

УДК 531.551:629.764

Канд. техн. наук Э.П. Компаниец, д-р техн. наук Н.М. Дронь,  
Е.Ю. Баранов, Н.Г. Литвин

## ПОСТРОЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Предложен обобщенный метод выбора пространственных траекторий полета ракет-носителей в центральном гравитационном поле при запусках искусственных спутников Земли для случаев трехмерного пространственного перехода.

Запропоновано узагальнений метод вибору просторових траєкторій польоту ракет-носіїв у центральному гравітаційному полі під час запусків штучних супутників Землі для випадків тривимірного просторового переходу.

The paper describes the general principles of selection of launch vehicles flight 3-D trajectories in central gravitational field at launch of Earth satellites for the case of 3-D spatial transition.

Рассмотрим систему уравнений экстремальной траектории и определим подходы и требования к ее расчету [1–8].

**О выборе начальных условий движения.** Число искомых значений параметров  $\lambda_{jo}$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ), определяющих конфигурацию минимальной траектории, может быть уменьшено на единицу, что особенно важно при практических расчетах. Действительно, функции  $\ell_S, \ell_T, \ell_W$  зависят не от самих значений ( $j = 1, 2, 3$ ), а от их отношений.

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_S = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}, \\ \ell_T = \frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}, \\ \ell_W = \frac{\lambda_3}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}}. \\ \ell_S = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}}, \\ \ell_T = \frac{\mu_2}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}}, \\ \ell_W = \frac{\mu_3}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{V}_S = \frac{V_T^2}{r} + \frac{P}{m} \ell_S - \frac{k}{r^2}, \\ \dot{V}_T = -\frac{V_S V_T}{r} + \frac{P}{m} \ell_T, \\ \dot{\chi} = \frac{P}{V_T m} \ell_W, \\ \dot{r} = V_S, \\ \dot{\delta} = \frac{V_T}{r} \cdot \frac{\cos \chi}{\cos \gamma}, \\ \dot{\gamma} = -\frac{V_T}{r} \sin \chi, \\ \dot{\mu}_1 = \frac{V_T}{r} \mu_2 - \mu_4, \\ \dot{\mu}_2 = -\frac{2V_T}{r} \mu_1 + \frac{V_S}{r} \mu_2 + \dot{\chi} \mu_3 - \mu_5 \cos \chi + \mu_6 \sin \chi, \\ \dot{\mu}_3 = -\frac{\dot{V}_T}{V_T} \mu_3 + \mu_5 \sin \chi + \mu_6 \cos \chi, \\ \dot{\mu}_4 = \left( V_T^2 - \frac{2k}{r} \right) \frac{\mu_1}{r^2} - \frac{V_S V_T}{r^2} \mu_2 + \delta \mu_5 \cos \gamma + \dot{\gamma} \mu_6, \\ \dot{\mu}_6 = -\frac{\dot{r}}{r} \mu_6 - \delta \mu_5 \sin \gamma, \\ \mu_5 = \mu_{50} \frac{r_0 \cos \gamma_0}{r \cos \gamma}, \\ \ell_S = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}}, \\ \ell_T = \frac{\mu_2}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}}, \\ \ell_W = \frac{\mu_3}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}}, \\ P = P(t), \\ m = m(t). \end{array} \right. \quad (2)$$

Для того чтобы траектория, описываемая системой (1), проходила через заданное кинематическое состояние  $r_k, \delta_k, \gamma_k, V_{Sk}, V_{Tk}, \chi_k$ , необходимо подобрать параметры  $\mu_{jo}$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ).

По определению (1) имеем  $\mu_{20} = 1$ , поэтому выбору подлежат только пять параметров:  $\mu_{10}, \mu_{30}, \mu_{40}, \mu_{50}, \mu_{60}$ . Шестым параметром, который необходимо "подобрать" для "попадания" в кинематическое состояние  $r_k, \delta_k, \gamma_k, V_{Sk}, V_{Tk}, \chi_k$ , является время полета

$$\tau_k = t_k - t_0.$$

На практике для подбора значений  $\tau_k, \mu_{10}, \mu_{30}, \mu_{40}, \mu_{50}, \mu_{60}$  целесообразно использовать какой-либо итерационный метод.

Рассмотрим случай, когда параметры траектории в момент  $t = t_0$  не фиксированы, а являются функциями двух параметров, которыми могут быть, в частности, угол  $\theta$  между вектором начальной скорости и плоскостью  $O_3x_1z_1$  и угол  $\sigma$  между проекцией вектора начальной скорости на плоскость  $O_3x_1z_1$  и осью  $O_3x_1$ . При  $t = t_0$  имеем

$$\begin{cases} r_0 = r_0(\theta_0, \sigma_0), \\ \delta_0 = \delta_0(\theta_0, \sigma_0), \\ \gamma_0 = \gamma_0(\theta_0, \sigma_0), \\ V_{S0} = V_{S0}(\theta_0, \sigma_0), \\ V_{T0} = V_{T0}(\theta_0, \sigma_0), \\ \chi_0 = \chi_0(\theta_0, \sigma_0). \end{cases}$$

Вариации  $\delta r_0, \delta \delta_0, \delta \gamma_0, \delta V_{S0}, \delta V_{T0}, \delta \chi_0$  не независимы, а связаны между собой через вариации  $\delta \theta_0, \delta \sigma_0$ :

$$\begin{cases} \delta r_0 = \frac{\partial r_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial r_0}{\partial \sigma_0} \delta \sigma_0, & \delta V_{S0} = \frac{\partial V_{S0}}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial V_{S0}}{\partial \sigma_0} \delta \sigma_0, \\ \delta \delta_0 = \frac{\partial \delta_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial \delta_0}{\partial \sigma_0} \delta \sigma_0, & \delta V_{T0} = \frac{\partial V_{T0}}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial V_{T0}}{\partial \sigma_0} \delta \sigma_0, \\ \delta \gamma_0 = \frac{\partial \gamma_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial \gamma_0}{\partial \sigma_0} \delta \sigma_0, & \delta \chi_0 = \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial \chi_0}{\partial \sigma_0} \delta \sigma_0. \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в вариации  $\delta(m_0 - m_k)$ , получим:

