масс ракеты в момент полного выгорания топлива. Как видно, автор с самого начала обходит практический вопрос обеспечения в момент выключения двигателя заданных значений динамических параметров центра масс ракеты-носителя. Следствием такого подхода является необходимость выполнения отдельных требований, применение которых на практике оказывается нецелесообразным (например, требование коллинеарности векторов тяги двигателя и скорости центра масс ракеты-носителя в момент выключения двигателя).

Записываем выражение полной энергии, отнесенной к единице массы ракеты-носителя, через динамические параметры центра масс ракеты в конце активного участка

$$E = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2\right) + \Phi$$

и из условия

$$\delta E = 0$$

определяем траекторию, обеспечивающую максимум E.

В дальнейшем с целью исключения недостатков постановки задачи автор применяет ряд искусственных приемов (расчет траектории "с конца", повторение расчетов с различным запасом топлива), однако в целом ввиду неудачной постановки задачи и громоздкости решения метод не может считаться практически удобным и наглядным. Работа имеет теоретическое значение. Она содержит принципиальное доказательство возможности расчета траектории, обеспечивающей максимум полной энергии ракеты-носителя при движении в любом гравитационном поле, при наличии среды, оказывающей сопротивление движению.

Следует отметить, что результаты работ, посвященных принципам выбора вектора тяги двигателя, не могут быть применены в том частном и практически важном случае, когда тяга двигателя является заданной функцией времени и выбору подлежит только направление тяги. Покажем это на примере работ.

В работе показано, что при движении в пустоте между двумя конечными точками, скорость в которых задана, наименьший расход массы соответствует траекториям, на которых имеет место минимум интеграла

$$\int_{t_0}^{t_K} \left|\dot{\bar{w}}\right| dt, \qquad (1)$$

где $\dot{\bar{w}} = \bar{P}/m$ – реактивное ускорение.

Автор показывает, что непосредственное решение вариационной задачи на минимум функционала (1) приводит к частному решению, когда направление тяги стационарно на всем интервале времени полета и граничные условия не могут быть удовлетворены. Для получения общего решения автор рассматривает интеграл вида

$$\int_{t_0}^{t_K} \sqrt{\left|\dot{\bar{w}}\right|^2 + \varepsilon^2}\, dt,$$

требуя в конечном результате $\varepsilon \Rightarrow 0$.

Найденное решение является доказательством необходимости использования пассивных траекторий с импульсным приложением тяги в определенных точках.

При перемещении тела переменной массы за время t между двумя заданными точками (с заданными скоростями) наименьший расход массы соответствует траекториям, для которых имеет место минимум интеграла

$$\int_o^T \dot{w}^2 dt.$$

При анализе общего решения неизменно возникают трудности, которые можно продемонстрировать на следующем примере.

В случае движения в бессиловом поле вектор реактивного ускорения должен быть линейной функцией времени

$$\dot{\bar{w}} = \bar{b}_1 t + \bar{b}_2, \qquad (2)$$

причем постоянные b_1 и b_2 определяются из граничных условий. Это означает, что компоненты вектора $\dot{\bar{w}}$ также являются линейными функциями времени. В инерциальной декартовой системе координат Ox_1, x_2, x_3 имеем

$$\dot{\bar{w}}_2 = \frac{P}{m}\ell_i = b_{1i}t + b_{2i};\ \ i=1, 2, 3. \qquad (3)$$

Покажем, что в случае, когда тяга двигателя и секундный расход массы ракеты постоянны, решения (2), (3) не являются общими и не могут удовлетворять граничным условиям.

Действительно, зависимость массы ракеты от времени имеет вид

$$m = m_o + \dot{m}t\,. \qquad (4)$$

На функции ℓ_i (i = 1, 2, 3) и их производные по времени наложены следующие очевидные связи:

$$\sum_{i=1}^{3}\ell_i^2 = 1; \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\ell_i\cdot\dot{\ell}_i = 0; \qquad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{\ell}_i + \ell_i\cdot\ddot{\ell}_i\right) = 0\,. \qquad (7)$$

Подставляя выражение (4) в зависимость (3), получаем

$$\ell_i = \ell_{io} + \dot{\ell}_{io}t + \frac{\ell}{2}\ddot{\ell}_{io}t^2, \qquad (8)$$

где
$$\ell_{io} = \frac{b_{2i}m_o}{P}; \qquad (9)$$

$$\dot{\ell}_{io} = \frac{b_{1i}m_0 + b_{2i}\dot{m}}{P}; \qquad (10)$$

$$\ddot{\ell}_{io} = \frac{2\dot{m}b_{1i}}{P}. \qquad (11)$$

Подставив полученную зависимость (8) в уравнение связи (5), находим

$$\sum_{i=1}^{3}\ell_i^2 = \sum_{i=1}^{3}\ell_{io}^2 + 2t\sum_{i=1}^{3}\ell_{io}\dot{\ell}_{io} + t^2\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{\ell}_{io}^2 + \ell_{io}\ddot{\ell}_{io}\right) + t^3\sum_{i=1}^{3}\left(\dot{\ell}_{io}\ddot{\ell}_{io}\right) + \frac{1}{4}t^4\sum_{i=1}^{3}\ddot{\ell}_{io}^2 = 1\,. \qquad (12)$$

