УДК 531.55+629.7

В.А. Ижко

МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ БАЛЛИСТИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИБЛИЖЕННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Дано определение краевых задач в баллистике. Рассмотрены существующие методы решения краевых задач и указаны их преимущества и недостатки.

Приведено описание нового, разработанного автором, комбинированного метода решения краевых задач с использованием приближенной аналитической зависимости.

Дано визначення крайових задач у балістиці. Розглянуто існуючі методи розв'язання крайових задач і зазначено їхні переваги та недоліки.

Наведено опис нового, розробленого автором, комбінованого методу розв'язання крайових задач з використанням наближеної аналітичної залежності.

The paper presents definition of boundary problems in ballistics. The existing methods of solving of boundary problems are examined, their advantages and drawbacks are investigated.

The description of a new combined method of solving of boundary problems, developed by the author, is provided; it involves approximating analytical dependence.

В процессе подготовки летных испытаний и штатной эксплуатации баллистических ракет и ракет-носителей космических аппаратов возникает необходимость выбора и расчета траекторий движения ракеты, которые удовлетворяют не только начальным условиям в точке старта (задача Коши), но и условиям в промежуточных и конечной точках траектории ракеты [1, 2]. Нахождение требуемой траектории включает в себя определение не только параметров движения ракеты, но и значений управляющих параметров, которые обеспечивают выполнение поставленных условий в заданных точках. Данный тип задач относится к краевым задачам баллистики.

Математически такая задача формулируется следующим образом.

Движение ракеты задается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\overline{\mathrm{x}}}{dt} = \overline{\mathrm{f}}(t, \overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{u}}), \qquad (1)$$

где $\overline{\mathrm{x}}$ – фазовый вектор размерности n;

t – время;

$\overline{\mathrm{f}}$ – вектор-функция размерности n, которая имеет вид

$$\overline{\mathrm{f}}(t, \overline{\mathrm{x}}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_r) \\ f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_r) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_r) \end{pmatrix};$$

$\overline{\mathrm{u}}$ – вектор параметров управления размерности r.

Вектор $\overline{\mathrm{x}}$ включает в себя текущие координаты центра масс ракеты, компоненты векторов кажущейся и истинной скоростей центра масс ракеты, массу и др.

Вектор $\overline{\mathrm{u}}$ включает в себя азимут пуска, параметры программ углов тангажа, рыскания, варьируемые параметры циклограммы полета и т. п.

Начальные условия движения для данной системы, как правило, имеют вид

$$t=0; \ \overline{\mathrm{x}}(0) = \overline{\mathrm{x}}_0. \qquad (2)$$

Задача состоит в нахождении вектора $\overline{\mathrm{u}}$, компоненты которого обеспечивают выполнение условий на правом конце траектории. В общем случае эти условия записываются в виде

$$\overline{\mathrm{g}}(\overline{\mathrm{u}}, \ \overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{k}}) = \overline{\mathrm{d}}, \qquad (3)$$

где $\overline{\mathrm{x}}_{\mathrm{K}}$ – значения фазовых переменных в конечной (или промежуточной) точке траектории, которая соответствует времени t_K, т.е. $\overline{x}_K = \overline{x}(t_K)$;

$\overline{g}$ – заданная вектор-функция;

$\overline{d}$ – вектор значений функции $\overline{g}$ в конечной точке траектории.

Необходимо отметить, что для того чтобы решение существовало, размерность вектора $\overline{u}$ должна быть больше или равна размерности вектор-функции $\overline{g}$. При этом в случае если размерность вектора $\overline{u}$ превышает размерность вектора $\overline{g}$, получается множество решений краевой задачи, из которого может быть выбрано оптимальное. Далее будем рассматривать случай, когда размерность вектора $\overline{u}$ совпадает с количеством ограничений на правом конце траектории, т.е. с размерностью вектора $\overline{g}$.

Наиболее типичными краевыми задачами, решаемыми при расчете траектории баллистической ракеты, являются задачи попадания отработавших промежуточных ступеней ракеты или головного обтекателя в заданные районы падения и обеспечения попадания головной части в заданную точку цели.