$$\begin{aligned} \delta(m_0 - m_k) = & \left( \lambda_{10} \frac{\partial V_{S0}}{\partial \theta_0} + \lambda_{20} \frac{\partial V_{T0}}{\partial \theta_0} + \lambda_{30} V_{T0} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{40} \frac{\partial r_0}{\partial \theta_0} + \right. \\ & \left. + \lambda_{50} r_0 \cos \gamma_0 \frac{\partial \delta_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{60} r_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \theta_0} \right) \delta \theta_0 + \\ & + \left( \lambda_{10} \frac{\partial V_{S0}}{\partial \sigma_0} + \lambda_{20} \frac{\partial V_{T0}}{\partial \sigma_0} + \lambda_{30} V_{T0} \frac{\partial \chi_0}{\partial \sigma_0} + \lambda_{40} \frac{\partial r_0}{\partial \sigma_0} + \right. \\ & \left. + \lambda_{50} r_0 \cos \gamma_0 \frac{\partial \delta_0}{\partial \sigma_0} + \lambda_{60} r_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \sigma_0} \right) \delta \sigma_0 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как вариации  $\delta \theta_0$  и  $\delta \sigma_0$  независимы, то условие  $\delta(m_0 - m_k) = 0$  будет выполнено, если коэффициенты при вариациях  $\delta \theta_0, \delta \sigma_0$  в выражении (4) будут равны нулю. Используя это условие, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} & \lambda_{10} \frac{\partial V_S}{\partial \theta_0} + \lambda_{20} \frac{\partial V_{T0}}{\partial \theta_0} + \lambda_{30} V_{T0} \frac{\partial \chi_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{40} \frac{\partial r_0}{\partial \theta_0} + \\ & + \lambda_{50} r_0 \cos \gamma_0 \frac{\partial \delta_0}{\partial \theta_0} + \lambda_{60} r_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \theta_0} = 0; \\ & \lambda_{10} \frac{\partial V_{S0}}{\partial \sigma_0} + \lambda_{20} \frac{\partial V_{T0}}{\partial \sigma_0} + \lambda_{30} V_{T0} \frac{\partial \chi_0}{\partial \sigma_0} + \lambda_{40} \frac{\partial r_0}{\partial \sigma_0} + \\ & + \lambda_{50} r_0 \cos \gamma_0 \frac{\partial \delta_0}{\partial \sigma_0} + \lambda_{60} r_0 \frac{\partial \gamma_0}{\partial \sigma_0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Поделив их на  $\lambda_{10}$ , получим уравнения относительно  $\mu_{j0}$  ( $j=1, 3, 4, 5, 6$ ). Решая уравнения относительно  $\mu_{10}, \mu_{30}$ , находим:

$$\mu_{10} = \frac{\frac{D(V_{T0}, \chi_0)}{D(\theta_0, \sigma_0)} + \mu_{40} \frac{D(r_0, \chi_0)}{D(\theta_0, \sigma_0)} + \mu_{50} r_0 \cos \gamma_0 \frac{D(\delta_0, \chi_0)}{D(\theta_0, \sigma_0)} + \mu_{60} r_0 \frac{D(\gamma_0, \chi_0)}{D(\theta_0, \sigma_0)}}{\frac{D(V_{S0}, \chi_0)}{D(\theta_0, \sigma_0)}}; \quad (6)$$

$$\mu_{30} = \frac{\frac{D(V_{T0}, V_{S0})}{D(\theta_0, \sigma_0)} + \mu_{40} \frac{D(r_0, V_{S0})}{D(\theta_0, \sigma_0)} + \mu_{50} r_0 \cos \gamma_0 \frac{D(\delta_0, V_{S0})}{D(\theta_0, \sigma_0)} + \mu_{60} r_0 \frac{D(\gamma_0, V_{S0})}{D(\theta_0, \sigma_0)}}{V_T \frac{D(V_{S0}, \chi_0)}{D(\theta_0, \sigma_0)}}, \quad (7)$$

где  $\frac{D(\eta, \xi)}{D(\alpha, \beta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} & \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \beta} & \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \end{vmatrix}$  – определитель Якоби.

Выражения (6), (7) являются обобщением известной формулы Д.Е. Охочимского и Т.М. Энеева для случая пространственного движения.

Таким образом, в случае зависимости начальных условий  $V_{S0}, V_{T0}, \chi_0, r_0, \delta_0, \gamma_0$  от двух варьируемых параметров  $\theta_0, \sigma_0$  параметры  $\mu_{10}, \mu_{30}$  не являются независимыми, а определяются выбранными значениями  $\mu_{40}, \mu_{50}, \mu_{60}$ . Для выхода ракеты в заданную точку с заданным вектором скорости необходимо подобрать соответствующие значения следующих параметров:  $\tau_k, \theta_0, \sigma_0, \mu_{40}, \mu_{50}, \mu_{60}$ .

**Выход на орбиту.** В общем случае орбита материальной точки в центральном гравитационном поле задается пятью параметрами. В данном случае вследствие соответствующей ориентации систем координат плоскость орбиты совпадает с плоскостью  $O_3x_1y_1$  орбитальной системы координат, поэтому параметры, определяющие положение плоскости орбиты в пространстве, не рассматриваются.

Два параметра определяют форму орбиты:

- параметр орбиты;
- эксцентриситет орбиты.

Один параметр определяет ориентацию орбиты в плоскости:

- угол между осью  $O_3x_1$  и радиусом-вектором перигея орбиты.

Положение материальной точки на орбите определяется углом  $\delta$ .

Рассмотрим различные случаи выведения ракеты-носителя на орбиту.

Случай I. Орбита задана параметрами:  $p, e, \omega$ . Точка выхода на орбиту задана параметром

$$\delta = \delta_1. \quad (8)$$

При движении по орбите параметры материальной точки должны удовлетворять следующим условиям, вытекающим из ориентации систем координат:

$$\begin{cases} \gamma \equiv 0, \\ \chi \equiv 0, \end{cases} \quad (9)$$

а также уравнению орбиты

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\delta - \omega)} \quad (10)$$

и интегралу площадей

$$V_T r = \sqrt{pk}. \quad (11)$$

Дифференцируя уравнение (10), учитывая кинематические соотношения и условия (9), (11), получаем

$$V_S = e \sqrt{\frac{k}{p}} \cdot \sin(\delta - \omega). \quad (12)$$

Вместо уравнения (12) в дальнейшем может быть использован интеграл энергии.

Параметры минимальной траектории в момент  $t = t_k$  должны удовлетворять следующим граничным условиям, полученным из зависимостей (8–12):

$$\begin{cases} V_{Sk} = e \sqrt{\frac{k}{p}} \cdot \sin(\delta_1 - \omega), \\ V_{Tk} = \sqrt{\frac{k}{p}} \cdot [1 + e \cdot \cos(\delta_1 - \omega)], \\ \chi_k = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} r_k = \frac{p}{1 + e \cdot \cos(\delta_1 - \omega)}, \\ \delta_k = \delta_1, \\ \gamma_k = 0. \end{cases} \quad (13)$$

При интегрировании системы (3) шесть параметров  $\tau_k, \mu_{10}, \mu_{30}, \mu_{40}, \mu_{50}, \mu_{60}$  должны быть выбраны такими, чтобы параметры траектории в момент  $t = t_k$  удовлетворяли шести значениям  $V_{Sk}, V_{Tk}, \chi_k, r_k, \delta_k, \gamma_k$ , полученным из выражений (13).

Случай II. Орбита задана параметрами  $p, e, \omega$ . Точка выхода на орбиту не задана.