Используя уравнения связей (5), (6), (7) и выражения (9), (10), (11), из зависимости (12) получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} b_{2i}^2 = \dfrac{P^2}{m_o^2}, \\ m_o\sum_{i=1}^{3} b_{2i}\left(m_o b_{1i} + \dot{m}b_{2i}\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{3}\left(m_o b_{1i} + \dot{m}b_{2i}\right)^2 + 2m_o\dot{m}\sum_{i=1}^{3} b_{1i}b_{2i} = 0, \\ \dot{m}\sum_{i=1}^{3} b_{1i}\left(m_o b_{1i} + \dot{m}b_{2i}\right) = 0, \\ \dot{m}^2\sum_{i=1}^{3} b_{1i}^2 = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Уравнения (13) совместимы в том и только в том случае, если $\dot{m} = b_{1i}$ (i=1, 2, 3) равны нулю одновременно. Отсюда следует, что

$$\dot{w}_i = \frac{P}{m_o}\ell_i = b_{2i}$$

и
$$\dot{w} = \bar{b}_2 = \text{const}\,.$$

Как и в случае минимума интеграла (1), мы получили частное решение, которое не может удовлетворять граничным условиям. Очевидно, что это решение не имеет практического значения, так как описывает движение точки постоянной массы под действием неизменно направленной силы.

Одним из способов, позволяющих найти решение задачи выбора программы направления тяги в общем виде, является использование известного вариационного метода неопределенных множителей Лагранжа. Этот метод применяется различными авторами в различных вариантах, отличающихся друг от друга главным образом видом исследуемого функционала, характеризующего оптимизируемый параметр. Остановимся коротко на вариантах, использованных независимо друг от друга в указанных работах. Отметим общие черты этих исследований.

Рассмотрен интеграл вида

$$m_o - m = -\int_{t_0}^{t_K} \dot{m} dt ,$$

где масса m – заранее заданная функция времени, причем вместо параметра m может быть подставлен любой другой оптимизируемый параметр, зависящий от формы траектории. Так как этот интеграл является неявным функционалом координат, составляющих скорости и направляющих косинусов вектора тяги, то он может быть заменен эквивалентным функционалом

$$m_o - m_k = \int_{t_0}^{t} \left(\dot{m} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \omega_i \right) dt , \qquad (14)$$

учитывающим связи ω_i, наложенные на координаты, составляющие скорости и направляющие косинусы вектора тяги. Здесь λ_i – некоторые функции времени.

Траекторию, обеспечивающую экстремум интеграла (14), находим из условия

$$\delta(m_o - m_k) = 0,$$

где δ означает варьирование по всем координатам, составляющим скорости, направляющим косинусам вектора тяги и верхнему пределу интегрирования. В результате получаются зависимости, позволяющие рассчитать такую программу направления тяги двигателя, которая обеспечивает экстремум параметра в каждой точке траектории, а также связи между кинематическими параметрами движения на границах рассматриваемого отрезка времени.

В работе исследование движения ведется в инерциальной декартовой системе координат. Это позволяет получить простые граничные условия в случае, если выбирают траекторию перехода из одной точки пространства с заданным вектором скорости в другую точку пространства с заданным вектором скорости.

В наиболее часто встречающихся на практике случаях выведения ракеты-носителя на орбиту в центральном гравитационном поле использование инерциальной декартовой системы координат нецелесообразно. Общеизвестно, что удачный выбор системы координат, несмотря на возможную громоздкость промежуточных выкладок, может обеспечить компактность решения, наглядность и простоту анализа полученных результатов, а в ряде случаев – и упрощение расчетов. Поэтому в работе применяется сферическая система координат и система координат, связанная с центром масс ракеты. Это дает возможность упростить выбор граничных условий и в несколько раз сократить объем числовых расчетов.

Наша задача – обобщить метод выбора пространственных траекторий в центральном гравитационном поле при запусках искусственных спутников на орбиты для случая трехмерного пространственного перехода.

Выбор траектории ракеты-носителя космического летательного аппарата в центральном гравитационном полете

Выбор траектории ракеты-носителя искусственного спутника Земли, в случае если малая протяженность активного участка траектории позволяет ограничиться анализом движения в плоскопараллельном гравитационном поле, сделан и освещен в печати. Например, выбор траектории ракеты-носителя искусственного спутника Земли, в случае если протяженность активного участка не позволяет ограничиться плоскопараллельным гравитационным полем и возникает необходимость рассмотреть центральное поле в некоторой окрестности точки старта, подробно исследован в известной работе Д.Е. Охоцимского и Т.М. Энеева.

В связи со значительным увеличением протяженности активного участка траекторий ракет-носителей космических летательных аппаратов и возможностью использовать боковые маневры ракет-носителей, появилась необходимость в продолжении работы по исследованию вопросов выбора траектории при выведении космического летательного аппарата на орбиту.

