УДК 539.3

Канд. техн. наук Д.В. Клименко, А.М. Тонконоженко, канд. техн. наук В.И. Гнитько,
К.Г. Дегтярев, д-р техн. наук Е.А. Стрельникова

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В УПРУГИХ ОБОЛОЧКАХ С РАЗНЫМ УРОВНЕМ ИХ ЗАПОЛНЕНИЯ

Разработан метод численной реализации, проведено сравнение численных и аналитических результатов. Колебания жидкости и упругой оболочки исследуются одновременно с помощью оригинального компьютерного пакета, основанного на сочетании методов конечных и граничных элементов. С учетом силы тяжести исследованы совместные колебания цилиндрической оболочки с двумя отсеками и полусферической оболочки.

Розроблено метод числової реалізації, проведено порівняння числових і аналітичних результатів. Коливання рідини та пружної оболонки досліджують одночасно за допомогою оригінального комп'ютерного пакета, який ґрунтується на поєднанні методів кінцевих і граничних елементів. З урахуванням сили тяжіння досліджено сумісні коливання циліндричної оболонки з двома відсіками та на-півсферичної оболонки.

Method of numerical evaluation was developed, numerical and analytical results were compared. Vibrations of the liquid and elastic shell are studied simultaneously using the original computer package, based on combination of finite-element and boundary-element methods. Combined vibrations of the cylindrical shell with two compartments and hemispherical shell were studied subject to the gravity force.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема плесканий жидкости в контейнерах и баках находится в центре внимания многих исследователей на протяжении нескольких последних десятилетий. Известно, что именно частично заполненные резервуары испытывают действие особенно сильных плесканий. Интенсивное движение жидкости может привести к высокому давлению на стенки резервуара, что в свою очередь ведет к разрушению конструкции или потере устойчивости. Особенного внимания заслуживают изучение распределения давления на стенки резервуара, определение локальных максимумов, которые могут почти вдвое превышать аналогичные значения в незаполненном резервуаре [1]. В работе [2] определено давление на стенки круговых и призматических резервуаров, которые движутся с ускорением. В работах [3, 4] решалась плоская задача. Было установлено, что динамические характеристики существенно зависят от соотношения уровня заполнения и ширины контейнера. В работе [5] изучено распределение давления на стенки горизонтального цилиндрического резервуара сразу после действия ударной нагрузки при уровне заполнения жидкостью до 95%. В работе [6] проведено численное исследование для двумерного прямоугольного резервуара с жесткими стенками под действием горизонтального и вертикального ускорений. Эффекты вязкости исследованы в работах [7, 8], в которых показано, что вязкость проявляется при незначительных амплитудах и высоком уровне заполнения. Анализ большого количества исследований, посвященных проблемам плескания жидкости в резервуарах, проведен в основательном обзоре Р.А. Ибрагима [1].

В предлагаемой работе описан метод анализа гидроупругого взаимодействия оболочек, частично заполненных жидкостью, который позволяет изучать влияние упругости стенок резервуара, различных свойств жидкости, сил гравитации на частоты собственных колебаний баков. Рассмотрены полусферическая и цилиндрическая оболочки. Использовано сочетание методов конечных и граничных элементов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача о колебаниях жидкости в оболочке. Обозначим смоченную поверхность оболочки через S_1, а свободную поверхность – S_0. Пусть декартова система координат $0xyz$ связана с оболоч-

кой, свободная поверхность жидкости S_0 совпадает с плоскостью $x0y$ в состоянии покоя (рис. 1).

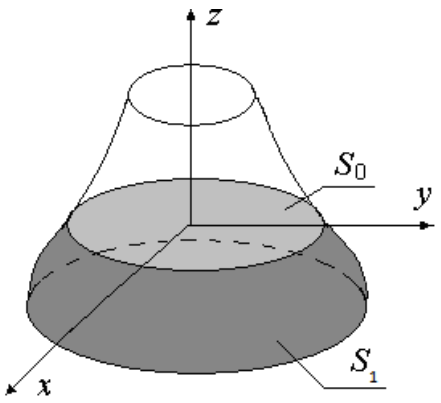

Рис. 1. Оболочка вращения, частично заполненная жидкостью

Предполагается, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее движение, начавшееся из состояния покоя, является безвихревым. В этих условиях существует потенциал скоростей жидкости Ф, удовлетворяющий уравнению Лапласа.