Так как расход массы на активном участке траектории зависит от точки выхода на орбиту, то параметры конца активного участка траектории могут быть проварьированы. В момент  $t = t_k$  параметры центра масс ракеты-носителя должны удовлетворять уравнениям (9–12). Шестую связь между параметрами получим из выражения (34) для вариации расхода массы на активном участке траектории.

**Поделив вариацию (34) на  $\lambda_{10}$ , с учетом условия (35–42) и соотношения (2), получаем:**

$$\begin{aligned} \mu_{1k} \delta V_{Sk} + \mu_{2k} \delta V_{Tk} + \mu_{3k} \delta \chi_k + \mu_{4k} \delta r_k + \\ + \mu_{5k} r_k \cos \gamma_k \delta \delta_k + \mu_{6k} r_k \delta \gamma_k = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из условий (8), (9) следует:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \chi_k = 0, \\ \delta\gamma_k &= \delta\chi_k = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Выражение (14) принимает вид

$$\mu_{1k}\delta V_{Sk} + \mu_{2k}\delta V_{Tk} + \mu_{4k}\delta r_k + \mu_{5k}r_k \delta\delta_k = 0. \quad (16)$$

Проварьировав зависимости (10-12) и подставив в них  $t = t_k$ , получим

$$\begin{cases} \delta V_{Sk} = e\sqrt{\frac{K}{p}} \cos(\delta_k - \omega) \cdot \delta\delta_k, \\ \delta V_{Tk} = -e\sqrt{\frac{K}{p}} \sin(\delta_k - \omega) \cdot \delta\delta_k, \\ \delta r_k = \frac{r_k^2 e}{p} \sin(\delta_k - \omega) \cdot \delta\delta_k. \end{cases} \quad (17)$$

Подставив зависимости (17) в уравнение (16), получаем

$$\left\{ \left[ \mu_{1k} \cos(\delta_k - \omega) + \left( -\mu_{2k} + \mu_{4k} \frac{r_k^2}{\sqrt{pK}} \right) \sin(\delta_k - \omega) \right] \times \right. \\ \left. \times e\sqrt{\frac{K}{p}} + \mu_{5k}r_k \right\} \delta\delta_k = 0,$$

откуда имеем граничное условие

$$\left[ \mu_{1k} \cos(\delta_k - \omega) + \left( -\mu_{2k} + \mu_{4k} \frac{r_k^2}{\sqrt{pK}} \right) \sin(\delta_k - \omega) \right] e\sqrt{\frac{K}{p}} + \mu_{5k}r_k = 0. \quad (18)$$

Таким образом, параметры минимальной траектории в момент выхода на орбиту должны удовлетворять следующим граничным условиям, полученным из зависимостей (9-12) и (18):

$$\begin{cases} V_{Sk} - e\sqrt{\frac{K}{p}} \sin(\delta_k - \omega) = 0, \\ V_{Tk} r_k - \sqrt{pK} = 0, \\ \gamma_k = 0, \\ \chi_k = 0, \\ p - r_k [1 + e \cos(\delta_k - \omega)] = 0, \\ \left[ \mu_{1k} \cos(\delta_k - \omega) + \left( -\mu_{2k} + \mu_{4k} \frac{r_k^2}{\sqrt{pK}} \right) \sin(\delta_k - \omega) \right] e\sqrt{\frac{K}{p}} + \mu_{5k}r_k = 0. \end{cases} \quad (19)$$

При интегрировании системы (2) шесть параметров  $\tau_K, \mu_{10}, \mu_{30}, \mu_{40}, \mu_{50}, \mu_{60}$  долж-

ны быть выбраны такими, чтобы удовлетворять шести условиям (19).

Случай III. Орбита задана параметрами  $p, e$ . Параметр  $\omega$  и точка выхода на орбиту – произвольны.

Так как работа сил гравитационного поля на активном участке траектории должна быть сведена к минимуму, то в случае, когда параметр  $\omega$  не задан, энергетически выгодно совершить выход на орбиту в точке, наименее удаленной от центра гравитационного поля. Для обеспечения этого условия совместим точку выхода на орбиту с ее перигеем

$$\delta_k = \omega.$$

Тогда граничные условия существенно упрощаются:

$$\begin{cases} V_{Sk} = 0, & p - r_k(1 + e) = 0, \\ V_{Tk} - (1 + e)\sqrt{\frac{K}{p}} = 0, & \mu_{1k} e(1 + e)\sqrt{K} + \mu_{5k} \cdot p\sqrt{p} = 0, \\ \chi_k = 0, & \gamma_k = 0. \end{cases} \quad (20)$$

При интегрировании системы (2) шесть параметров  $\tau_K, \mu_{10}, \mu_{30}, \mu_{40}, \mu_{50}, \mu_{60}$  должны быть выбраны такими, чтобы параметры траектории в момент  $t = t_k$  удовлетворяли условиям (20).

Случай IV. Орбита круговая и задана параметрами  $p, e$ , то есть

$$e = 0.$$

Граничное условие (18) принимает вид

$$\mu_{5k}r_k = 0.$$

Кроме того, очевидно имеем

$$r_k \neq 0.$$

Следовательно,

$$\mu_{5k} = 0. \quad (21)$$

Из выражений (1), (15) и (21) при  $t = t_k$  получаем

$$\mu_{50} = \mu_{5k} \frac{r_k}{r_0 \cos \gamma_0}, \quad (22)$$

$$\mu_{50} = 0. \quad (23)$$

Равенство (23) очевидно, если точка старта не лежит на оси  $O_3z_1$

$$\gamma_0 \neq \pm 90^\circ. \quad (24)$$

В случае старта с оси  $O_3z_1$

$$\gamma_0 = \pm 90^\circ;$$

$$\cos \gamma_0 = 0,$$

и в выражении (22) имеем неопределенность типа "ноль на ноль". Раскроем эту неопределенность.

Пусть точка старта находится в некоторой окрестности оси  $O_3z_1$ . Не ограничивая общности, будем полагать, что при этом  $\gamma_0$  находится в некоторой окрестности значения  $\gamma = 90^\circ$ . Тогда справедливы равенства (22–24).

Устремим точку старта к оси  $O_3z_1$  произвольным образом, при этом

$$\gamma_0 \rightarrow 90^\circ.$$

Тогда

$$\cos \gamma_0 \rightarrow 0.$$

Так как при этом движении параметр  $\mu_{5k}$  должен оставаться равным нулю, то при движении и в пределе получим

$$\frac{\mu_{5k} r_k}{r_0 \cos \gamma_0} = 0.$$

Следовательно, равенство (23) остается справедливым и в том случае, когда точка старта лежит на оси  $O_3z_1$ .

Граничные условия принимают следующий вид:

$$\begin{cases} V_{Sk} = 0, & \chi_k = 0, \\ V_{Tk} = \sqrt{\frac{K}{p}}, & r_k = p, \\ & \gamma_k = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Таким образом, равенство (23) позволяет ограничиться выбором пяти параметров  $\tau_k, \mu_{10}, \mu_{30}, \mu_{40}, \mu_{60}$  для удовлетворения граничных условий (25). Последнее обстоя-

тельство уменьшает объем расчетов при выборе траектории в 5–6 раз.