Основной краевой задачей для ракет-носителей является задача обеспечения требуемых параметров орбиты КА в момент его отделения от последней ступени.

На практике система дифференциальных уравнений движения ракеты (1) включает в себя не менее десяти дифференциальных уравнений первого порядка с весьма сложными правыми частями. При этом ряд функций, входящих в правые части систем уравнений, задается таблично. Эти обстоятельства делают невозможным получение аналитического решения не только для краевой задачи (3), но и для задачи Коши (2). Решение поставленной задачи может быть получено только численным методом с помощью ЭВМ.

В настоящее время существует целый ряд математических методов решения краевых задач, в частности метод функций Грина [3], метод инвариантного погружения [4], метод Ньютона и его модификации [5, 6], метод Стеффенсена [5, 6], градиентные методы [6].

Метод функций Грина для решения краевых задач в баллистике не применяется, так как требует построения весьма сложной и громоздкой вычислительной процедуры получения функции Грина для данной краевой задачи. Применение метода инвариантного погружения также значительно усложняет задачу, так как приводит к необходимости численного решения системы уравнений в частных производных.

Таким образом, наибольшее распространение при решении баллистических задач получили метод Ньютона и его модификации, метод Стеффенсена, градиентные методы. Идея этих методов заключается в организации итерационного вычислительного процесса, шаг за шагом уточняющего вектор управления, – от начального приближения, задаваемого инженером-баллистиком, до конечного, при котором выполняется условие

$$\left|\overline{g}(\overline{u}, \overline{x}_k) - \overline{d}\right| < \overline{o},$$

где $\overline{o}$ – вектор требуемых точностей решения краевой задачи.

Основными достоинствами этих методов являются простота, универсальность для широкого класса задач, возможность реализации в программном обеспечении несложными алгоритмами.

К недостаткам следует отнести:

– необходимость априорных значений, позволяющих удачно выбирать начальное приближение вектора управления, из которого метод позволит получить решение краевой задачи;

– необходимость многократного расчета траектории для построения матрицы производных вектора краевых условий на правом конце траектории по компоненте вектора управления.

Перечисленных недостатков не имеет метод, предлагаемый ниже. Это комбинированный метод поиска с использованием приближенной аналитической зависимости.

Поясним схему метода на примере одномерной краевой задачи. Пусть необходимо обеспечить выполнение одного краевого условия, зависящего от одного управляющего параметра $L(u) = L_{зад}$, где u – управляющий параметр; $L_{зад}$ – заданное значение краевого условия.

Предположим, что можно построить приближенную аналитическую зависимость $L^A(u)$, например, путем построения линейной или квадратичной аппроксимации (либо просто графика) по нескольким рассчитанным точным значениям $L_i^T(u_i)$. Точные значения $L_i^T(u_i)$ рассчитываются интегрированием системы дифференциальных уравнений вида (1) при заданном значении управляющего параметра u_i.

Схема предлагаемого метода:

1. Находим начальное приближение управляющего параметра $u^{(0)}$ путем решения уравнения $L^A(u) = L_{зад}$. Решение $u^{(0)}$ получаем аналитически либо графически (рисунок).
2. Рассчитываем точное значение $L^T(u^{(0)})$ путем интегрирования системы дифференциальных уравнений.
3. Находим значение невязки $\Delta^{(0)} = L_{зад} - L^T(u^{(0)})$. Если $\left|\Delta^{(0)}\right| < \varepsilon$, где ε – заданная точность решения краевой задачи, то процесс решения считаем завершенным, в противном случае процесс решения продолжается.
4. Находим следующее приближение к решению краевой задачи, в общем случае обозначим его $u^{(k)}$, где k – номер итерации, путем решения уравнения $L^A(u) = L^A(u^{(k-1)}) + \Delta^{(k-1)}$, $k = 1, 2, ...$ Решение $u^{(k)}$ получаем также аналитически либо графически.
5. Рассчитываем точное значение $L^T(u^{(k)})$ путем интегрирования системы дифференциальных уравнений.
6. Находим значение невязки $\Delta^{(k)} = L_{зад} - L^T(u^{(k)})$. Если $\left|\Delta^{(k)}\right| < \varepsilon$, то процесс решения считаем завершенным и значение $u^{(k)}$ принимаем за окончательное решение краевой задачи, в противном случае процесс решения возобновляется начиная с пункта 4.