Рассмотрим задачу выведения ракеты-носителя на заданную орбиту, плоскость которой не проходит через точку старта при неограниченной протяженности активного участка траектории.

Рассмотрим движение ракеты-носителя космического летательного аппарата в гравитационном поле планеты.

Будем считать, что траектория ракеты-носителя в пространстве определена, если получена замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающих движение центра масс ракеты-носителя, и выбраны начальные условия интегрирования этой системы, обеспечивающие достижение заданных кинематических параметров (координаты, вектор скорости) центра масс ракеты-носителя.

Ограничимся случаем, когда масса ракеты-носителя и тяга двигателя являются заданными функциями времени.

Найдем траекторию, обеспечивающую при заданных кинематических параметрах начала траектории максимальный конечный вес ракеты-носителя в момент выхода в заданную точку пространства с заданным вектором скорости; на заданную орбиту, плоскость которой не проходит через точку старта ракеты-носителя. Очевидно, последний случай соответствует выбору траектории встречи со спутником планеты.

Задачу будем решать при следующих упрощающих предположениях:

1) планета представляет собой шар с радиально распределенной плотностью массы;

2) линейные размеры ракеты-носителя незначительны по сравнению с расстоянием ее до центра планеты;

3) сопротивление среды отсутствует;

4) составляющая силы тяги, расходуемая на управление, пренебрежимо мала по сравнению с общим значением тяги;

5) система ориентации ракеты-носителя в пространстве работает идеально – тяга двигателя всегда совпадает с программным направлением тяги.

Гравитационное поле сферической планеты с радиально распределенной плотностью массы представляет собой центральное поле, определяемое потенциалом

$$\Phi = k/r\,, \qquad (15)$$

где $k=fM$.

Учитывая незначительность линейных размеров ракеты-носителя по сравнению с расстоянием ее до центра планеты, будем полагать, что ракета-носитель притягивается как материальная точка с массой, равной массе ракеты-носителя.

Сделанные предположения позволяют свести задачу к рассмотрению пространственного движения материальной точки переменной массы m в центральном гравитационном поле с потенциалом (15) под воздействием некоторой силы, возникающей вследствие отброса массы. Масса m и абсолютная величина силы P являются заданными функциями времени.

Функции P(t) и m(t) ограничены, на функцию m(t) , кроме того, наложены следующие условия:

$$\dot m \le 0,$$

$$m \ne 0.$$

Задача состоит в определении такой программы изменения направления силы P по времени, которая обеспечит минимальное значение интеграла

$$m_o - m_k = \int_{t_0}^{t_k} -\dot m dt\,, \qquad (16)$$

где t_0 – момент старта из заданной точки с заданным вектором скорости;

t_k – момент выхода в заданную точку пространства с заданным вектором скорости или момент выхода на заданную орбиту.

Уравнения движения в центральном поле. Векторное уравнение движения точки переменной массы под действием силы, связанной с отбросом массы, имеет вид

$$m\dot V = \overline{\mathrm{P}} + \sum \overline{\mathrm{F}}, \qquad (17)$$

где $\sum \overline{\mathrm{F}}$ – равнодействующая внешних сил. В рассматриваемом случае равнодействующая внешних сил равна силе тяжести.

Запишем уравнение (17) в проекциях на оси орбитальной системы координат.

При предположениях, оговоренных в постановке задачи, получаем

$$\ddot x_1 = \frac{P}{m}\ell_x - k\frac{x_i}{r^3}\,;$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{P}{m}\ell_y - k\frac{y_i}{r^3}; \tag{18}$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{P}{m}\ell_z - k\frac{z_i}{r^3}.$$

Система (18) будет замкнута, если задать зависимости параметров P, m, l_x, l_y, l_z от времени.

Спроектируем уравнение (17) на оси связанной системы координат.

Вектор скорости в проекциях на оси связанной системы координат будет иметь вид

$$\overline{V} = V_S\overline{S}^o + V_T\overline{T}^o.$$

Дифференцируя это выражение по времени, получаем

$$\dot{\overline{V}} = \dot{V}_S \cdot \overline{S}^o + \dot{V}_T\overline{T}^o + V_S\dot{\overline{S}}^o + V_T\overline{T}^o. \tag{19}$$

Производные от единичных векторов $\overline{\mathrm{S}}^{\mathrm{o}}, \overline{\mathrm{T}}^{\mathrm{o}}, \overline{\mathrm{W}}^{\mathrm{o}}$ по времени равны:

$$\begin{cases} \dot{\overline{S}}^o = -\left(\Omega_T\overline{W}^o - \Omega_W\overline{T}^o\right), \\ \dot{\overline{T}} = -\left(\Omega_W\overline{S}^o - \Omega_S\overline{W}^o\right), \\ \dot{\overline{W}} = -\left(\Omega_S\overline{T}^o - \Omega_T\overline{S}^o\right). \end{cases} \tag{20}$$