Из условия (20)

$$\mu_{5k} = -\mu_{1k} \frac{e(1+e)\sqrt{K}}{p\sqrt{p}},$$

которому надо удовлетворить при выведении ракеты-носителя в перигей эллиптической орбиты или вершину параболической или гиперболической орбит, и из условия (19)

$$\mu_{5k} = 0,$$

которому надо удовлетворить при выведении ракеты-носителя на круговую орбиту, следует, что конфигурация экстремальной траектории выведения ракеты-носителя на круговую орбиту не совпадает с конфигурацией экстремальной траектории выведения ракеты-носителя в перигей эллиптической или вершину параболической или гиперболической орбиты.

Последнее не является очевидным, когда параметр  $\omega$  не задан.

Случай V. Плоскость орбиты проходит через точку старта в момент  $t=t_0$ , при котором  $V_S = V_T = 0$ .

В этом случае уравнения движения существенно упрощаются. На всем активном участке траектории имеем:

$$\chi = \gamma = \ell_W = \mu_3 = \mu_6 = 0.$$

Система уравнений движения принимает вид

$$\begin{cases} \dot{V}_S = \frac{V_T^2}{r} + \frac{p}{m} \ell_S - \frac{k}{r^2}, & \dot{\mu}_4 = \left( V_T^2 - \frac{2k}{r} \right) \frac{\mu_4}{r^2} - \frac{V_S V_T}{r^2} \mu_2 + \frac{V_T}{r} \mu_5, \\ \dot{V}_T = -\frac{V_S V_T}{r} + \frac{p}{m} \ell_T, & \dot{\mu}_5 = \mu_{50} \frac{r_0}{r}, \\ \dot{r} = V_S, & l_S = \frac{\mu_4}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}, \\ \dot{\delta} = \frac{V_T}{r}, & l_T = \frac{\mu_2}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}}, \\ \dot{\mu}_1 = \frac{V_T}{r} \mu_2 - \mu_4, & p = p(t), \\ \dot{\mu}_2 = -\frac{2V_T}{r} \mu_1 + \frac{V_S}{r} \mu_2 - \mu_5, & m = m(t). \end{cases} \quad (26)$$

Соответственно упрощаются и граничные условия.

В этом случае выбираются четыре параметра  $\tau_k, \mu_{20}, \mu_{40}, \mu_{50}$ , что позволяет удовлетворить четырем граничным условиям плоского случая при выведении ракеты-

носителя на эллиптическую, параболическую или гиперболическую орбиты. В случае выведения ракеты-носителя на круговую орбиту выбору подлежат три параметра  $\tau_k, \mu_{10}, \mu_{40}$ . Параметр  $\mu_{50}$  равен нулю, и в шестом, седьмом и восьмом уравнениях системы (26) пропадает последний член.

Из уравнения (5) находим

$$\mu_{10} = -\frac{\frac{\partial V_{T0}}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial V_{S0}}{\partial \theta_0}} - \mu_{40} \frac{\frac{\partial r_0}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial V_{S0}}{\partial \theta_0}} - \mu_{50} r_0 \frac{\frac{\partial \delta_0}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial V_{S0}}{\partial \theta_0}},$$

что аналогично ранее полученной зависимости в работе.

При  $\mu_{50} = 0$  получаем

$$\mu_{10} = -\frac{\frac{\partial V_{T0}}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial V_{S0}}{\partial \theta_0}} - \mu_{40} \frac{\frac{\partial r_0}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial V_{S0}}{\partial \theta_0}}.$$

**Уравнения экстремальной траектории в орбитальной системе координат.** Использование системы уравнений движения в сферической и связанной системах координат (3) дает возможность в часто встречающихся частных случаях упростить как уравнения движения, так и граничные условия. Как указывалось выше, объем расчетов может сократиться при этом в 5-6 раз. Однако использование только этих систем не позволяет непосредственно рассчитать функции параметров  $\ell_x, \ell_y, \ell_z$ , закладываемые в систему управления ракеты-носителя и определяющие направление вектора тяги двигателя в орбитальной системе координат, которая является инерциальной.

Система уравнений движения, определяющих экстремальную траекторию в орбитальной системе координат, будет иметь вид:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{P}{m} \ell_x - k \frac{x_1}{r^3}, & \dot{\mu}_3 = \alpha_{33}\mu_3 + \alpha_{35}\mu_5 + \alpha_{36}\mu_6, \\ \ddot{y}_1 = \frac{P}{m} \ell_y - k \frac{y_1}{r^3}, & \dot{\mu}_4 = \alpha_{41}\mu_1 + \alpha_{42}\mu_2 + \alpha_{45}\mu_5 + \alpha_{46}\mu_6, \\ \ddot{z}_1 = \frac{P}{m} \ell_z - k \frac{z_1}{r^3}, & \dot{\mu}_6 = \alpha_{65}\mu_5 + \alpha_{66}\mu_6, \\ \dot{\mu}_1 = \alpha_{12}\mu_2 + \alpha_{14}\mu_4, & \mu_5 = \alpha_{55}\mu_{50}, \\ \dot{\mu}_2 = \alpha_{21}\mu_1 + \alpha_{22}\mu_2 + & P = P(t), \\ +\alpha_{23}\mu_3 + \alpha_{25}\mu_5 + \alpha_{26}\mu_6, & m = m(t), \end{cases}$$

где  $\ell_x = c_{11}\ell_S + c_{21}\ell_T + c_{31}\ell_W$ ;

$$\ell_y = c_{12}\ell_S + c_{22}\ell_T + c_{32}\ell_W;$$

$$\ell_z = c_{13}\ell_S + c_{23}\ell_T + c_{33}\ell_W;$$

$$c_{11} = \cos \delta \cdot \cos \gamma;$$

$$c_{12} = \sin \delta \cdot \cos \gamma;$$

$$c_{13} = -\sin \gamma;$$

$$c_{21} = \cos \delta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \chi - \sin \delta \cdot \cos \chi;$$

$$c_{22} = \sin \delta \cdot \sin \gamma \cdot \sin \chi + \cos \delta \cdot \cos \chi;$$

$$c_{23} = \cos \gamma \cdot \sin \chi;$$

$$c_{31} = \cos \delta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \chi + \sin \delta \cdot \sin \chi;$$

$$c_{32} = \sin \delta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \chi - \cos \delta \cdot \sin \chi;$$

$$c_{33} = \cos \gamma \cdot \cos \chi;$$

$$\ell_S = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}}; \ell_T = \frac{\mu_2}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}}; \ell_W = \frac{\mu_3}{\sqrt{\sum_{j=1}^3 \mu_j^2}};$$