Систему уравнений движения оболочечной конструкции с отсеками, частично заполненными жидкостью, символически запишем в виде

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) + \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{U}}) = \mathbf{P}, \qquad (1)$$

где **L**, **M** – операторы упругих и массовых сил; **P** – давление жидкости на смоченные поверхности конструкции; **U** – вектор-функция перемещений.

Здесь и далее обозначаем нормальную компоненту перемещений как w. Рассмотрим правую часть уравнения (1). Заметим, что вектор **P** направлен по нормали к рассматриваемой поверхности, так как идеальная жидкость создает только нормальное давление на смоченные поверхности оболочки. Обозначим $\mathbf{P}=p\mathbf{n}$, где **n** – единичная внешняя нормаль к поверхности S. В предположении, что собственная скорость жидкости равна нулю, значение p в соответствии с интегралом Коши-Лагранжа можно представить в виде

$$\mathrm{p} = -\rho_1\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{gz}\right) + \mathrm{p}_0,$$

где Ф – потенциал скоростей; g – ускорение свободного падения; z – вертикальная координата точки в жидкости; p_0 – атмосферное давление; ρ_l – плотность жидкости.

Условие непротекания на смоченных поверхностях S можно представить в следующей форме:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\mathrm{S}_1} = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}}.$$

На свободной поверхности задаются динамическое и кинематическое граничные условия. Динамическим граничным условием является равенство давления на свободной поверхности атмосферному, а кинематическое условие заключается в том, что частицы жидкости, первоначально находившиеся на свободной поверхности, остаются на ней во все время последующего движения. Поэтому получаем

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\mathrm{S}_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathrm{t}}; \quad \left.\mathrm{p} - \mathrm{p}_0\right|_{\mathrm{S}_0} = 0,$$

где неизвестная функция $\zeta = \zeta(\mathrm{t}, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ описывает форму и положение свободной поверхности. Для потенциала скоростей Ф имеем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \Phi = 0; \ \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\mathrm{S}_1} = \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}};$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\mathrm{S}_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial \mathrm{t}}; \quad \left.\mathrm{p} - \mathrm{p}_0\right|_{\mathrm{S}_0} = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, необходимо решить уравнения (1) и (2) с учетом граничных условий на стенках оболочки и на свободной поверхности. Это приводит к системе сингулярных интегральных уравнений, как показано в работе [7].

Метод собственных форм

Будем искать собственные формы колебаний бака с жидкостью в виде

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{c}_\mathrm{k} \mathbf{u}_\mathrm{k}. \qquad (3)$$

Здесь функции $\mathbf{u}_k(x, y, z)$ – собственные формы колебаний пустого бака; $c_k(t)$ – неизвестные коэффициенты, зависящие только от времени t. Заметим, что справедливы соотношения [7]

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}_k) = \Omega_k^2 \mathbf{M}(\mathbf{u}_k); \quad (\mathbf{M}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j) = \delta_{kj};,$$

$$\left(\mathbf{L}(\mathbf{u}_k), \mathbf{u}_j\right) = \Omega_k^2 \delta_{kj},$$

где Ω_k – k-тая частота колебаний пустого бака. Приведенные соотношения показывают, что собственные формы колебаний пустого бака ортонормированы по матрице масс. Далее ищем потенциал Φ в виде суммы двух потенциалов $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Для потенциала Φ_1 определяем частоты и формы колебаний заполненного жидкостью бака без учета сил гравитации. Для определения Φ_1 необходимо использовать ряд

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{N} \dot{c}_k \varphi_{1k}.$$

Здесь зависящие от времени коэффициенты $c_k(t)$ определены в (3). Для нахождения φ_{1k} имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \varphi_{1k} = 0; \left.\frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = w_k; \left.\varphi_{1k}\right|_{S_0} = 0.$$

Здесь w_k – нормальная компонента формы колебаний $\mathbf{u}_k$.