Проекции Ω_S, Ω_T, Ω_W связаны с параметрами δ, γ, χ следующими очевидными зависимостями:

$$\begin{cases} \Omega_S = \dot{\chi}, \\ \Omega_T = \dot{\delta}\cos\gamma \cdot \sin\chi + \dot{\gamma}\cos\chi, \\ \Omega_W = \dot{\delta}\cos\gamma \cdot \cos\chi - \dot{\gamma}\sin\chi. \end{cases}$$

Подставляя в эти зависимости формулы, находим

$$\begin{cases} \Omega_S = \dot{\chi}, \\ \Omega_T = 0, \\ \Omega_W = V_T/r. \end{cases} \tag{21}$$

Подставляя выражения (21) в формулы (20) для производных единичных векторов, определяющих положение осей связанной системы, находим

$$\begin{cases} \dot{\overline{S}}^o = \dfrac{V_T}{r} \cdot \overline{T}^o, \\ \dot{\overline{T}}^o = \dot{\chi}\,\overline{W}^o - \dfrac{V_T}{r} \cdot \overline{S}^o, \\ \dot{\overline{W}}^o = -\dot{\chi}\,\overline{T}^o. \end{cases} \tag{22}$$

Используя выражения (22), из формулы (19) получаем разложение вектора ускорения по осям связанной системы координат

$$\dot{\overline{V}} = \left(\dot{V}_S - \frac{V_T^2}{r}\right) \cdot \overline{S}^o + \left(\dot{V}_T + \frac{V_S V_T}{r}\right) \cdot \overline{T}^o + \dot{\chi} \cdot V_T \cdot \overline{W}^o. \tag{23}$$

Разлагая вектор $\overline{\mathrm{P}}$ по осям связанной системы координат, находим

$$\overline{P} = P\ell_S\overline{S}^o + P\ell_T\overline{T}^o + P\ell_W\overline{W}^o. \tag{24}$$

Равнодействующая внешних сил в рассматриваемом случае

$$\sum\overline{F} = m\left(\frac{\partial\Phi}{\partial S}\overline{S}^o + \frac{\partial\Phi}{\partial T}\overline{T}^o + \frac{\partial\Phi}{\partial W}\overline{W}^o\right) = -\frac{mk}{r^2}\overline{S}^o. \tag{25}$$

Подставляя выражения (23, 24, 25) в уравнение (17) и приравнивая соответствующие проекции вектора на оси связанной системы координат, получаем

$$\begin{cases} \dot{V}_S = \dfrac{V_T^2}{r} + \dfrac{P}{m}\ell_S - \dfrac{k}{r^2}, \\ \dot{V}_T = -\dfrac{V_S V_T}{r} + \dfrac{P}{m}\ell_T, \\ \dot{\chi} = \dfrac{P}{V_T m}\ell_W. \end{cases} \tag{26}$$

Полученная система будет замкнута, если к уравнениям (26) добавить кинематические соотношения и задать зависимости параметров P, m, ℓ_S, ℓ_T, ℓ_W от времени.

Запишем полученные системы (18), (26) уравнений движения в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{P}{m}\ell_x - k\dfrac{x}{r^3}, & P = P(t), \\ \ddot{y} = \dfrac{P}{m}\ell_y - k\dfrac{y}{r^3}, & m = m(t), \\ \ddot{z} = \dfrac{P}{m}\ell_z - k\dfrac{z}{r^3}, & \ell_x = \ell_x(t), \\ & \ell_y = \ell_y(t), \\ & \ell_z = \ell_z(t), \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \dot{V}_S = \dfrac{V_T^2}{r} + \dfrac{P}{m}\ell_S - \dfrac{k}{r^2}, & \dot{\gamma} = -\dfrac{V_T}{r}\sin\chi, \\ \dot{V}_T = -\dfrac{V_S V_T}{r} + \dfrac{P}{m}\ell_T, & P = P(t), \\ \dot{\chi} = \dfrac{P}{V_T m}\ell_W, & m = m(t), \\ & \ell_S = \ell_S(t), \\ \dot{r} = V_S, & \ell_T = \ell_T(t), \\ \dot{\delta}\cdot\cos\gamma = \dfrac{V_T}{r}\cos\chi, & \ell_W = \ell_W(t). \end{cases} \qquad (28)$$

Как система (27) при заданных начальных условиях $x_o, y_o, z_o, \dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o,$ так и равноценная ей система (28) при заданных начальных условиях $r_o, \delta_o, \gamma_o, V_{So}, V_{To}, \chi_o,$ полностью определяют движение материальной точки переменной массы в центральном гравитационном поле под действием силы, образуемой отбросом массы.

Систему (27) удобно использовать при расчете программы изменения тяги, поскольку в этом случае программные функции задаются в системе координат, оси которой не меняют своего положения в пространстве, и рассчитанные функции параметров l_x, l_y, l_z могут быть непосредственно введены в систему управления.

Систему (28) удобно использовать при выборе граничных условий, соответствующих моменту выхода на орбиту в центральном гравитационном поле, поскольку это позволяет упростить процесс выбора и в некоторых частных случаях – уравнения движения.