$$\alpha_{12} = \frac{V_T}{r}; \alpha_{14} = -1;$$

$$\alpha_{21} = -\frac{2V_T}{r}; \alpha_{22} = \frac{V_S}{r}; \alpha_{23} = \frac{P\ell_W}{mV_T};$$

$$\alpha_{25} = -\cos \chi;$$

$$\alpha_{26} = \sin \chi; \alpha_{33} = \frac{V_S}{r} - \frac{P\ell_T}{mV_T}; \alpha_{35} = \sin \chi;$$

$$\alpha_{36} = \cos \chi; \alpha_{41} = \left( V_T^2 - \frac{2k}{r} \right) \frac{1}{r^2};$$

$$\alpha_{42} = -\frac{V_S V_T}{r^2}; \alpha_{45} = \frac{V_T \cos \chi}{r};$$

$$\alpha_{46} = -\frac{V_T}{r} \sin \chi; \alpha_{55} = \frac{r_o \cos \gamma_o}{r \cos \gamma};$$

$$\alpha_{65} = -\frac{V_T \cos \chi \sin \gamma}{r \cos \gamma}; \alpha_{66} = -\frac{V_S}{r};$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

$$V_S = \frac{x_1 \dot{x}_1 + y_1 \dot{y}_1 + z_1 \dot{z}_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}};$$

$$V_T \sqrt{\frac{(\dot{x}_1 y_1 - \dot{y}_1 x_1)^2 + (\dot{x}_1 z_1 - \dot{z}_1 x_1)^2 + (\dot{y}_1 z_1 - \dot{z}_1 y_1)^2}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}};$$

$$\sin \chi = \frac{\dot{z}_1(x_1^2 + y_1^2) - z_1(x_1\dot{x}_1 + y_1\dot{y}_1)}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)[(\dot{x}_1 y_1 - \dot{y}_1 x_1)^2 + (\dot{x}_1 z_1 - \dot{z}_1 x_1)^2 + (\dot{y}_1 z_1 - \dot{z}_1 y_1)^2]}};$$

$$\cos \chi = \frac{(x_1 \dot{y}_1 - y_1 \dot{x}_1) \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)[(\dot{x}_1 y_1 - \dot{y}_1 x_1)^2 + (\dot{x}_1 z_1 - \dot{z}_1 x_1)^2 + (\dot{y}_1 z_1 - \dot{z}_1 y_1)^2]}};$$

$$\sin \delta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}; \quad \cos \delta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}};$$

$$\sin \gamma = \frac{-z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}; \quad \cos \gamma = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}.$$

В качестве граничных условий, обеспечивающих выход на заданную орбиту с наименьшей затратой массы, используются равенства (13), (19), (20), (25) или, в случае плоского движения, их упрощенные варианты.

Очевидно, подобные системы могут быть построены для любой инерциальной системы координат с помощью соответствующих формул перехода. На практике при выборе экстремальной программы тангажа удобно использовать начальную стартовую систему координат.

**Расчет траектории ракеты-носителя. Уравнения движения.** Параметры активного участка траектории рассчитываются интегрированием системы дифференциальных уравнений движения ракеты-носителя в земной системе координат:

$$\begin{cases} \dot{V}_{x3} = \frac{1}{m} [F_{x1}\alpha_{11} + F_{y1}\alpha_{12} + F_{z1}\alpha_{13}] - \frac{x}{r} g_r - a_x g_\omega + a_{11}x + \\ + a_{12}(R_0 + y) + a_{13}z + b_{12}V_y + b_{13}V_z, \\ \dot{V}_{y3} = \frac{1}{m} [F_{x1}\alpha_{21} + F_{y1}\alpha_{22} + F_{z1}\alpha_{23}] - \frac{R_0 + y}{r} g_r - a_y g_\omega + a_{21}x + \\ + a_{22}(R_0 + y) + a_{23}z + b_{21}V_x + b_{23}V_z, \\ \dot{V}_{z3} = \frac{1}{m} [F_{x1}\alpha_{31} + F_{y1}\alpha_{32} + F_{z1}\alpha_{33}] - \frac{z}{r} g_r + a_z g_\omega + a_{31}x + \\ + a_{32}(R_0 + y) + a_{33}z + b_{31}V_x + b_{32}V_y, \\ \dot{x}_3 = V_{x3}, \\ \dot{y}_3 = V_{y3}, \\ \dot{z}_3 = V_{z3}, \\ F_{x1} = P - C_\tau q S - X_{1p}, \\ F_{y1} = C_{y1}^\alpha q S \alpha_{y1} + 2P_p \delta_2, \\ F_{z1} = C_{y1}^\alpha q S \alpha_{z1} + 2P_p \delta_1, \\ m = m_0 + \int_0^t m dt, \\ \alpha_{y1} = -\frac{1}{V} (V_x \alpha_{12} + V_y \alpha_{22} + V_z \alpha_{32}), \end{cases}$$

$$\alpha_{z1} = -\frac{1}{V} (V_x \alpha_{13} + V_y \alpha_{23} + V_z \alpha_{33}),$$

$$g_r = \frac{k}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{b_2}{r^4} (-5 \sin^2 \varphi_u + 1) + \frac{15}{8} \frac{b_4}{r^6} (21 \sin^4 \varphi_u - 14 \sin^2 \varphi_u + 1),$$

$$g_\omega = 3 \frac{b_2}{r_4} \sin \varphi_u - \frac{5}{2} \frac{b_4}{r^6} \sin \varphi_u (7 \sin^2 \varphi_u - 3),$$

$$\sin \varphi_u = a_x \frac{x}{r} + a_y \frac{R_0 + y}{r} + a_z \frac{z}{r},$$

$$r = \sqrt{x_3^2 + (R_0 + y_3)^2 + z_3^2},$$

$$V = \sqrt{V_{x3}^2 + V_{y3}^2 + V_{z3}^2}, \quad h = r - R_0,$$

$$R_0 = a \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \varphi_r + \frac{\varepsilon^4}{2} \sin^2 \varphi_r - \frac{5\varepsilon^4}{8} \sin^2 \varphi_r \right),$$