Для вычисления потенциала Φ_2 получим частоты и формы колебаний жидкости в жестком баке с учетом сил гравитации. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\nabla^2 \Psi = 0; \left.\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_S = 0;$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right|_{S_0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial t} + g\zeta\right|_{S_0} = 0. \quad (4)$$

Рассматривая свободные колебания и опуская индексы, полагаем, что $\Psi = \psi e^{i\chi t}$. Продифференцируем четвертое соотношение в (4) по t и подставим выражение для ζ_t' из третьего соотношения в (4), как это было сделано в работе [8].

Итак, для определения потенциала Φ_2 необходимо решить задачу о колебаниях жидкости в жестком баке с учетом сил гравитации. Это приводит к следующему представлению для потенциала Φ_2:

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_k \varphi_{2k},$$

где функции φ_{2k} – собственные формы колебаний жидкости в жестком баке [8].

Окончательно получаем следующее представление для потенциала Φ:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{N} \dot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{k=1}^{M} \dot{d}_k \varphi_{2k}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что функция ζ может быть представлена в форме

$$\zeta = \sum_{k=1}^{N} c_k \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n} + \sum_{k=1}^{M} d_k \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n}. \quad (6)$$

Определив функции φ_{1k} и φ_{2k}, подставим их в уравнения (1), (2) и придем к проблеме собственных значений [9].

Система граничных интегральных уравнений

Основная процедура решения кратко описывается в работе [10]. Осуществляем переход от декартовой (x, y, z) к цилиндрической (r, θ, z) системе координат, отделяем переменную θ, и проводим интегрирование по z.

Далее представляем неизвестные функции в виде рядов Фурье со следующими компонентами по цилиндрической координате:

$$w_k(r, z, \theta) = w_k(r, z)\cos\alpha\theta;$$
$$\varphi_{ij}(r, z, \theta) = \varphi_{ij}(r, z)\cos\alpha\theta; \quad i = 1,2,$$

где α – известное целое число (количество узловых диаметров).

Ищем обе неизвестные гармонические функции φ_{1k} и φ_{2k} в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя [10], т.е. используем прямую формулировку метода граничных элементов. Опускаем для простоты индексы ij. Имеем

$$2\pi\varphi(P_0)=\iint_S q\frac{1}{|P-P_0|}dS-\iint_S \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|P-P_0|}dS.$$

Предполагается, что $S = S_1 \cup S_0$, и точки P и P_0 находятся на поверхности S. Величина $|P-P_0|$ представляет собой декартово расстояние между точками P и P_0.

Для рассматриваемой смешанной краевой задачи указанное выше интегральное представление приводит к системе сингулярных интегральных уравнений с неизвестными функциями φ и q. Подробности этого подхода изложены в статьях авторов [8, 9].

Заметим, что внутренние интегралы в полученных уравнениях являются полными эллиптическими интегралами первого и второго рода. Поскольку эллиптические интегралы первого рода не являются сингулярными, для их вычисления можно использовать стандартные квадратуры Гаусса. Для вычисления эллиптических интегралов второго рода использован подход, основанный на характеристическом свойстве среднего арифметико-геометрического значения, которое обозначается AGM (a, b) [10]. Также следует отметить, что внешние интегралы в рассматриваемых интегральных уравнениях содержат логарифмические особенности и их вычисление требует применения специальных квадратур, так как стандартные квадратуры приводят к существенным потерям точности. Здесь использованы специальные квадратуры Гаусса [11] и применена техника, описанная в работе [12].

Численные результаты

Рассмотрена полусферическая оболочка, заполненная жидкостью и имеющая такие характеристики: радиус оболочки R=5,08 м; толщина h=0,0254 м; модуль упругости E=70 ГПа; коэффициент Пуассона ν=0,3; плотность материала оболочки ρ_s=2770 кг/м^3; плотность жидкости ρ=1000 кг/м^3.

Предполагается, что оболочка защемлена по контуру (рис. 2). Уровень заполнения жидкостью обозначен H.

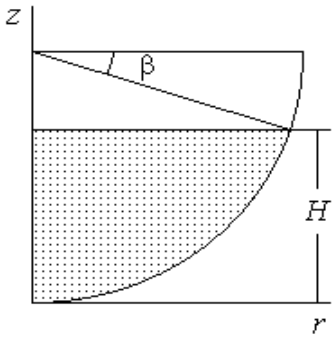

Рис. 2. Полусферическая оболочка с жидкостью

В табл. 1 представлены частоты колебаний полусферической оболочки при разных уровнях заполнения H/R и различном количестве узловых диаметров α.