Нашей задачей является также построение системы уравнений, определяющей наиболее выгодную по затрате топлива траекторию ракеты-носителя и сочетающую положительные качества как системы (27), так и системы (28).

Уравнения экстремальной траектории. Пусть в начальный момент времени $t=t_o$ кинематическое состояние рассматриваемой материальной точки переменной массы m характеризуется параметрами: $r_o, \delta_o, \gamma_o, V_{So}, V_{To}, \chi_o,$. Требуется перевести точку в состояние, характеризуемое параметрами $r_к$, $\delta_к$, $\gamma_к$, $V_{Sк}$, $V_{Tк}$, $\chi_к$, при этом масса точки $m_к$ должна иметь максимальное значение. Момент времени, когда параметры траектории принимают заданные значения $r_к$, $\delta_к$, $\gamma_к$, $V_{Sк}$, $V_{Tк}$, $\chi_к$, обозначим через $t_к$.

Траекторию, обеспечивающую минимум расхода массы при переходе из кинематического состояния r_o, δ_o, γ_o, V_{So}, V_{To}, χ_o в кинематическое состояние $r_к$, $\delta_к$, $\gamma_к$, $V_{Sк}$, $V_{Tк}$, $\chi_к$, будем называть экстремальной траекторией.

При заданной зависимости массы от времени и при условиях (15), наложенных на эту зависимость, минимум расхода массы на интервале времени полета является следствием минимума этого интеграла. Поэтому для решения задачи достаточно было бы найти условия минимума интеграла

$$\tau_к = t_к - t_o = \int_{t_o}^{t_к} dt\,. \qquad (29)$$

Поскольку интеграл (16) отражает физическую сущность задачи и замена интеграла (16) интегралом (29) принципиально не упрощает задачи, будем рассматривать интеграл (16).

Интервал времени $(t_o, t_к)$, а следовательно, и расход массы на этом интервале, зависят от вида функций: $r(t)$, $\delta(t)$, $\gamma(t)$, $V_S(t)$, $V_T(t)$, $\chi(t)$, $\ell_S(t)$, $\ell_T(t)$, $\ell_W(t)$. Следовательно, интеграл (17) является неявным функционалом времени (он зависит от функций $r(t)$, $\delta(t)$, $\gamma(t)$, $V_S(t)$, $V_T(t)$, $\chi(t)$, $\ell_S(t)$, $\ell_T(t)$, $\ell_W(t)$) с переменным верхним пределом. Найдем такие зависимости функций r, δ, γ, V_S, V_T, χ, ℓ_S, ℓ_T, ℓ_W от времени, которые обеспечат минимум интеграла (16). Для этого решим вариационную задачу на экстремум функционала (16).

На условиях существования и единственности экстремального решения задачи мы остановимся после того, как будут получены уравнения экстремальной траектории. Сейчас же покажем, что если существует единственный экстремум рассматриваемого функционала, то он соответствует минимуму.

Лемма. При переходе из заданного кинематического состояния r_o, δ_o, γ_o, V_{so}, V_{To}, χ_o в заданное кинематическое состояние $r_к$, $\delta_к$, $\gamma_к$, $V_{Sк}$, $V_{Tк}$, $\chi_к$ функционал (16) функций r, δ, γ, V_S, V_T, χ, ℓ_S, ℓ_T, ℓ_W не достигает своего максимума.

Доказательство. Действительно, каковы бы ни были зависимости $r'(t)$, $\delta'(t)$, $\gamma'(t)$, $V'_S(t)$, $V'_T(t)$, $\chi'(t)$, $\ell'_S(t)$, $\ell'_T(t)$, $\ell'_W(t)$, можно ввиду неограниченности пространства всегда задать другие зависимости $r''(t)$, $\delta''(t)$, $\gamma''(t)$, $V''_S(t)$, $V''_T(t)$, $\chi''(t)$, $\ell''_S(t)$, $\ell''_T(t)$, $\ell''_W(t)$, такие, что движение по новой траектории, определяемой зависимостями *('')*, потребует дополнительного расхода массы, по сравнению с траекторией, определяемой зависимостями *(')* и, соответственно, увеличения функционала (16).

Следствие. Экстремум функционала (16) если он существует и единственный, соответствует минимуму этого функционала.

Следует подчеркнуть, что сделанный вывод относится к тому случаю, когда начальное и конечное кинематические состояния центра масс ракеты-носителя заданы. Пусть

$$I = (m_o - m_к)_{\min} \; -$$

минимальное значение функционала (16), соответствующее заданным начальному и конечному кинематическим состояниям центра масс ракеты-носителя.

Если начальное (или конечное) состояние центра масс варьируется в некоторой области параметров r_o, δ_o, γ_o, V_{So}, V_{To}, χ_o (или соответственно $r_к$, $\delta_к$, $\gamma_к$, $V_{Sк}$, $V_{Tко}$, $\chi_к$), то функция I, определенная в этой области, может достигать как минимумов, так и максимумов.