$$a = 6378245 \text{ м}, \quad \varepsilon^2 = 0,006693421623,$$

$$\begin{cases} \alpha_{11} = [(1 - \cos \omega_3 t) \cos^2 \psi \cos^2 \varphi_{\Gamma_0} + \cos \omega_3 t + \gamma \omega_3 + \\ + \sin \psi \cos \psi \cos \varphi_{\Gamma_0}] \cos \varphi + [\gamma \cos \psi + (1 - \cos \omega_3 t) \times \\ \times \cos \psi \sin \varphi_{\Gamma_0} \cos \varphi_{\Gamma_0} - \omega_3 t \sin \psi \cos \varphi_{\Gamma_0}] \sin \varphi, \\ \alpha_{12} = -\sin \varphi + \cos \varphi (\gamma \cos \psi - \omega_3 t \cos \varphi_{\Gamma_0} \sin \psi), \\ \alpha_{13} = \zeta - \omega_3 t \sin \varphi_{\Gamma_0}, \\ \alpha_{21} = [(1 - \cos \omega_3 t) \cos \psi \sin \varphi_{\Gamma_0} \cos \varphi_{\Gamma_0} - \gamma \cos \psi + \\ + \omega_3 t \sin \psi \cos (\varphi_{\Gamma_0} - \gamma)] \cos \varphi + [\cos \omega_3 t + \\ + (1 - \cos \omega_3 t) \sin^2 \varphi_{\Gamma_0}] \sin \varphi, \\ \alpha_{22} = \cos \varphi + \sin \varphi (\gamma \cos \psi - \omega_3 t \cos \varphi_{\Gamma_0} \sin \psi), \\ \alpha_{23} = \gamma \sin \psi + \omega_3 t \cos \psi \cos (\varphi_{\Gamma_0} - \gamma), \\ \alpha_{31} = [-(1 - \cos \omega_3 t) \sin \psi \cos \psi \cos^2 \varphi_{\Gamma_0} + \omega_3 t \sin \varphi_{\Gamma_0} - \\ - \gamma \omega_3 t \cos \varphi_{\Gamma_0} \sin^2 \psi - \zeta] \cos \varphi - [(1 - \cos \omega_3 t) \sin \psi \sin \varphi_{\Gamma_0} \cos \varphi_{\Gamma_0} + \\ + \gamma \sin \psi + \omega_3 t \cos \psi \cos \varphi_{\Gamma_0}] \sin \varphi, \\ \alpha_{32} = (\zeta - \omega_3 t \sin \varphi_{\Gamma_0}) \sin \varphi - (\gamma \sin \psi + \omega_3 t \cos \psi \cos \varphi_{\Gamma_0}) \cos \varphi, \\ \alpha_{33} = 1, \quad \varphi = \varphi_{np} + \Delta \varphi, \quad \gamma = \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\varphi_{\Gamma_0}, \\ \alpha_{11} = \omega_3^2 (\sin^2 \varphi_{\Gamma_0} + \cos^2 \varphi_{\Gamma_0} \sin^2 \psi), \\ \alpha_{12} = a_{21} = -\omega_3^2 \sin^2 \varphi_{\Gamma_0} \cos^2 \varphi_{\Gamma_0} \cos \psi, \\ \alpha_{13} = a_{31} = \omega_3^2 \cos^2 \varphi_{\Gamma_0} \sin \psi \cos \psi, \\ \alpha_{22} = \omega_3^2 \cos^2 \varphi_{\Gamma_0}, \\ \alpha_{23} = a_{32} = \omega_3^2 \sin \varphi_{\Gamma_0} \cos \varphi_{\Gamma_0} \sin \psi, \\ \alpha_{33} = \omega_3^2 (\sin^2 \varphi_{\Gamma_0} + \cos^2 \varphi_{\Gamma_0} \cos^2 \psi), \\ b_{12} = -b_{21} = -2\omega_3 \cos \varphi_{\Gamma_0} \sin \psi, \end{cases}$$

$$b_{13} = -b_{31} = -2\omega_3 \sin \varphi_{\Gamma_0},$$

$$b_{23} = -b_{32} = 2\omega_3 \cos \varphi_{\Gamma_0} \cos \psi,$$

$$a_x = \cos \psi \cos \varphi_{\Gamma_0},$$

$$a_y = \sin \varphi_{\Gamma_0}, \quad a_z = \sin \psi \cos \varphi_{\Gamma_0}.$$

$$\Delta\varphi = \frac{k_{HC}\dot{Y}_{HC} + k_2 Y_{HC} + N(\phi_{HP} - \theta - \gamma \cos \psi + \omega_3 t \cos \varphi_{\Gamma_0} \sin \psi)}{-N - k_{CT_2}},$$

$$\xi = \frac{k_{BC}\dot{Z}_{BC} + k_1 Z_{BC} + N[\sigma \cos \theta - \omega_3 t (\cos \psi \cos \varphi_{\Gamma_0} \sin \theta -$$

$$-\sin \varphi_{\Gamma_0} \cos \theta) - \gamma \sin \theta \sin \psi],$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \frac{C_n^\alpha q S (x_o - x_T)}{2P_p (x_p - x_T)}, \\ \ddot{Y}_{HC} = \frac{1}{m} [F_{x1} \Delta\varphi + F_{y1} - F_{z1} \xi \sin \varphi], \\ Y_{HC} = \int_0^t \dot{Y}_{HC} dt, \quad Z_{BC} = \int_0^t \dot{Z}_{BC} dt, \\ \dot{Y}_{HC} = \int_0^t \ddot{Y}_{HC} dt, \quad \dot{Z}_{BC} = \int_0^t \ddot{Z}_{BC} dt, \\ \ddot{Z}_{BC} = \frac{1}{m} [F_{x1} \xi \cos \varphi + F_{y1} \xi \sin \varphi + F_{z1}], \end{array} \right.$$

при начальных условиях:

$$t = 0; \quad x_0 = y_0 = z_0 = V_{x0} = V_{y0} = V_{z0} = 0. \quad (27)$$

**Программа тангажа на атмосферном участке траектории полета.** Обычно атмосферный участок траектории проходит первая ступень ракеты-носителя. Будем исходить из этого предположения. Программу тангажа на этом участке траектории выбирают исходя из следующих условий:

1. При разделении ступеней ракеты-носителя для обеспечения условий стабилизации и управляемости должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} q &\leq 100 \text{ кг/м}^2; \\ \alpha &\approx 0. \end{aligned} \quad (28)$$

2. Отделяющаяся часть первой ступени должна падать в отчужденный район

$$L_{c1} = L_{отч}. \quad (29)$$

3. На участке больших скоростных напоров угол атаки должен быть равен нулю.

Для обеспечения этих условий активный участок траектории первой ступени разбивается на пять участков, программа тангажа задается следующим образом.

1. Вертикальный полет, продолжительностью  $\tau_6 = 6-8$  с.

Программа тангажа определяется равенством

$$\varphi_{np} \approx 90^\circ.$$

2. Первое склонение продольной оси ракеты-носителя продолжительностью  $\tau_{c1} = 12-25$  с. Программа тангажа выбирается из условия

$$\alpha = \bar{\alpha}_1 (t - \tau_B)(t - \tau_B - \tau_{c1})^2.$$

3. Полет с углами атаки, равными нулю. Продолжительность определяется временем прохождения участка полета с большими скоростными напорами до момента, когда "q $\alpha$ " (произведение скоростного напора на угол атаки) существенно уменьшается до допустимых значений из условий стабилизации и прочности ракеты-носителя. За это время проходит область значительных скоростных напоров. Программа тангажа выбирается из условия

$$\alpha \approx 0. \quad (30)$$

4. Второе склонение продольной оси ракеты-носителя продолжительностью  $\tau_{c2} = 10-15$  с. Программа тангажа выбирается из условия

$$\alpha = \bar{\alpha}_2 (t - \tau_B - \tau_{c1} - \tau_\alpha)(t - \tau_B - \tau_{c1} - \tau_\alpha - \tau_{c2})^2.$$

5. Полет с углами атаки, равными нулю, до окончания процесса разделения ступеней.