Таблица 1

Частоты полусферической оболочки при разных уровнях заполнения

Частоты, Гц			
H/R	α=1	α=2	α=3
1	23,36	33,21	38,41
0,826	25,95	34,96	40,00
0,500	33,30	41,22	46,30
0,293	42,76	50,06	55,42
0,134	58,98	67,36	75,23
0,015	66,68	107,2	112,6
0	66,69	107,2	112,6

На рис. 3 показана зависимость частоты от уровня заполнения при разных α.

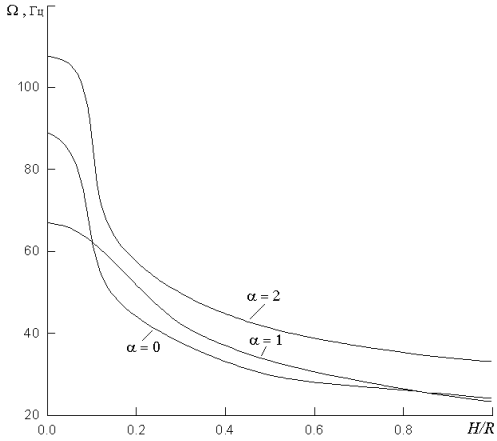

Рис. 3. Зависимость частоты от уровня заполнения

Далее рассмотрена задача о гидроупругих колебаниях цилиндрической оболочки с отсеками, частично заполненными жидкостью.

Геометрия резервуара показана на рис. 4, параметры его таковы: радиус $R = 1{,}5$ м; толщина $h_s = 0{,}01$ м; длина $L = 6$ м; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$; плотность материала $\rho = 7800$ кг/м^3; плотность жидкости в обоих отсеках $\rho_1 = \rho_2 = 1000$ кг/м^3. В середине бака поставлена перегородка, как показано на рис. 4. Уровень заполнения обозначен через H. Он одинаков в обоих отсеках $H_1 = H_2 = H$. При численном моделировании рассматривали различные значения H: 0,75; 1,5 и 2,75 м. Предполагалось, что оболочка защемлена по контуру и граничные условия таковы: $u_r = u_z = 0$ при $z = 0$ и $r = R$. Частоты и формы пустой оболочки рассчитаны с использованием метода конечных элементов (МКЭ), как это описано в работе [7].

Рассмотрены осесимметричные формы колебаний, т.е. предполагается, что α=0. Число собственных форм колебаний незаполненной оболочки выбиралось равным 20. При применении МКЭ использовали по 20 элементов на перегородке, днище, цилиндрической части.

Функции φ_{1k} были вычислены методом, рассмотренным в работах [13, 14] и основанным на применении граничных элементов. Расчет верхнего и нижнего отсеков был проведен отдельно.

Для сравнения рассмотрена цилиндрическая оболочка без перегородки, но с теми же геометрическими параметрами. Предполагалось, что уровень заполнения жидкостью в этой оболочке был равен $h = h_1 + h_2$. Заметим, что при наличии перегородки возникают кратные частоты. При отсутствии жидкости имеем равные частоты, но при наличии жидкости частоты начинают отличаться, хотя формы колебаний остаются одинаковыми.

На рис. 4 показаны две первые формы колебаний системы "двойной бак – жидкость". Уровень заполнения здесь h=1,5 м и $h_1 = h_2$=0,75 м.

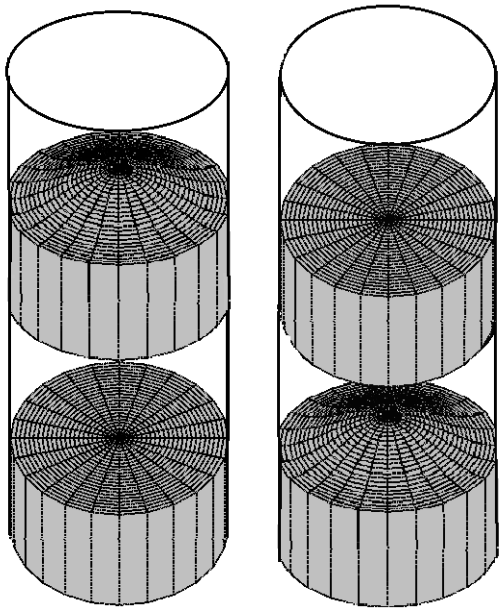

Рис. 4. Первые формы колебаний системы

Первые формы колебаний – это формы колебаний свободной поверхности жидкости. Результаты расчетов были получены по методике, описанной в работе [15]. Как было указано, имеем случай кратных частот. В данном случае они равны 5,00103 Гц. Но колебания осуществляются в разных отсеках.