Искомые функции r, δ, γ, V_S, V_T, χ, ℓ_S, ℓ_T, ℓ_W, обеспечивающие минимум функционала, подчинены конечным и дифференциальным связям, заданным уравнениям движения и очевидным кинематическим соотношениям. Эти связи запишем в таком виде:

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{V}_S - \dfrac{V_T^2}{r} - \dfrac{P}{m}\ell_S + \dfrac{k}{r^2} = 0, & \omega_4 = \dot{r} - V_S = 0, \\ & \omega_5 = \dot{\delta}\, r\cos\gamma - V_T\cos\chi = 0 \\ \omega_2 = \dot{V}_T + \dfrac{V_S V_T}{r} - \dfrac{P}{m}\ell_T = 0, & \omega_6 = \dot{\gamma}\, r + V_T\sin\chi = 0, \\ & \omega_7 = \ell_S^2 + \ell_N^2 + \ell_W^2 - 1 = 0. \\ \omega_3 = \dot{\chi} V_T - \dfrac{P}{m}\ell_W = 0, & \end{cases} \tag{30}$$

и будем решать вариационную задачу на условный экстремум. Новый функционал, эквивалентный функционалу (16) и учитывающий условия (30), имеет вид:

$$m_o - m_к = \int_{t_o}^{t_к} (-\dot{m} + \sum_{j=1}^{7} \lambda_j \omega_j)\,dt, \tag{31}$$

где $\lambda_j\left(j = 1,\ 2, ...,\ 7\right)$ – некоторые неопределенные пока функции времени.

Подынтегральное выражение интеграла (31) обозначим через

$$H = -\dot{m} + \sum_{j=1}^{7} \lambda_j \omega_j = H(q_1, q_2, ..., q_9, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_6), \tag{32}$$

где $q_i\left(i = 1,\ 2, ...,\ 9\right)$ – варьируемые функции от V_S, V_T, χ, r, δ, γ, ℓ_S, ℓ_T, ℓ_W.

Произведя варьирование по всем функциям $q_i\left(i = 1,\ 2, ...,\ 9\right)$, их первым производным и переменному верхнему пределу интегрирования, получим следующее выражение для первой вариации функционала (31):

$$\delta(m_o - m_к) = H\Big|_{t=t_к}\delta t_к + \int_{t_0}^{t_к}\sum_{i=1}^{9}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i\right)dt\,\cdot$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\delta(m_o - m_к) = H\Big|_{t=t_к}\delta t_к + \sum_{i=1}^{9}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\Big|_{t=t_к}\delta q_{iк} - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\delta q_{io}\Big|_{t=t_o}\right) + \int_{t_0}^{t_к}\sum_{i=1}^{9}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i\,dt. \tag{33}$$

Полагая, что существует внутренний экстремум функционала (31) по функциям V_S, V_T, χ, r, δ, γ, ℓ_S, ℓ_T, ℓ_W и параметру $t_к$, найдем его из условия

$$\delta\,(m_o - m_к) = 0. \tag{34}$$

В случае если в момент $t = t_o$ имеет место равенство

$$H = -\dot{m} = 0, \tag{35}$$

первый член вариации (33) равен нулю.

В случае если в момент $t = t_к$ имеет место неравенство

$$H = -\dot{m} \neq 0, \tag{36}$$

условие (34) при учете условий (16) и при закрепленном начале интервала $(t_o,\ t_к)$ интегрирования соответствует минимуму этого интеграла. Получаем

$$\delta t_к = 0\,. \tag{37}$$

Значения варьируемых функций V_S, V_T, χ, r, δ, γ в начале и конце интервала интегрирования заданы. Для этих функций

$$\delta q_{io} = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ 6;$$

$$\delta q_{iк} = 0, \qquad i = 1,\ 2,\ ...,\ 6.$$

Поскольку функция H не зависит (32) явно от производных $\dot{\ell}_S, \dot{\ell}_T, \dot{\ell}_W$, то имеют место равенства

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\ell}_S} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\ell}_T} = \frac{\partial H}{\partial \dot{\ell}_W} = 0. \qquad (38)$$

Из выражений (35), (37), (38) следует, что все члены вариации (33), не содержащие знака интеграла, равны нулю.

Таким образом, для того чтобы вариация (33) обратилась в нуль, следует потребовать, чтобы функции $q_i(i = 1,\ 2,\ ...,\ 9)$ и $\lambda_j(j = 1,\ 2,\ ...,\ 7)$ удовлетворяли уравнениям Эйлера

$$Э_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \qquad (39)$$

где $i = 1,\ 2,\ ...,\ 9$.