При расчете траекторий значения параметров  $\bar{\alpha}_1$  и  $\bar{\alpha}_2$  выбираются такими, чтобы удовлетворялись соотношения (28), (29).

На участке первого склонения продольной оси ракеты-носителя скоростной напор незначителен, поэтому диапазон изменения параметра  $\bar{\alpha}_1$  практически не ограничивает выбор величины скоростного напора при разделении ступеней. На участке второго склонения продольной оси ракеты-носителя скоростной напор достигает значительных величин (порядка 3000-5000 кг/м<sup>2</sup>), поэтому диапазон изменения параметров  $\bar{\alpha}_2$  ограничен допустимыми значениями угла атаки



и скорости склонения продольной оси ракеты. При изменении заданного района падения отделяющейся части первой ступени возможно, что диапазон изменения параметра  $\bar{\alpha}_2$  окажется недостаточным для обеспечения заданной дальности падения отделяющейся части первой ступени. В этом случае дальность падения обеспечивается изменением времени выключения двигателя первой ступени. Во всех случаях заданная дальность падения отделяющейся части не должна превышать максимальную возможную дальность.

Типичный вид программы тангажа и угла атаки при полете ракеты-носителя на атмосферном участке траектории приведен на рис. 1.

**Программа тангажа на заатмосферном участке траектории полета.** Траектория второй ступени ракеты-носителя проходит в разреженных слоях атмосферы. Это обстоятельство позволяет при выборе траектории второй ступени использовать экстремальную программу тангажа.

Программа тангажа определяется выражением

$$\varphi_{np} = \arctg \frac{\mu_1}{\mu_2} - \delta_1. \quad (31)$$

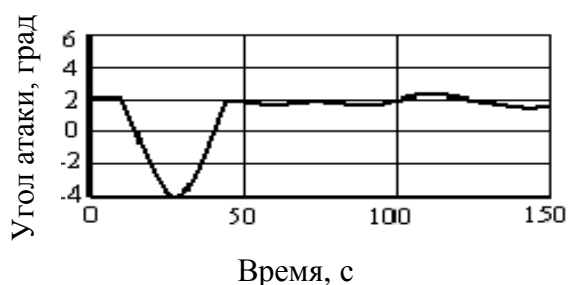
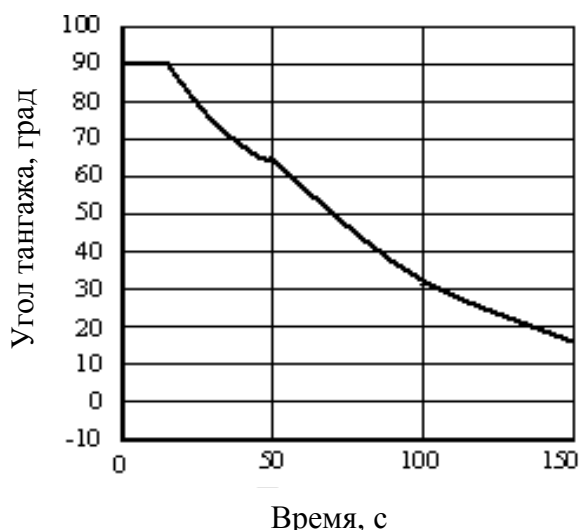


Рис. 1. Программа тангажа и изменение угла атаки при полете ракеты-носителя на атмосферном участке полета

Расчет параметров  $\mu_i$  производится интегрированием системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mu}_1 = \frac{V_1 \cos \vartheta_1}{r_1} \mu_2 - \mu_4, \\ \dot{\mu}_2 = -\frac{2V_1 \cos \vartheta_1}{r_1} \mu_1 + \frac{V_1 \sin \vartheta_1}{r_1} \mu_2 - \mu_{50} \frac{r_{10}}{r_1}, \\ \dot{\mu}_4 = \left( V_1^2 \cos^2 \vartheta_1 - \frac{2k}{r_1} \right) \frac{\mu_1}{r_1^2} - \frac{V_1^2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_1}{r_1^2} \mu_2 + \\ + \frac{V_1 \cos \vartheta_1}{r_1^2} \mu_{50} r_{10}, \end{cases} \quad (32)$$

Начальные условия  $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{40}, \mu_{50}$  для интегрирования системы (32), определяющие программу тангажа второй ступени, выбираются следующим образом:

- параметр  $\mu_{40}$  выбирается из условия обеспечения заданного наклона вектора скорости к местному горизонту в момент достижения заданной скорости;
- параметр  $\mu_{50}$  полагается равным нулю.

Так как в момент начала активного участка второй ступени угол тангажа, полученный из формулы (31) и равный

$$\varphi_{oII} = \arctg \frac{\mu_{10}}{\mu_{20}} - \delta_{10},$$

вообще говоря, не совпадает с углом тангажа ракеты-носителя в момент окончания активного участка первой ступени, то экстремальная программа тангажа второй ступени сглаживается на некотором отрезке времени по линейной зависимости

$$\varphi = \varphi_{oII} + \dot{\varphi}t. \quad (33)$$

В том случае, когда имеет место неравенство

$$\varphi_{oII} > \varphi_{kI}, \quad (34)$$

в формуле (33) удобно положить

$$\dot{\phi} = 0.$$

В том случае, когда имеет место неравенство

$$\varphi_{o\underline{\Pi}} < \varphi_{k\underline{I}},$$

угловая скорость  $\dot{\phi}$  выбирается из условия минимума времени перехода на экстремальную программу, с учетом ограничений, наложенных системой управления на скорость разворота ракеты-носителя. Типичный вид программы тангажа на заатмосферном участке полета ракеты-носителя приведен на рис. 2.

**Программа тяги второй ступени ракеты-носителя.** Общий вид программы тяги второй ступени приведен на рис. 3. Следует заметить, что продолжительность времени работы двигателя на режиме номинальной тяги фиксирована и не варьируется при выборе программы тяги. Фактически выбирается время полета с включенным маршевым двигателем  $\tau_{D1}$  и с работающим двигателем малой тяги  $\tau_{MT}$  (или двигателями системы стабилизации), то есть при выборе траектории второй ступени варьированию подвергаются только параметры  $\tau_{D1}$  и  $\tau_{MT}$ . Выбор производится следующим образом.

При заданных значениях кинематических параметров движения центра масс ракеты в момент начала работы двигателя второй ступени и заданных значениях параметров  $\tau_{D1}, \tau_{MT}$  производится расчет траектории с выбором экстремальной программы тангажа, обеспечивающей выход на заданную орбиту. Подобные расчеты повторяются при различных значениях параметра  $\tau_{MT}$ . Строится зависимость конечного веса ракеты-носителя от параметра  $\tau_{MT}$  и выбирается оптимальное значение  $\tau_{MT}$ , обеспечивающее максимум конечного веса при заданном значении параметра  $\tau_{D1}$ .