На рисунке приведено графическое изображение двух последовательных итераций процесса решения краевой задачи по комбинированному методу поиска с использованием приближенной аналитической зависимости.

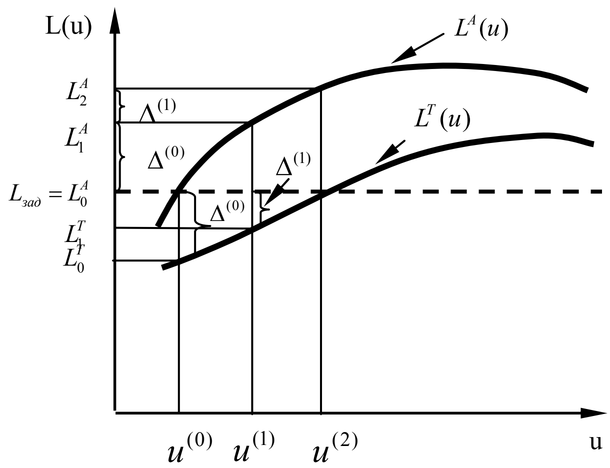

Схема решения краевых задач

На рисунке обозначено:

$u^{(0)}$ – начальное приближение к решению краевой задачи, находится как решение аналитического уравнения $L^A(u) = L_0^A = L_{зад}$;

$L_0^T = L^T(u^{(0)})$ – точное значение краевого условия при начальном значении управляющего параметра $u^{(0)}$;

$\Delta^{(0)} = L_{зад} - L_0^T$ – разница между требуемым значением краевого условия и точным значением краевого условия при начальном значении управляющего параметра $u^{(0)}$;

$L_1^A = L_0^A + \Delta^{(0)}$ – значение краевого условия для аналитического уравнения на 1-й итерации;

$u^{(1)}$ – значение решения краевой задачи на 1-й итерации, находится как решение аналитического уравнения $L^A(u) = L_1^A$;

$L_1^T = L^T(u^{(1)})$ – точное значение краевого условия на 1-й итерации при значении управляющего параметра $u^{(1)}$;

$\Delta^{(1)} = L_{зад} - L_1^T$ – разница между требуемым значением краевого условия и точным значением краевого условия на 1-й итерации;

$L_2^A = L_1^A + \Delta^{(1)}$ – значение краевого условия для аналитического уравнения на 2-й итерации;

$u^{(2)}$ – значение решения краевой задачи на 2-й итерации, находится как решение аналитического уравнения $L^A(u) = L_2^A$.

Метод может быть распространен для решения краевых задач более высокой размерности.

К преимуществам метода следует отнести:

1. Метод автоматически дает близкое к решению начальное приближение вектора управляющих параметров, что повышает надежность схождения итерационного процесса к решению и сокращает количество итераций.

2. Метод не использует громоздкую процедуру вычисления элементов матрицы Якоби, что существенно упрощает алгоритм реализации данного метода на ЭВМ и сокращает объем вычислений.

Исходя из изложенного, данный метод может быть особенно эффективен в программном обеспечении бортовых ЭВМ ракет-носителей. Он разработан автором в процессе создания программного обеспечения баллистических расчетов на стадии проектирования ракеты-носителя 11К77. Эффективность метода подтверждена при проведении баллистических расчетов.

Список использованной литературы

1. Герасюта Н.Ф., Новиков А.В., Белецкая Н.Г. Динамика полета. – Днепропетровск, 1998. – 365 с.

2. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов. – М.: Наука, 1982. – 351 с.

3. Эльгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1966. – 424 с.

4. Касти Дж., Калаба Р. Методы погружения в прикладной математике. – М.: Мир, 1976. – 223 с.

5. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. 2. – К.: Изд-во АН УССР, 1979. – 245 с.

6. Мамон П.А., Половников В.И., Слезкинский С.К. Баллистическое обеспечение космических полетов. – Л.: Изд-во ВИИ им. А.Ф. Можайского, 1990. – 622 с.

Статья поступила 31.03.2015