Уравнения Эйлера для функционала (31) запишутся в таком виде:

$$Э_1 = \frac{V_T}{r}\lambda_2 - \lambda_4 - \dot{\lambda}_1 = 0, \qquad (40)$$

$$Э_2 = \frac{V_S}{r}\lambda_2 - \frac{2V_T}{r}\lambda_1 - \lambda_S \cos\chi + \dot{\chi}\lambda_3 + \lambda_6 \sin\chi - \dot{\lambda}_2 = 0, \qquad (41)$$

$$Э_3 = \lambda_5 V_T \sin\chi + \lambda_6 V_T \cos\chi - \dot{\lambda}_3 V_T - \lambda_3 \dot{V}_T = 0, \qquad (42)$$

$$Э_4 = -\frac{V_S V_T}{r^2}\lambda_2 + \left(V_T^2 - \frac{2k}{r}\right)\frac{\lambda_1}{r^2} + \dot{\delta}\lambda_5 \cos\gamma + \dot{\gamma}\lambda_6 - \dot{\lambda}_4 = 0, \qquad (43)$$

$$Э_5 = \frac{d}{dt}\left(\lambda_5 r \cos\gamma\right) = 0, \qquad (44)$$

$$Э_6 = -\delta r \lambda_5 \sin\gamma - \dot{\lambda}_6 r - \lambda_6 \dot{r} = 0, \qquad (45)$$

$$Э_7 = -\frac{P}{m}\lambda_1 + 2\ell_S \lambda_7 = 0, \qquad (46)$$

$$Э_8 = -\frac{P}{m}\lambda_2 + 2\ell_T \lambda_7 = 0, \qquad (47)$$

$$Э_9 = -\frac{P}{m}\lambda_3 + 2\ell_W \lambda_7 = 0. \qquad (48)$$

Из уравнений (46), (47), (48) получаем

$$\begin{cases} \ell_S = \dfrac{P}{2m}\cdot\dfrac{\lambda_1}{\lambda_7}, \\ \ell_T = \dfrac{P}{2m}\cdot\dfrac{\lambda_2}{\lambda_7}, \\ \ell_W = \dfrac{P}{2m}\cdot\dfrac{\lambda_3}{\lambda_7}. \end{cases}$$

Решая уравнения (44) совместно с последним уравнением (30), находим

$$\begin{cases} \ell_S = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}, \\ \ell_T = \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}, \\ \ell_W = \dfrac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}. \end{cases} \qquad (49)$$

Решая уравнение (44), имеем

$$\lambda_5 = \lambda_{5o}\frac{r_o \cos\gamma_o}{r\cos\gamma}. \qquad (50)$$

Теперь система уравнений экстремальной траектории может быть записана в таком виде:

$$\begin{cases} \dot{V}_S = \dfrac{V_T^2}{r} + \dfrac{P}{m}\ell_S - \dfrac{k}{r^2}, \\ \dot{V}_T = -\dfrac{V_S V_T}{r} + \dfrac{P}{m}\ell_T, \\ \dot{\chi} = \dfrac{P}{V_T m}\ell_W, \\ \dot{r} = V_S, \\ \dot{\delta} = \dfrac{V_T}{r}\cdot\dfrac{\cos\chi}{\cos\gamma}, \\ \dot{\gamma} = -\dfrac{V_T}{r}\cdot\sin\chi, \\ \dot{\lambda}_1 = \dfrac{V_T}{r}\lambda_2 - \lambda_4, \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{2V_T}{r}\lambda_1 + \dfrac{V_S}{r}\lambda_2 + \dfrac{P\ell_W}{V_T m}\lambda_3 - \lambda_5 \cos\chi + \lambda_6 \sin\chi, \\ \dot{\lambda}_3 = \dfrac{V_S}{r}\lambda_3 + \lambda_S \sin\chi + \lambda_6 \cos\chi - \dfrac{P\ell_T}{V_T m}\lambda_3, \\ \dot{\lambda}_4 = \left(V_T^2 - \dfrac{2k}{r}\right)\dfrac{\lambda_1}{r^2} - \dfrac{V_S V_T}{r^2}\lambda_2 + \dfrac{V_T}{r}\left[\lambda_5 \cos\chi - \lambda_6 \sin\chi\right], \\ \dot{\lambda}_6 = -\dfrac{V_S}{r}\lambda_6 - \dfrac{V_T}{r}\cos\chi\dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\cdot\lambda_5, \\ \ell_S = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^2}},\ \ell_W = \dfrac{\lambda_3}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^2}},\ \ell_T = \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^2}} \\ \lambda_5 = \lambda_{50}\dfrac{r_o \cos\gamma_o}{r\cos\gamma},\ P = P(t),\ m = m(t). \end{cases} \qquad (51)$$

Не приводя строгого доказательства условий существования и единственности системы (51), отметим следующее: функции $P(t)$ и $m(t)$, а следовательно, и правые части соответствующих дифференциальных уравнений системы (51) терпят конечный разрыв в некоторых точках интервала (t_o, $t_к$), соответствующих моментам разделения ступеней ракеты-носителя и смены режима работы двигателя ракеты-носителя. Кроме того, правые части уравнений для определения функций δ, λ_5 и $\dot{\chi}$ терпят бесконечный разрыв в тех точках траектории, в которых

$$\gamma = \pm 90^\circ \qquad (52)$$

и

$$V_T = 0 \qquad (53)$$

соответственно. В окрестностях этих точек функции $\dot{\delta}, \lambda_5$ и $\dot{\chi}$ не меняют знака, так как, по определению параметров γ и V_T, имеют место неравенства:

$$-90° \le \gamma \le 90°, V_T \ge 0.$$

При выполнении равенства (52) центр масс ракеты-носителя находится на оси O_3Z_1 орбитальной системы координат. При выполнении равенства (53) вектор скорости центра масс ракеты либо направлен вдоль радиуса - вектора $\bar{r}$, либо равен нулю. Следовательно, в случае движения ракеты-носителя вдоль оси O_3Z_1 и при вертикальном полете, система (51) не имеет определенного решения и не может быть использована. Однако при выведении ракеты-носителя на орбиту участки прямолинейного движения вдоль оси O_3Z_1 и вертикального полета не являются оптимальными с энергетической точки зрения и не реализуются на экстремальных траекториях.