Типичные зависимости конечного веса и оптимальных значений параметров  $\tau_{D1}, \tau_{MT}$  от высоты круговой орбиты приведены на рис. 4.

1. Задаются нулевые приближения параметров  $\tau_{D1o}, \tau_{MTo}$  и интегрированием систем (27), (29) определяются соответствующие значения конечного веса  $G_{ko}$  ракеты-носителя при выходе на заданную орбиту, а также значения частных производных:

$$\left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{D1}} \right|_o, \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{MT}} \right|_o.$$

Частные производные определяются методом конечных разностей.

2. Задается приращение  $\Delta_o G_k$  конечного веса такое, чтобы сумма  $G_{ko} + \Delta_o G_k$  не превышала возможный максимум  $G_k$ , который может быть достигнут подбором параметров  $\tau_{D1}, \tau_{MT}$ .

3. Определяется постоянная

$$k = \frac{\Delta_o G_k}{\left( \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{D1}} \right|_o \right)^2 + \left( \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{MT}} \right|_o \right)^2}.$$

4. Первые приближения параметров  $\tau_{D1}, \tau_{MT}$  рассчитываются по формулам

$$\tau_{D1} = \tau_{D1o} + k \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{D1}} \right|_o;$$

$$\tau_{MT} = \tau_{MTo} + k \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{MT}} \right|_o.$$

5. Интегрированием систем (27), (29) определяются первые приближения конечного веса  $G_{k1}$  при выходе на заданную орбиту и частных производных

$$\left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{D1}} \right|_1, \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{MT}} \right|_1.$$

Аналогично рассчитываются последующие приближения параметров:

$$\tau_{D1}; \tau_{MT}; G_k; \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{D1}} \right|_1; \left. \frac{\partial G_k}{\partial \tau_{MT}} \right|_1.$$

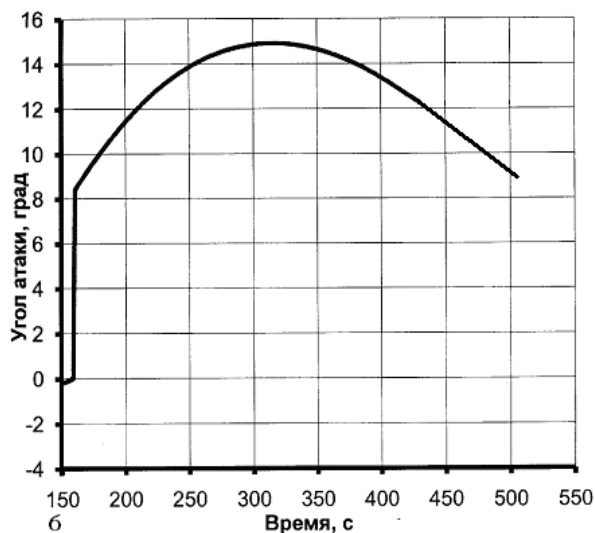
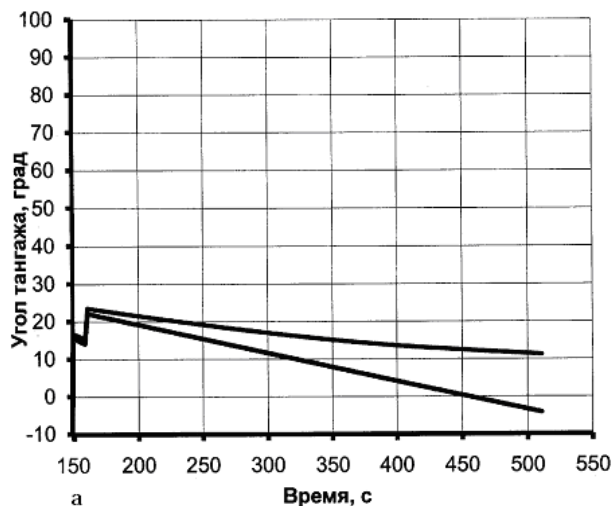


Рис. 2. Программа тангажа (а) и изменение угла атаки (б) при полете ракеты-носителя на заатмосферном участке полета

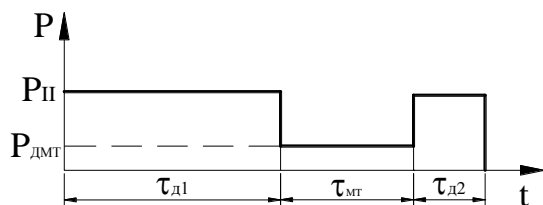


Рис. 3. Программа тяги второй ступени ракеты-носителя

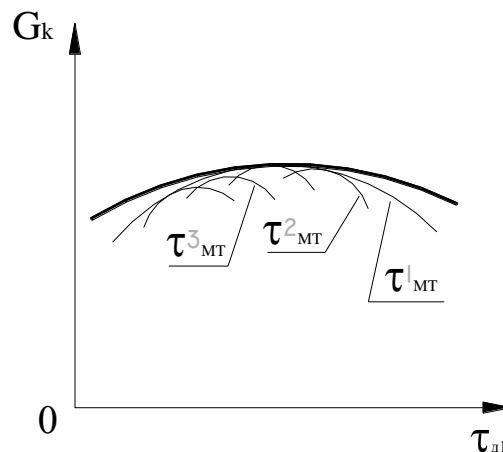


Рис. 4. Зависимость конечного веса ракеты-носителя от значений параметра  $\tau_{д1}$ ,  $\tau_{МТ}$

### Список использованной литературы

1. Охочимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. // УФН. – 1957. – Т. 13, вып. 1.
2. Fried B.D. On the Powered Flight Trajectory of an Earth Satellite. // Jet Propulsion. – 1957. – Vol. 27. № 6. – P. 641–643.
3. Fried B.D. Trajectory optimization for Powered Flight in two or three Dimensions. // Space Technology. – New York, 1959.
4. Lowden D.F. Optimal programming of Rocket thrust direction. // Astronautica Acta. – 1955. – Vol. 1, № 1. – P. 41–56.
5. Lowden D.F. Optimal Rocket Trajectories. // Jet Propulsion. – 1957. – Vol. 27, № 12. – 1263 p.
6. Lowden D.F. Minimal Rocket Trajectories. // Journal of the American Rocket Society. – 1953. – Vol. 23, № 11-12. – P. 360–376, 382.
7. Lowden D.F. Interplanetary Rocket Trajectories. // Advances in Space Science. – 1959. – Vol. 1. – P. 1–53.
8. Wisnenski M.L. Error matrix for a flight on a circular orbit. // ARS. – 1962. – Vol. 32, № 9. – P. 1416–1418.

Статья поступила 02.12.2014