В табл. 2 представлены частоты колебаний заполненного и пустого бака без перегородки.

Таблица 2

Частоты колебаний пустого и заполненного бака, Гц

Частоты, Гц				
пустого бака	бака, заполненного жидкостью			
	без перегородки			с перегородкой
h=0	h=1,5м	h=3,0м	h=5,5м	h=1,5м
	5,0010	5,0024	5,0048	5,00103
	6,7709	6,7709	6,7709	6,77016
	8,1568	8,1568	8,1568	8,15270
	9,1334	9,1334	9,1334	9,13341
	10,378	10,378	10,378	10,3787
34,47	29,243	22,661	15,432	7,0346
134,2	102,86	89,719	79,719	39,39
300,7	272,63	238,42	178,42	110,89
408,2	407,69	404,00	392,00	223,56

Эти результаты показывают, что частоты бака с перегородкой и без нее существенно отличаются. Установка перегородки ведет к

снижению частот колебаний. Предположение о разделении спектров колебаний упругой оболочки с жидкостью и колебаний жидкости в жесткой оболочке несправедливо при наличии перегородок.

Заключение

Построена математическая модель и разработаны теоретические основы построения численного метода анализа динамического поведения произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью.

Список использованной литературы

1. Ibrahim R.A. Liquid Sloshing Dynamics// Cambridge University Press. – Cambridge, 2005.

2. Sidi M. J. Spacecraft Dynamics and Control, Cambridge University Press. – New York, 1997.

3. Robinson, H.G.R. and C.R. Hume. Europa I: Flight Trial of F1- 5th June, 1964.

4. Space Exploration Technologies Corp. Demo Flight 2 Flight Review Update, June 15, 2007.

5. Vreeburg, Jan P.B. Spacecraft Maneuvers and Slosh Control, IEEE Control Systems Magazine, 2005.

6. Аврамов К. Хаотические колебания пластин, взаимодействующих с потоком жидкости/К. Аврамов, Е. Стрельникова// Прикладная механика. – Т. 50, № 3. – 2014. – С. 303-309.

7. Ventsel E., Naumenko V, Strelnikova E., Yeseleva E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid. Engineering analysis with boundary elements. – 2010. N. 34. – P. 856-862.

8. Gnitko V., Marchenko U., Naumenko V., Strelnikova E. Forced vibrations of tanks partially filled with liquid under seismic load. WIT Transactions on Modelling and Simulation 06/2011. Vol. 52. – P. 285-296.

9. Degtyarev K., Glushich P., Gnitko V., Strelnikova E. Numerical Simulation of Free Liquid-Induced Vibrations in Elastic Shells// International Journal of Modern Physics and Applications. – Vol. 1, N. 4. – 2015. – P. 159-168.

10. David A. Cox. The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss. L'Enseignement Mathématique. – Vol. 30. – 1984. – P. 275-330.

11. Stroud A.H., Secrest D. Gaussian Quadrature Formulas. Prentice-Hall, Englewood, N.J., Cliffs, 1966, 206 p.

12. Naumenko V.V., Strelnikova H.A. Singular integral accuracy of calculations in two-dimensional problems using boundary element methods. //Engineering analysis with boundary elements. – N. 26. – 2002. – P. 95-98.

13. Brebbia, C.A., Telles, J.C.F.& Wrobel, L.C. Boundary Element Techniques. – Springer-Verlag, 1984.

14. Ravnik J., Gnitko V., Ogorodnyk U., Strelnikova E. A BEM and FEM analysis of fluid-structure interaction in a double tank. WIT Transaction on Modelling and Simulation. – Vol. 57. – 2014. – P. 13-25.

Статья поступила 23.11.2015