Рассмотрим случаи, когда условия (52), (53) выполняются только в отдельных точках интервала (t_o, $t_к$), тогда количество точек, в которых правые части соответствующих дифференциальных уравнений системы (51) терпят разрывы, ограничено. Следовательно, интервал (t_o, $t_к$) может быть разбит на подынтервалы, на каждом из которых правые части дифференциальных уравнений непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем входящим в них аргументам в замкнутой области (t_o, $t_к$). Следовательно, на каждом подынтервале условия существования и единственности решения системы (51) будут выполнены. Поскольку эти интервалы сколь угодно близки друг к другу, то кусочные решения могут быть состыкованы на всем интервале (t_o, $t_к$).

При программировании задач численного интегрирования системы (51) на электронно-вычислительной машине следует предусмотреть случаи, когда функции γ и V_T удовлетворяют условиям (52), (53), и обеспечить автоматическую замену этих значений γ и V_T другими значениями, близкими к ±90° и 0, с таким расчетом, чтобы эта замена заведомо не оказывала практического влияния на результаты расчета, например, положить

$$\gamma = \pm\left(90 - 10^{-15}\right)°,$$

$$V_T = 10^{-15} \text{ м/с}.$$

Начальными условиями для интегрирования системы (51) являются значения параметров: r_o, δ_o, γ_o, V_{So}, V_{To}, χ_o, λ_{10}, λ_{20}, λ_{30}, λ_{40}, λ_{50}, λ_{60}. Так как значения r_o, δ_o, γ_o, V_{So}, V_{To}, χ_o по условию задачи заданы, то выбору подлежат только значения параметров λ_{jo} (j = 1, 2, …, 6).

При их выборе можно в силу существования и единственности решения системы (51) всегда добиться того, что в некоторый момент времени шесть кинематических параметров траектории r, δ, γ, V_S, V_T, χ – примут наперед заданные значения $r_к$, $\delta_к$, $\gamma_к$, $V_{Sк}$, $V_{Tк}$, $\chi_к$.

Рассмотрим пространство параметров r, δ, γ, V_S, V_T, χ, характеризующих кинематическое состояние центра масс ракеты-носителя. Очевидно, что в каждой точке этого пространства, через которую проходит траектория, определяемая системой (51), при начальных условиях r_o, δ_o, γ_o, V_{So}, V_{To}, χ_o, масса ракеты-носителя имеет максимальное значение в том смысле, что использование любой другой траектории, проходящей при тех же начальных условиях через данную точку r_1, δ_1, γ_1, V_{S1}, V_{T1}, χ_1, приведет к тому, что ракета придет в точку r_1, δ_1, γ_1, V_{S1}, V_{T1}, χ_1 с меньшей массой.

Решение уравнений (40) – (48) относительно параметров, определяющих направление тяги, может быть записано в квадратурах. Если при этом положить, что $\chi = \gamma = \lambda_3 = \lambda_6 = 0$, то полученное выражение с точностью до обозначений совпадает с ранее полученной зависимостью, определяющей программу угла тангажа для минимальной плоской траектории ракеты-носителя в центральном гравитационном поле. Если также положить $r = 0$, то можно получить известную, дробно-линейную зависимость для определения программы угла тангажа минимальной плоской траектории в случае движения в плоско-параллельном гравитационном поле.

Список использованной литературы

1. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. – УФН, 1957. – Т. 13, вып. 1.
2. Fried B.D. On the Powered Flight Trajectory of on Earth Satellite // Jet Propulsion. – 1957. – Vol. 27, № 6. – P. 641–643.
3. Fried B.D. Trajectory optimization for Powered Flight in two or three Dimensions // Space Technology. – New York, 1959.
4. Lowden D.F. Optimal programming of Rocket thrust direction // Astronautica Acta. – 1955. – Vol. 1, № 1. – P. 41–56.
5. Lowden D.F. Optimal Rocket Trajectories // Jet Propulsion. – 1957. – Vol. 27, № 12. – P. 1263.
6. Lowden D.F. Minimal Rocket Trajectories // Journal of the American Rocket Society. – 1953. – Vol. 23, № 11-12. – P. 360–376, 382.
7. Lowden D.F. Interplanetary Rocket Trajectories // Advances in Space Science. – 1959. – P. 1–53.
8. Wisnenski M.L. Error matrix for a flight on a circular orbit // ARS Journal. – 1962. – T. 32, № 9. – P. 1416–1418.

Статья поступила 31.01.2014